

Universidad
Industrial de
Santander



Matemáticas del Nororiente Colombiano

1-5 de diciembre de 2025



Informes:



Escuela de matemáticas
Universidad Industrial de Santander



Teléfono: +57 (607) 634 4000
ext. 2307 – 2316



Correo: matematicas.simposio@uis.edu.co

ISBN: 978-628-7549-87-6
Publicaciones Universidad Industrial de Santander: UIS (978-628-7549)
Bucaramanga (Colombia), Diciembre de 2025

XIII Simposio Nororiental de Matemáticas

Diciembre 1–5, 2025, Bucaramanga – SAN, Colombia

En homenaje al profesor Bernardo Mayorga



Facultad de ciencias – Escuela de Matemáticas

Comité científico

Andrés Sebastián Ríos
UIS, Colombia
Carlos Arturo Rodríguez
UIS, Colombia
Carlos Wilson Rodríguez Cárdenas
UIS, Colombia
César Galindo
Universidad de los Andes, Colombia
Diana Villabona
Cinvestav, México
Diego Armando Rueda
UIS, Colombia
Élder Villamizar
UIS, Colombia
Elisabeth Ramos
Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Chile
Fabio Sepúlveda
UIS, Colombia
Héctor Pinedo
UIS, Colombia
Hernán Neciosup Puican
Pontificia Universidad Católica del Perú, Perú
Hiram López
Virginia Tech, USA
Jaime Carmona Mesa
Universidad de Antioquia, Colombia
Jorge Fiallo Leal
UIS, Colombia
Juanita Pinzón Caicedo
University of Notre Dame, USA
Kevin Esmeral García
Universidad de Caldas, Colombia
Lucas Ferreira
Universidade Estadual de Campinas, Brasil
Michael Dokuchaev
Universidade de São Paulo, Brasil
Michael Rincón Villamizar
UIS, Colombia
Sandra Carolina García
Universidad Nacional, Colombia
Sandra Parada
UIS, Colombia
Sergio Macías
UNAM, México
Solange Roa
UIS, Colombia
Vicente Liern Carrión
Universidad de Valencia, España

Comité organizador

Ronald Paternina Salgado
Director de la Escuela de Matemáticas
Adriana Alexandra Albarracín Mantilla
Coordinadora general
Jhean Eleison Pérez López
Coordinador de Posgrados
Jenny Patricia Acevedo Rincón
Representante del grupo de investigación EDUMAT
Jurgen Alfredo Julio Batalla
Representante del grupo de investigación GIM
Tulia Esther Rivera Flórez
Representante del Área de Estadística
Francisco Eteval da Silva
Universidad Federal do Amazonas (Brasil)
Eric Flores Medrano
Universidad Complutense de Madrid (España)
Daysi Julissa García Cuella
Pontificia Universidad Católica del Perú (Perú)
Francisco Javier Vidal
Universidad Alberto Hurtado (Chile)
Ivonne Sandoval
Universidad Pedagógico Nacional de México, Unidad Ajusco (México)
Josafath Alfredo Otero Jiménez
Universidad EARTH, Limón (Costa Rica)
Eduardo Camps Moreno
Virginia Tech, VA (USA)
Carmen Rosa Giraldo Vergara
Universidad Federal de Minas Gerais (Brasil)
Nancy Beatriz Ross
Instituto Superior Formación Técnica, Pinamar (Argentina)
Editor de memorias
Mateo Rincón Pinzón
UIS, Colombia
Contacto
Universidad Industrial de Santander
Escuela de Matemáticas
Teléfono: +57 (607) 634 4000
Extensiones: 2307 - 2316
Correo: matematicas.simposio@uis.edu.co

Presentación

El XIII Simposio Nororiental de Matemáticas se realizó desde el 1 hasta el 5 de diciembre del año 2025 en la Universidad Industrial de Santander (UIS) en Bucaramanga, departamento de Santander, Colombia.

El Simposio está organizado por la Escuela de Matemáticas de la UIS y se ha convertido en uno de los eventos de matemáticas más importantes de la región y del país, reuniendo una gran cantidad de personas interesadas en la investigación, la difusión, el desarrollo y la educación en matemáticas. Se presentan expertos en diferentes áreas de las matemáticas, con un gran reconocimiento nacional e internacional que hacen del Simposio un evento de alto nivel científico.

Esta XIII edición estuvo enmarcada por el **Homenaje al profesor Bernardo Mayorga** y el lanzamiento de su “Libro de lectura de Cálculo. Una construcción ab initio, rigurosa y minuciosa del sistema de los números reales”; así como por el **Encuentro de egresados**.

Las áreas de interés del evento son las siguientes:

- Álgebra, combinatoria y teoría de números.
- Análisis y ecuaciones diferenciales.
- Análisis funcional, sistemas dinámicos y teoría descriptiva de conjuntos.
- Educación matemática.
- Estadística.
- Topología y geometría.

Los principales objetivos que se buscan alcanzar con la organización y desarrollo del Simposio son:

- Divulgar diferentes trabajos académicos e investigaciones de la comunidad matemática regional, nacional e internacional.
- Contribuir en la consolidación de la comunidad matemática en el ámbito regional, nacional e internacional.
- Integrar a la comunidad académica y profesional –estudiantes, profesores en ejercicio, matemáticos e investigadores en educación matemática– en torno a la problemática de la enseñanza y del aprendizaje de las matemáticas.
- Propiciar espacios para la reflexión y el diálogo entre los profesores de educación básica, media y superior.
- Dar a conocer el desarrollo de ciertas áreas de la matemática y de la enseñanza de la matemática a través de invitados nacionales e internacionales de alta calidad en su formación.
- Motivar a los estudiantes para que sigan formándose en matemáticas y contribuir en el crecimiento vertical de los programas de maestrías y doctorados en matemáticas y educación matemática de la región y del país.

En este documento publicamos las plenarias, semiplenarias, cursillos, ponencias y pósteres presentados en el XIII Simposio Nororiental de Matemáticas.

Índice

Presentación	5
Homenaje al profesor Bernardo Mayorga	13
1. Álgebra, combinatoria y teoría de números	14
Plenarias	15
1.1 Homology and cohomology of Steinberg algebras via crossed products by unital actions of inverse monoids	15
Semiplenarias	18
1.2 Álgebras de grupo para simplificar el cálculo de dimensiones de códigos	18
1.3 Algunos fundamentos teóricos de la identificación de proteínas	21
1.4 Dinámica p -ádica en dimensión superior	24
1.5 El asociaedro y el complejo de conglomerado: un lugar de encuentro entre álgebra, combinatoria y geometría	26
1.6 Grafo <i>zero divisor</i> para R -módulos mediante su primer dual	30
Cursillos	33
1.7 Acciones parciales y simetrías cuánticas: de grupos a categorías monoidales	33
1.8 Introducción al álgebra homológica	35
Ponencias	38
1.9 Análisis p -ádico y dinámica jerárquica en sistemas complejos	38
1.10 Códigos Castillo en el Criptosistema McEliece	40
1.11 Curvas generalizadas de Artin-Schreier y la cota de Hasse-Weil	42
1.12 Geometría diferencial no conmutativa de planos cuánticos	44
1.13 Grafo nilpotente de anillos no conmutativos de tipo polinomial	48
1.14 Operador Pseudo-Diferencial de Bochner-Riesz p -ádico	50
1.15 Paisajes Exponenciales p -ádicos	53
1.16 Permanentes, matrices idempotentes y números multifactoriales	57
1.17 Relación entre las bases de Gröbner Shirshov y las bases PBW	60
1.18 Subfuntores cerrados y la propiedad del lema 3×3	64
1.19 Un vistazo a la categoría de módulos semi-graduados	68
Pósteres	70
1.20 Coloraciones del Cubo: Aplicacando el Lema de Burnside	70
1.21 Cuerpos de Funciones algebraicas y Extensiones de Kummer	72
1.22 Curvas de Artin-Schreier: género y puntos racionales	74
1.23 Dominios de Integridad y Enteros de Eisenstein	76
1.24 Teorema de Maschke: Una mirada a las representaciones de grupos.	78
1.25 Teorema de Riemann-Roch: Algunas aplicaciones en Curvas Algebraicas	80
2. Análisis funcional, sistemas dinámicos y teoría descriptiva de conjuntos	82

Plenarias	83
2.1 Operadores de Toeplitz radiales en espacios de Fock-Segal-Bargmann	83
Semiplenarias	86
2.2 El espectro de Lyapunov para el mapa de fracciones continuas de Schneider	86
2.3 Equilibrium States for Random Zooming Systems	90
Cursillos	94
2.4 Análisis funcional en espacios de funciones analíticas	94
Ponencias	98
2.5 Algunas propiedades de los núcleos definidos positivos	98
2.6 Complejidad de la conjugación topológica en sistemas dinámicos numerables	102
2.7 Filippov's theorem for sweeping processes with outer multivalued perturbations	106
2.8 Propiedades combinatoricas de los ideales de conjuntos	109
2.9 Sistemas dinámicos y ergodicidad sobre el cuerpo de los números p -ádicos $\mathbb{Q}_p$	110
2.10 Some ideals associated to sequences in Banach spaces	112
2.11 Una aproximación al Forcing	114
Pósteres	118
2.12 Fractales y autómatas celulares: Exploración computacional	118
3. Análisis y ecuaciones diferenciales	122
Plenarias	123
3.1 Advances in Riemann problems for pressureless gas dynamics: damping effects and generalized models	123
3.2 Navier-Stokes equations and the sixth millennium problem (an expository talk)	127
Semiplenarias	128
3.3 El método del disparo para ecuaciones de Euler-Bernoulli en modelos de nanovigas	128
3.4 Modelado de un problema de control de temperatura con fluidos	131
3.5 Multiple positive solutions for a Schrödinger p -Laplacian problem	132
3.6 On the solvability for Schrödinger-Boussinesq-type systems	135
Cursillos	138
3.7 Solución de ecuaciones diferenciales mediante métodos de discretización miméticos: uso de la librería MOLE	138
Ponencias	142
3.8 Análisis teórico y numérico de un problema de control óptimo asociado a un sistema de reacción-difusión tipo Schnakenberg	142
3.9 Ciclos Límite Bifurcando de un Toro Isócrono en $\mathbb{R}^3$	145
3.10 Clasificación completa de las simetrías de Lie para una generalización del sistema Drinfeld-Sokolov	149
3.11 Construcción de un sistema de coordenadas ortogonales ovoidales	153

3.12	Control óptimo de un sistema de quimioatracción que modela el crecimiento de células gliales	157
3.13	Ecuación estocástica de Ginzburg-Landau con Laplaciano fraccionario y ruido No-Gaussiano en condiciones tipo Robin	160
3.14	Ecuaciones Diferenciales en Economía. Enfoque de Dinámica de Sistemas	164
3.15	Estimaciones de error para problemas mixtos degenerados	168
3.16	Fully Discrete Degenerate Parabolic Problems: Applications to Transient Eddy Current Models with Source Data	172
3.17	Incorporación del efecto de campo carcinogénico en el modelado de la dinámica del volumen tumoral de cáncer de mama	175
3.18	Modelado matemático de la propagación y control de la roya del café mediante ecuaciones diferenciales y escenarios de intervención	179
3.19	Modelo Matemático de Coinfección VIH-VHB en Población Humana	183
3.20	Modelos doblemente degenerados de taxis de nutrientes: aplicaciones biológicas en la migración de <i>Bacillus subtilis</i> en agares pobres en nutrientes	187
3.21	Resolviendo el misterio de patrones de pigmentación en los pétalos de tulipanes rotos a través de un modelo matemático de ecuaciones en derivadas parciales	189
3.22	Singularidades Degeneradas de Sistemas de Filippov	192
3.23	Small Normalised Solutions for a Schrödinger-Poisson System in Expanding Domains: Multiplicity and Asymptotic Behaviour	196
3.24	Sobre las ecuaciones de 2D-Boussinesq inviscidas con regularidad límite y efectos dispersivos	198
3.25	Una comparación preliminar de métodos numéricos para leyes de conservación escalares	202
Pósteres		206
3.26	Análisis numérico de un sistema de EDP en magnetohidrodinámica	206
3.27	Aproximación de la función Gamma	210
3.28	Estudio numérico de un sistema de EDP describiendo el crecimiento de cáncer prostático	214
3.29	Funciones casi periódicas: teorías y aplicaciones	218
3.30	Modelado numérico del transporte de contaminantes atmosféricos mediante Level Set y análisis de velocidad en entornos urbanos	220
3.31	Ramificación, Bifurcación y Longitud del Sistema Vascular, visto desde las Ecuaciones de Navier-Stokes	223
3.32	Una ecuación semilineal de la viga con condiciones de voladizo usando el cálculo de variaciones	226
4. Educación Matemática		227
Plenarias		228
4.1	Programas efectivos de desarrollo profesional docente en matemática: una revisión sistemática en Latinoamérica	228
4.2	Sistemas lineales para modelar el equilibrio de mercados bajo incertidumbre	230
Semiplenarias		233
4.3	Desarrollo del talento matemático desde el enfoque STEM: una revisión sistemática	233

4.4	Educación matemática e inteligencia artificial: aprender, enseñar e investigar en una nueva era	235
4.5	Equivalencias geométricas: Igualdad entre áreas de figuras bidimensionales	237
4.6	Midiendo macroespacios: experiencias que enriquecen proyectos de educación STEM en primaria	240
Cursillos		242
4.7	Estudio dinámico y analítico de los hiperreales	242
4.8	Explorando el conocimiento especializado del profesorado: Knowledge of Topics (KoT) en la enseñanza de la generalización de patrones en primaria	245
4.9	Mobilizando conhecimentos especializados sobre fração a partir da Gênese Instrumental do artefato Barras de Cuisenaire	248
Ponencias		251
4.10	Alfabetización Financiera de Profesores de Matemáticas en Formación	251
4.11	Análisis de la Demanda Cognitiva de Tareas en DGPd desde la Teoría de las Situaciones Didácticas	254
4.12	¿Cómo enseñamos finanzas en la escuela? Diseño y validación de un formulario sobre prácticas docentes	258
4.13	Creencias de profesores de Santander sobre el uso de situaciones del contexto financiero en clase de Matemática	262
4.14	Del campo al mercado: una experiencia de resolución de problemas matemáticos en estudiantes de segundo grado	265
4.15	Desarrollo Histórico y Epistemológico de la Geometría y la Enseñanza de la Geometría	267
4.16	Dos Estrategias Lúdicas que Impulsan la Innovación Docente en Matemáticas	271
4.17	Educación Financiera en la Formación de Licenciados en Matemáticas: Una Propuesta Curricular	274
4.18	Educación STEM en territorios rurales y urbanos en la provincia de Ubaté como inclusión de equidad y transformación	278
4.19	El algoritmo: ¿entidad platónica o proceso ejecutable?	280
4.20	El concepto de derivada desde una perspectiva histórico-epistemológica para el desarrollo de las competencias matemáticas en estudiantes de educación media	282
4.21	Enseñanza y aprendizaje de la Regresión Lineal Múltiple mediada por Inteligencia Artificial en un ámbito universitario	286
4.22	Estrategia pedagógica mediada por TIC, utilizando herramientas tecnológicas y recursos educativos digitales, para estimular el aprendizaje lógico-matemático de los estudiantes de básica secundaria del colegio Panamericano de Bucaramanga	288
4.23	Explorando la doble naturaleza de los números complejos: Un estudio basado en la Teoría APOE	290
4.24	Geometrías no euclidianas a través de GeoGebra	293
4.25	La geometría deconstruida: Un recurso para el desarrollo del pensamiento espacial en primaria	296
4.26	O conhecimento matemático especializado do professor de matemática evidenciado na resolução de problemas de proporcionalidade	299
4.27	Prácticas Variacionales en el Estudio de la Derivada como Razón de Cambio. Diseño de una Situación de Aprendizaje	303

4.28	Procesos de razonamiento y demostración al desarrollar tareas propiciadas por el Software de Geometría Dinámica.	307
4.29	Secuencia de enseñanza enfocada en la modelación de situaciones covariacionales con tecnología digital	310
4.30	Secuencia de enseñanza sobre propiedades y congruencia de triángulos	314
4.31	Secuencia de problemas auténticos de ahorro y crédito para el desarrollo de competencias financieras mediante la modelación matemática	318
4.32	Tipos de demostración emergentes en una secuencia de enseñanza de la regla de derivación de la función potencia y la función exponencial	321
Pósteres		325
4.33	Análisis probabilístico de la Ruina del Jugador	325
4.34	Aprender con el Mundo en las Manos: Acompañamiento Educativo en Geometría Euclidiana	326
4.35	Arte y matemáticas en la escuela primaria: Estrategias didácticas desde la experiencia de “Pinceladas Numéricas”	328
4.36	Concepciones y creencias docentes de Educación Básica Primaria sobre la enseñanza de la orientación espacial	330
4.37	Conversión Fotovoltaica Aplicada: alimentación de un Generador de Ondas Estacionarias	333
4.38	Diseño didáctico sobre razones trigonométricas que involucra historia y atiende a la diversidad	337
4.39	Educación Económica y Financiera desde la Educación Matemática: Consolidando una línea de Investigación	339
4.40	El silogismo de la inclusión: la demostración para el axioma de la diversidad	342
4.41	Enseñanza del álgebra avanzada: métodos y estructuras para la introducción de grupos .	344
4.42	Entre el saber matemático y el saber enseñar: El conocimiento especializado en Cálculo Diferencial	346
4.43	Estrategias inclusivas para la enseñanza de matemáticas a estudiantes con discapacidad visual	347
4.44	Estudio Comparativo del Desarrollo de Competencias Matemáticas en la Transición de la Educación Media a la Educación Superior: Estudio de Caso UMNG	349
4.45	Formación docente inicial y diversidad en la enseñanza de las matemáticas	351
4.46	La enseñanza de las matemáticas en la era de las emociones, resiliencia, modelaje docente y formación integral	352
4.47	Más allá de la respuesta correcta: La demanda cognitiva de tareas de razonamiento matemático en ‘Evaluar para Avanzar’	355
4.48	Medidas de Tendencia Central: Una IAP en Educación Básica Primaria	358
4.49	Modelar para Comprender: Una Experiencia de Aula sobre la Ley de Enfriamiento de Newton con Apoyo de TIC	360
4.50	Música, cuentos y juegos con IA en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas . .	363
4.51	Newton X: Innovación en la medición dinámica en tiempo real con aplicaciones matemáticas	366
4.52	Tareas Matemáticas Escolares para la enseñanza de la proporcionalidad directa en Educación Básica Primaria	368
4.53	Tareas que promueven el desarrollo de pensamiento algebraico temprano a través de los sistemas de representación	371

4.54	Velocontrol: innovacion universitaria para un acceso vehicular seguro y eficiente	373
5.	Estadística	376
	Cursillos	377
5.1	Análisis de la volatilidad en series de tiempo. Modelos ARCH y GARCH	377
	Ponencias	381
5.2	Análisis de los artículos publicados en la revista Economía de la Universidad de Los Andes, Mérida, Venezuela	381
5.3	Aplicación de la metodología KDD para clasificar la calidad del aire por ozono troposférico en Bucaramanga (2019–2023)	385
5.4	El hechizo de lo aleatorio - de lo simple a lo sublime con Monte Carlo, Cadenas y MCMC	389
5.5	Estimación RLAV, estudio comparativo en datos no normales	393
5.6	Forecasting Multi-Modal Crime Events using Neural Network Models	396
5.7	Impacto de la presión arterial sistólica acumulada y los serios eventos adversos en la eficacia del tratamiento intensivo de la presión arterial: un ensayo clínico aleatorizado .	400
5.8	La subasta futbolera: Adoptando el enfoque EBP en una clase de Estadística básica .	404
5.9	Medición del impacto económico del acuerdo de paz en Colombia mediante el Método de Control Sintético	408
5.10	Pronóstico del Índice Bovespa mediante métodos estadísticos y de Machine Learning .	412
	Pósteres	414
5.11	Análisis de Correspondencia entre Formación Superior y Demanda Laboral en Colombia: Datos SINIDEL 2018	414
5.12	Aplicación de la Metodología Vester para el Análisis Territorial en el Proyecto UDES en las Regiones: “Transformación educativa para un futuro sostenible”	418
5.13	Aplicación de métodos estadísticos multivariantes en el análisis del desempeño docente y la intención de deserción en estudiantes de Medicina	421
5.14	De la intuición a la evidencia: el modelo Bayesiano Poisson-Gamma explicado con goles de fútbol	425
5.15	Del temor inicial a la evidencia: modelando contagios con el enfoque Bayesiano Beta-Binomial	429
5.16	Destilación del conocimiento para tareas de regresión en series temporales epidemiológicas	432
5.17	Estudio Geoestadístico del servicio de conductor elegido en GO ASISTENCIA	436
5.18	Factores predictivos de los jóvenes que ni estudian ni trabajan (NINI) en la región de Puno, utilizando modelos Logit y Probit	439
5.19	Fundamentos Algorítmicos en el Reconocimiento de Biodiversidad: Una Perspectiva desde la Matemática Computacional	443
5.20	Habitantes de calle en Colombia, un enfoque estadístico	446
5.21	Identificación de Patrones y Zonas Críticas de Accidentes de Tránsito en Bucaramanga (2012–2023)	449
5.22	Modelos de Regresión para Datos de Conteo con Exceso de Ceros	453

5.23 Rompiendo el Molde: Identificando los Diversos Perfiles de Éxito Académico en Colombia con MCA y Machine Learning	457
5.24 Un estudio estadístico de colombianos detenidos en el exterior	461
6. Topología y geometría diferencial	464
Plenarias	465
6.1 Clasificación de hipersuperficies usando el operador de Cheng-Yau.	465
6.2 Propiedades de la Función $\wp$	467
Semiplenarias	468
6.3 El Teorema de descomposición de Hodge en variedades de Kähler	468
6.4 La cohomología de Khovanov como invariante topológico de nudos	471
6.5 Sucesiones tipo Fibonacci en grupos finitos	475
Cursillos	478
6.6 Introducción a los Espacios de Berkovich	478
6.7 Cursillo: Museo de Matemáticas en GeoGebra	482
Ponencias	485
6.8 Acciones del grupo universal de Hausdorff sobre espacios T_1	485
6.9 Algunas aplicaciones de homología simplicial a problemas clásicos de la geometría	488
6.10 Análisis de series temporales: un enfoque topológico con aplicaciones a datos medioambientales	492
6.11 Complejidad topológica de las relaciones de Green	495
6.12 Descomposición de sucesiones de Palais Smale	498
6.13 El teorema de Gauss-Bonnet	500
6.14 Espacios CTS y la propiedad fuerte de Choquet	502
6.15 Espectros en geometría Riemanniana	505
6.16 Explorando el aquí y el ahora: la geometría del espacio-tiempo	506
6.17 Formulando la refracción en óptica geométrica por medio de la geometría de contacto	509
6.18 Ideales de subconjuntos densos en ninguna parte sobre espacios de Dow	512
6.19 ¿Qué puede decirnos la geometría algebraica sobre las reacciones químicas?	515
6.20 Representación de ideales analíticos	517
6.21 Triangulación de Farey y 3-variedades de fibran sobre el círculo por toros ponchados	521
Pósteres	525
6.22 Comportamiento de π en una cuadrícula	525
6.23 Del cálculo variacional a la física matemática, el péndulo esférico y la braquistócrona terrestre	528
6.24 El polinomio de Alexander-Conway para los nudos de pretzel $(1, 1, n)$	530
6.25 Espacios de Fréchet-Urysohn y propiedades relacionadas	532
6.26 Grupo de trenzas: Un enredo matemático	535

Homenaje al profesor Bernardo Mayorga

En diciembre de 2025, durante la realización del XIII Simposio Nororiental de Matemáticas, la comunidad académica de la Escuela de Matemáticas de la Universidad Industrial de Santander (UIS), junto con egresados de los programas de Licenciatura en Matemáticas, Matemáticas, Maestría en Matemáticas y Matemática Aplicada, profesores invitados participantes del evento, se reunieron para rendir homenaje a la vida y obra del profesor **Bernardo Mayorga**, figura fundamental en la historia de la Escuela de Matemáticas de la UIS.

Nacido en Bogotá en 1944, el profesor Mayorga dedicó su vida al estudio y la enseñanza de las matemáticas. Formado en la Universidad de los Pueblos de Moscú, donde obtuvo su título de Magister en Matemáticas, y posteriormente doctorado en la Universidad Estatal de Lvov, su trayectoria académica refleja un compromiso inquebrantable con el rigor científico y la búsqueda del conocimiento.



Profesor Bernardo Mayorga.

Desde 1975 hasta su jubilación en 2009, ejerció como profesor de tiempo completo en la Universidad Industrial de Santander, alcanzando la categoría de profesor titular. Durante más de tres décadas, dirigió con dedicación 25 trabajos de grado de Licenciatura en Matemáticas, 2 trabajos de grado en la Especialización en Enseñanza de las Matemáticas, 2 tesis de maestría, y una tesis en Ingeniería de Sistemas, dejando una huella profunda en generaciones de estudiantes. Su producción académica incluye artículos de investigación y dos libros, a saber, *“Somos ciudadanos del Cosmos”* y su célebre *“Libro de lectura de Cálculo. Una construcción ab initio, rigurosa y minuciosa del sistema de los números reales”* convertido en referencia muy importante para la formación en Matemáticas, Licenciatura en Matemáticas, e por qué no, en Ingeniería. Así mismo, colaboró como editor de la Revista Integración, por varios años, posicionando la revista como un referente nacional de publicaciones en matemáticas.

Más allá de su labor docente e investigativa, el profesor Mayorga se distinguió por su sabiduría, su amor por las letras y su curiosidad científica, cualidades que marcaron su legado y lo convirtieron en un maestro ejemplar. Es así como desde la organización de la XIII versión del Simposio Nororiental de Matemáticas, se le brinda este homenaje que busca no solo recordar su trayectoria, sino también celebrar la vida de un hombre que dedicó su existencia a cultivar el pensamiento matemático y a inspirar a quienes tuvieron el privilegio de aprender de él. La Escuela de matemáticas de la Universidad Industrial de Santander deja aquí consignado un testimonio de gratitud y reconocimiento hacia un profesor cuya influencia seguirá viva en la comunidad académica y científica.

ÁLGEBRA, COMBINATORIA Y TEORÍA DE NÚMEROS



Grupo ALCOM

El grupo ALCOM de la Escuela de Matemáticas de UIS desarrolla investigaciones en álgebra y combinatoria. Brinda orientación de trabajos de grado en las áreas de especialidad y líneas de investigación del grupo; realiza un seminario semanalmente para dar a conocer los avances en los temas de investigación; los estudiantes participan como colaboradores en los proyectos desarrollados por los profesores investigadores y avalados por la Institución. Como resultado, se tienen publicaciones, dirección de trabajos de grado y posgrado, participación en eventos nacionales e internacionales relacionados con el área de investigación del grupo que se evidencian en el grupLAC de Minciencias.

1.1 Homology and cohomology of Steinberg algebras via crossed products by unital actions of inverse monoids

M. Dokuchaev¹, M. Khrypchenko², J.J. Simón³

Resumen

We construct a homology (respectively, cohomology) spectral sequence which converges to the Hochschild homology (respectively, cohomology) of the crossed product by a unital action of an inverse semigroup on an algebra with values in a bimodule. We apply the spectral sequences to unital Steinberg algebras over a field, and in the homological case the spectral sequence collapses on the p -axis, resulting in an isomorphism of homology groups.

Keywords & key phrases: Homology; inverse semigroup; Steinberg algebra.

1. Introducción

Spectral sequences, invented originally by Leray [6, 7], have been actively used to “approximate” the (co)homology of an object (e.g., a group, an algebra, a Hopf algebra, a Lie algebra, etc.) by some related sequence of cohomologies. Given a unital action θ of an inverse monoid S on an algebra A over a field K we produce (co)homology spectral sequences which converge to the Hochschild (co)homology of the crossed product $A \rtimes_{\theta} S$ with values in a bimodule over $A \rtimes_{\theta} S$. The spectral sequences involve a new kind of (co)homology of the inverse monoid S , which is based on KS -modules. The spectral sequences take especially nice form, when $(A \rtimes_{\theta} S)^e$ is flat as a left (homology case) or right (cohomology case) A^e -module, involving also the Hochschild (co)homology of A . Same nice spectral sequences are also obtained if K is a commutative ring, over which A is projective, and S is E -unitary. We apply our results to the Steinberg algebra $A_K(\mathcal{G})$ over a field K of an ample groupoid $\mathcal{G}$, whose unit space $\mathcal{G}^{(0)}$ is compact. In the homology case our spectral sequence collapses on the p -axis, resulting in an isomorphism between the Hochschild homology of $A_K(\mathcal{G})$ with values in an $A_K(\mathcal{G})$ -bimodule M and the homology of the inverse semigroup of the compact open bisections of $\mathcal{G}$ with values in the invariant submodule of M .

2. Los resultados

Given a compatible action θ of an inverse monoid S on a unital algebra A we construct a partial action $\tilde{\theta}$ of the maximum group image $\mathcal{G}(S)$ of S on A . We prove that if S is E -unitary, then the skew product algebras $A \rtimes_{\theta} S$ and $A \rtimes_{\tilde{\theta}} \mathcal{G}(S)$ are isomorphic.

Given a left module V over the semigroup algebra KS , we define homology and cohomology of S with values in V as

$$H_n(S, V) = \text{Tor}_n^{KS}(KE(S), V)$$

¹Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, Brasil. Correo: dokucha@ime.usp.br

²Departamento de Matemática, Universidade Federal de Santa Catarina, Brasil. Correo: nskhrypchenko@gmail.com

³Departamento de Matemáticas, Universidad de Murcia, España. Correo: jsimon@um.es

and

$$H^n(S, V) = \text{Ext}_{KS}^n(KE(S), V),$$

respectively, where $KE(S)$ is the commutative subalgebra of KS generated by the subsemigroup of idempotents $E(S)$ of S , endowed with a natural left KS -module structure. These definitions are inspired by the definition of partial group cohomology introduced in [1] and an analogous definition of partial group homology from [2]. We produce a projective resolution for the KS -module $KE(S)$. Moreover, given a unital action θ of an E -unitary monoid S on an algebra A over a field K and an $A \rtimes_\theta S$ -bimodule M , we prove that there exists a first quadrant homology spectral sequence of the form

$$E_{p,q}^2 = H_p(S, H_q(A, M)) \Rightarrow H_{p+q}(A \rtimes_\theta S, M). \quad (1)$$

Analogously, there exists a third quadrant cohomology spectral sequence

$$E_2^{p,q} = H^p(S, H^q(A, M)) \Rightarrow H^{p+q}(A \rtimes_\theta S, M).$$

Similar spectral sequences were obtained earlier for unital partial group actions in [1] (cohomology), for partial Hopf actions in [4] (homology and cohomology) and for unital twisted partial group actions in [5] (homology and cohomology).

We apply our results to Steinberg algebras. Introduced independently by Steinberg in [9], and by Clark, Farthing, Sims and Tomforde in [3], these algebras draw much attention of algebraists and analysts. Being an algebraic counterpart of Renault's [8] groupoid C^* -algebras, they include important classes of algebras, such as group algebras, Leavitt path algebras and the Kumjian-Pask algebras, ultragraph Leavitt path algebras and the crossed products by topological partial actions of groups on totally disconnected locally compact Hausdorff spaces.

Let $A_K(\mathcal{G})$ be the Steinberg algebra over a field K of an ample groupoid $\mathcal{G}$, whose unit space $\mathcal{G}^{(0)}$ is compact. It is well-known that $A_K(\mathcal{G})$ is the crossed product by a unital action of the inverse monoid $\mathcal{S}^a(\mathcal{G})$ of the compact open bisections of $\mathcal{G}$ on the algebra $\mathcal{L}(\mathcal{G}^{(0)})$ of the locally constant functions $\mathcal{G}^{(0)} \rightarrow K$. We show that in this case our homology spectral sequence (1) is applicable and, moreover, it collapses on the p -axis, resulting in an isomorphism

$$H_n(A_K(\mathcal{G}), M) \cong H_n(\mathcal{S}^a(\mathcal{G}), M/[\mathcal{L}(\mathcal{G}^{(0)}), M]),$$

where M is an $A_K(\mathcal{G})$ -bimodule. Our cohomology result, with $A_K(\mathcal{G})$ and M as above, is the third quadrant spectral sequence

$$E_2^{p,q} = H^p(\mathcal{S}^a(\mathcal{G}), H^q(\mathcal{L}(\mathcal{G}^{(0)}), M)) \Rightarrow H^{p+q}(A_K(\mathcal{G}), M).$$

Referencias

- [1] ALVARES, E. R., ALVES, M. M., REDONDO, M. J., *Cohomology of partial smash products*. J. Algebra **482** (2017):204–223.
- [2] ALVES, M. M., DOKUCHAEV, M., KOCHLOUKOVA, D.H., *Homology and cohomology via the partial group algebra*. Quarterly J. Math. **75** (2024):613–661.

- [3] CLARK, L. O., FARTHING, C., SIMS, A., TOMFORDE, M., *A groupoid generalisation of Leavitt path algebras*. Semigroup Forum. **89** (2014):501–517.
- [4] DOKUCHAEV, M., JEREZ, E., *(Co)Homology of Partial Smash Products*. J. Algebra **652** (2024):113–157.
- [5] DOKUCHAEV, M., JEREZ, E., *The twisted partial group algebra and (co)homology of partial crossed products*. Bull. Braz. Math. Soc. (N.S.) **55** (2024): Paper No. 33, 48 pp.
- [6] LERAY, J., *L’anneau d’homologie d’une représentation*. C. R. Acad. Sci., Paris. **222** (1946):1366–1368.
- [7] LERAY, J., *Structure de l’anneau d’homologie d’une représentation*. C. R. Acad. Sci., Paris. **222** (1946):1419–1422.
- [8] RENAULT, J., *A Groupoid Approach to C^* -Algebras*. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 793. Springer-Verlag, Berlin, 1980, 164 pp.
- [9] STEINBERG, B., *A groupoid approach to discrete inverse semigroup algebras*. Adv. Math. **223** (2010):689–727.

1.2 Álgebras de grupo para simplificar el cálculo de dimensiones de códigos

Elías Javier García Claro¹

Resumen

Los códigos de grupo son un tipo de códigos lineales que se obtienen como ideales de álgebras de grupo. En esta ponencia introduciremos un nuevo tipo de álgebra de grupo donde la dimensión de sus ideales indescomponibles puede calcularse de manera especialmente sencilla. Daremos condiciones necesarias y suficientes para que un álgebra de grupo sobre un campo finito sea de este tipo. Se presentará una aplicación de estas álgebras al cálculo de la dimensión y una cota inferior para la distancia mínima de códigos de grupo.

Palabras & frases claves: Álgebra de grupo; código de grupo; álgebras de tipo de representación finita.

1. Introducción

Sea $\mathbb{F}_q$ el cuerpo finito con q elementos y $p = \text{char}(\mathbb{F}_q)$. Determinar la dimensión y la distancia mínima de un código lineal (o al menos relaciones como cotas o congruencias para estos) es relevante para determinar su eficacia en la detección y corrección de errores en la transmisión de información digital. Para ello, es común estudiar códigos lineales con una estructura algebraica más rica (en lugar de solo espacios vectoriales), como los que son ideales de un álgebra de dimensión finita. El álgebra de grupo $\mathbb{F}_q G$ de un grupo finito G sobre el cuerpo $\mathbb{F}_q$ es el espacio vectorial generado por G con coeficientes en $\mathbb{F}_q$, es decir, $\mathbb{F}_q G := \left\{ \sum_{g \in G} \lambda_g g : \lambda_g \in \mathbb{F}_q \right\}$ [9]. Con la suma de vectores habitual y la multiplicación dada extendiendo la operación de G , $\mathbb{F}_q G$ es una $\mathbb{F}_q$ -álgebra con base G . Un código de grupo C en $\mathbb{F}_q G$ (o código G) es un ideal izquierdo (derecho) de $\mathbb{F}_q G$, también llamado código abeliano cuando G es un grupo abeliano. Para $v \in \mathbb{F}_q G$, su peso de Hamming $wt(v)$ es el número de entradas no nulas en el vector de coordenadas de v con respecto a G . La distancia de Hamming en $\mathbb{F}_q G$ se define como $d(v, w) = wt(v - w)$ para todo v y w . Si C es un código de grupo, su *distancia mínima* (o *peso mínimo*) se define como $d(C) := \min\{d(v, w) : v, w \in C \wedge v \neq w\}$. En [1], S.D. Berman introdujo la clase de códigos abelianos, demostró que los códigos Reed-Muller pertenecen a este tipo y proporcionó fórmulas explícitas para la distancia mínima de los códigos obtenidos como potencias del radical de Jacobson de un álgebra de grupo abeliana no-semisimple. Buscando determinar relaciones para los parámetros dimensión y distancia mínima de un código de grupo, en [5] demostramos varias relaciones para la dimensión de los ideales principales en álgebras de grupos mediante el análisis de polinomios minimales de representaciones regulares. También proporcionamos una manera de calcular los idempotentes primitivos del álgebra de grupo semisimple de un grupo abeliano sin utilizar la teoría de caracteres (el método habitual), lo cual nos permitió calcular la dimensión de cualquier código abeliano en un álgebra de grupo conmutativa semisimple. Algunos trabajos recientes donde se calcularon relaciones como cotas y fórmulas para los parámetros de códigos de grupo generados por idempotentes son los siguientes: en [8], [3], [4],

¹Universidad del Norte. Correo: eliasjaviargarcia@gmail.com

[7] y [10] se calculan, respectivamente, los idempotentes centrales primitivos² de álgebras de grupos metacíclicos, grupos metacíclicos escindidos, algunos grupos simétricos y diédricos, y el producto semidirecto de grupos abelianos; y se calculan relaciones para sus parámetros. Siguiendo el objetivo de obtener cotas o fórmulas para los parámetros de códigos de grupo, el autor introdujo la definición de código de grupo de *dimensión fácilmente calculable* (o ECD, por sus siglas en Inglés). $C \subseteq \mathbb{F}_q G$ es un código de grupo ECD si es generado por un idempotente y $\dim_{\mathbb{F}_q}(C) \leq p$ (ver [5, p. 13]). La dimensión de un código de grupo ECD se puede calcular de la siguiente manera: si $C = \mathbb{F}_q G e$ donde e es un idempotente en $\mathbb{F}_q G$, $\dim_{\mathbb{F}_q}(C) \leq p$, $\lambda_1(e)$ denota el coeficiente de e en 1, y r es el menor entero no negativo en la clase $|G|\lambda_1(e) \in \mathbb{F}_p$ (esta es una clase módulo p por [5, Lema 3.1]), por [5, Teorema 3.1, parte 3],

$$\dim_{\mathbb{F}_q}(C) = \begin{cases} r & \text{if } r \neq 0 \\ p & \text{if } r = 0 \end{cases}.$$

Un *álgebra de grupo de dimensión indescomponible fácilmente calculable* (ECID, por sus siglas en Inglés [6]) es aquella donde todos los códigos de grupo generados por idempotentes primitivos son ECD.

2. Álgebras de grupo ECID y su aplicación al cálculo de dimensiones de códigos de grupo

En esta ponencia se darán distintas clasificaciones de álgebras de grupo ECID. Se usarán estas para dar condiciones aritméticas sencillas que permitan determinar si un álgebra $\mathbb{F}_q G$ es ECID, en algunos casos, sin necesidad de conocer la estructura del álgebra (su descomposición de Wedderburn-Artin, cuando esta sea semisimple). Se presentarán ejemplos de familias de álgebras de grupo ECID semisimples y no-semisimples para los grupos de Mathieu M_{12} y el grupo alternante A_4 . Algunas de estas condiciones se aplicarán para calcular la dimensión de códigos de grupo en estas álgebras y obtener cotas inferiores para sus distancias mínimas de Hamming.

Trataremos el caso en que $\mathbf{F}G$ es semisimple, separando los casos en que el grupo subyacente G es abeliano y no-abeliano.

Teorema 1. [6, Theorem 4.1, 2024] Si G es abeliano con $p \nmid |G|$ y $a \in G$ es tal que $o(a) = \exp(G)$ y $t_g := \min\{b \in \mathbb{Z}_{>0} : g^{q^b} = g\}$ para todo $g \in G$, entonces

$$t_a = \max\{\dim_{\mathbf{F}}(I) : I \text{ is a minimal ideal of } \mathbf{F}G\}.$$

Más aún, $\mathbf{F}G$ es un álgebra de grupo ECD si y solo si $t_a \leq p$.

Sea H un grupo no-abeliano con $p \nmid |H|$, tal que $\mathbf{F}H$ tiene **descomposición de Wedderburn-Artin**:

$$\mathbf{F}H \cong \left(\oplus_{i=1}^r F_i \right) \oplus \left(\oplus_{j=1}^s M_{n_j}(F_j) \right)$$

Teorema 2. [6, Theorem 4.6, 2024] Sea $\widehat{H'} := \frac{1}{|H'|} (\sum_{h \in H'} h)$ donde H' es el subgrupo derivado de H . Sea $G := H/H'$ y $a \in G$ tal que $o(a) = \exp(G)$. Entonces $\mathbf{F}H$ es un álgebra de grupo minimal ECD si y solo si $t_a \leq p$ y $\max\{n_j \cdot [F_j : \mathbf{F}]\}_{j=1}^s \leq p$.

²Idempotentes del centro del álgebra de grupos que no pueden escribirse como suma de dos idempotentes ortogonales del centro.

Estos resultados permiten introducir condiciones aritméticas necesarias para que un álgebra de grupo sea ECID. Dichas condiciones (contrario a la caracterización del Teorema 2) no dependen del conocimiento previo de la descomposición de Wedderburn-Artin. Aplicaremos estas condiciones para determinar exactamente en que casos el álgebra de grupo del grupo de Mathieu M_{12} es ECID.

Si H un grupo finito y $p \mid |H|$, mostraremos que las álgebras de grupo ECID son casos especiales de álgebras de tipo de representación finita donde el p -subgrupo de Sylow del grupo subyacente es el grupo cíclico de orden p , pero que esta propiedad no es suficiente para que un álgebra de grupo sea ECID. Veremos que $\mathbf{F}H$ es un álgebra de grupo ECID si y solo si todo idempotente primitivo en $\mathbf{F}H$ genera un ideal de dimensión p , y aplicaremos este resultado para mostrar que el álgebra de grupo no-semisimple $\mathbb{F}_3 A_4$ es ECID.

Finalmente se presentarán unas aplicaciones al cálculo de dimensiones de códigos de grupo en estas álgebras. Lo cual permitirá presentar cotas inferiores para la distancia mínima de estos, usando el siguiente resultado de Borello, Willems, y Zini:

Teorema 3. [2, Corollary 2.6, 2022] Sea H un grupo finito y $C \subseteq \mathbf{F}H$ un código de grupo, entonces

$$\frac{|H|}{\dim_{\mathbf{F}}(C)} \leq d(C)$$

Referencias

- [1] S. D. BERMAN, *On the theory of group codes*. Cybernetics. **3**(1) (1969):25–31.
- [2] M. BORELLO, W. WILLEMS, G. ZINI, *On ideals in group algebras: An uncertainty principle and the Schur product*. Forum Mathematicum. **34**(5) 2022:1345–1354.
- [3] S. CHAHAL, S. MAHESHWARY, *Central and non-central metacyclic codes*, Finite Fields Appl. **106** (2025):102615.
- [4] Y. GAO, Y. WEI, *Group codes over symmetric groups*, AIMS Math. **8**(9) (2023):19842-19856.
- [5] E. J. GARCÍA-CLARO, H. TAPIA-RECILLAS, *On the dimension of ideals in group algebras, and group codes*. J. Algebra Its Appl. **21**(2) (2022):2250024.
- [6] E. J. GARCÍA-CLARO, *On easily computable indecomposable dimension group algebras, and group codes*. arXiv:2404.05775v1 (2024).
- [7] S. GUPTA, P. RANI, *Codes defined over dihedral groups of order $2p^r$* . Rend. Circ. Mat. Palermo, II. Ser **72** (2023):2349–2361.
- [8] I. GRADEVA, Y. EPITROPOV, *Minimal central orthogonal idempotents of semisimple group algebras of metacyclic group*. Houston J. Math. **45**(4) (2019):965–977.
- [9] C. POLCINO, S. K. SEHGAL, *An Introduction to Group Rings*, Kluwer academic publishers, 2002.
- [10] K. V. VEDENEV, V. M. DEUNDYAK, *The structure of finite group algebra of a semidirect product of abelian groups and its applications*. Chebyshevskii Sb. **20**(3) (2019):107–123.

1.3 Algunos fundamentos teóricos de la identificación de proteínas

Diana Haidive Bueno-Carreño¹

Resumen

La conexión entre los procesos de síntesis de proteínas y los sistemas de transmisión digital ha llamado la atención de varios investigadores en los últimos años. En esta dirección, desde la Teoría de Códigos se ha trabajado para identificar secuencias biológicas como palabras de códigos correctores de errores. Particularmente, en el artículo *Construction of Cyclic Codes over $\mathbb{Z}_{20}$ for Identifying Proteins* [1], se diseñaron tres algoritmos para identificar secuencias biológicas (de longitud impar) de aminoácidos como palabras clave de códigos cíclicos. En esta charla, presentaremos algunos aspectos del trasfondo matemático de los algoritmos a través de los cuales hemos podido detectar posibles mejoras para algunos pasos de los algoritmos mencionados.

Palabras & frases claves: Códigos cíclicos, extensión de anillos, identificación de proteínas.

1. Introducción

En la Teoría de Códigos se diseñan códigos que poseen estructuras algebraicas para codificar los mensajes de cierta manera que permita al receptor detectar, y en algunos casos corregir, alteraciones que pueden aparecer durante la transmisión con respecto al mensaje original.

Algo similar ocurre en los procesos de traducción y transcripción del ADN. Cuando la información genética del ADN se transforma para sintetizar proteínas hay una transmisión de información de ARN a proteínas; a esto se le llama *dogma central de la biología molecular*. Varias investigaciones han hecho avances importantes para demostrar que existe en él un código corrector de errores, pues las proteínas pueden sufrir alteraciones al momento de su síntesis, pero siguen cumpliendo la misma función.

En el trabajo “Construction of Cyclic Codes over $\mathbb{Z}_{20}$ for Identifying Proteins” [1] se presentan tres algoritmos que permiten identificar secuencias biológicas como palabras de un código cíclico para así relacionar propiedades biológicas con propiedades de códigos cíclicos. En este trabajo se presenta la construcción de la fundamentación matemática de los algoritmos 1 y 3 que no se encuentra de manera explícita en dicha publicación.

2. Resultados

2.1. Algoritmo 1: Factorización de $x^n - 1$

En la siguiente figura se presenta el Algoritmo 1 en [1].

Este algoritmo tiene como objetivo factorizar $x^n - 1$ sobre $\mathbb{F}_p$ y para ello requiere una base de datos con polinomios irreducibles sobre $\mathbb{F}_p$ de varios grados y el valor de n . Cabe aclarar que, en el caso

¹Pontificia Universidad Javeriana, Cali. Correo: dhbueno@javerianacali.edu.co

Algorithm 1: Factorization of $x^n - 1$ over $\mathbb{F}_p$

On input: Data base, $p(x)$, n $i \geq 0\}$, where $cl_p(i, n) := \{i \cdot p^j \pmod{n} : j \geq 0\}$.
 1: Find l and r such that $l \cdot n = p^r - 1$. 6: **For** Every cyclotomic coset $cl_p(i, n)$ in CL **do**
 2: Get the primitive polynomial $p(x)$ of degree r form the data base. 7: Compute the minimal polynomial:
 $f_i(x) = \prod_{j \in cl_p(i, n)} (x - \beta^j)$.
 3: Compute $\beta = \alpha^l$. Then, $f_i(x)$ is a minimal polynomial over $\mathbb{F}_q$ that satisfies $f_i(x) | x^n - 1$.
 4: Construct the multiplicative subgroup $\mathbf{H}_n$ of order n $\mathbf{H}_n = \langle \beta \rangle \pmod{p(\alpha)}$ 8: **End for**
 5: Find the cyclotomic cosets: $CL = \{cl_p(i, n) : i \geq 0\}$ 9: **Return** $CL, F_n = \{f_i(x) : i \geq 0\}$.

Algorithm 3: Calculate $g(x)$

On input: $F_n, CL, s(x)$ and n . red to reach a minimal distance d .
 1: Find the minimal polynomials that divide $s(x)$: 4: **If** d is the biggest estimation of $d \geq 3$ **then**
 $P = \{f_i(x) \in F_n : f_i(x) | s(x), i \geq 0\}$ 5: Save F_{r_n} and d .
 2: **For** $\{j \in \mathbb{N} : n > j > 0, \gcd(j, n) = 1\}$ 6: $g(x) = \prod_{f(x) \in F_{r_n}} f(x)$
 3: Apply BCH criterion: 7: **End if**
 $(d, F_{r_n}) = BCH(P, CL, j)$, where F_{r_n} is the smallest set of minimal polynomials of P requi- 8: **End for**
9: **Return:** $F_{r_n}, F_n, g(x), d$

de $\mathbb{Z}_4$, primero se ejecuta el algoritmo 1 para factorizar $x^n - 1$ sobre $\mathbb{Z}_2 \cong \mathbb{F}_2$ y luego se aplica el método de Graeffe para obtener la factorización sobre $\mathbb{Z}_4$ como en [2].

El siguiente lema da paso a la Proposición BDF, un nuevo resultado que se plantea a modo de propuesta de mejora del Algoritmo 1:

Lema 1 (2, Lemma 4.4.7). *Sea $f(x) \in \mathbb{F}_q[x]$. Si $f(x) = f_0 + f_1x + \dots + f_ax^a$, definimos el polinomio recíproco de f como $f^*(x) = x^af(x^{-1}) = f_a + f_{a-1}x + \dots + f_1x^{a-1} + f_0x^a$.*

- (i) *Si $\beta_1, \dots, \beta_r$ son las raíces no nulas de $f(x)$ en alguna extensión de $\mathbb{F}_q$, entonces $\beta_1^{-1}, \dots, \beta_r^{-1}$ son las raíces no nulas de $f^*(x)$ en dicha extensión.*
- (ii) *Si $f(x)$ es irreducible sobre $\mathbb{F}_q$, también lo es $f^*(x)$.*
- (iii) *Si $f(x)$ es un polinomio primitivo, también lo es $f^*(x)$.*

Proposición 2 (Proposición BDF). *El número de polinomios minimales que se deben calcular en el paso 7 del Algoritmo 1 está en el intervalo $[\gamma/2, \gamma] \cap \mathbb{Z}$, donde γ es el número de clases q -ciclotómicas módulo n .*

2.2. Algoritmo 3: Identificación de proteínas como palabras de códigos BCH

El Algoritmo 3 calcula el polinomio generador $g(x)$ del código sobre $\mathbb{F}_q$ y la cota BCH de dicho código. Pero además, el Algoritmo 3 tiene en cuenta otras tres consideraciones:

En primer lugar, tiene sentido hablar de cota BCH para un código sobre $\mathbb{Z}_4$ por el Thm 4 en [3], que extiende la definición para abarcar códigos cíclicos sobre anillos de la forma $\mathbb{Z}_{p^k}$. Para evitar

complicaciones diremos cota BCH aun al referirnos a código sobre anillos.

En segundo lugar, el Algoritmo 3 construye el polinomio generador $g(x)$ tomando solo algunos o todos los polinomios que dividen a $s(x)$, es decir, aquellos que pertenecen al conjunto P construido en el paso 1, para garantizar que $s(x)$ pertenezca al código.

Y en tercer lugar, el Algoritmo 3 calcula la mejor posible cota BCH, subsanando la elección arbitraria del polinomio primitivo en el Algoritmo 1. Esta elección no tiene ningún efecto sobre el polinomio generador $g(x)$ (ni sobre el código generado por $g(x)$), pero sí sobre la cota BCH.

La siguiente proposición es una construcción producto del desarrollo del trabajo y se presenta junto a una demostración que en este contexto surgió naturalmente.

Proposición 3. $\mathfrak{M}_\alpha = \mathfrak{M}_\beta$, donde $\mathfrak{M}_\alpha$ denota el conjunto de polinomios minimales de la factorización de $x^n - 1$ sobre $\mathbb{F}_q$ considerando el elemento primitivo α .

La proposición anterior muestra que siempre se obtiene el mismo grupo de polinomios minimales sin importar el elemento primitivo que se elija, y que la clase q -ciclotómica a la que está asociado un polinomio minimal depende del elemento primitivo con el que se construye el grupo $\mathbf{H}_n$. De hecho, el efecto de considerar un elemento primitivo diferente β , donde $\beta^j = \alpha$, es una configuración donde el polinomio minimal f_i^α está asociado a la clase q -ciclotómica de ji . Precisamente por este detalle, la función en el Algoritmo 3 calcula cotas BCH para todas las posibles configuraciones de polinomios minimales y clases q -ciclotómicas, garantizando que se encuentre la mejor cota BCH.

Referencias

- [1] GALÍNDEZ, V., DUARTE, M. E., *Construction of Cyclic Codes over $\mathbb{Z}_{20}$ for Identifying Proteins*. En: *Applied Computer Sciences in Engineering*. WEA 2019. Communications in Computer and Information Science, Vol. 1052, pp. 40–51. Springer, 2019.
- [2] W. C. HUFFMAN AND V. PLESS, *Fundamentals of Error-Correcting Codes*. Cambridge, 2003.
- [3] P. SHANKAR, *On BCH codes over arbitrary integer rings*. IEEE Transactions on Information Theory **25** (1979):480–483.
- [4] P. SOLÉ, *A Quaternary Cyclic Code, and a Family of Quadriphase Sequences with Low Correlation Properties*. En: *Coding Theory and Applications*. Lecture Notes in Computer Science, Vol. 388, pp. 193–201. Springer, Berlin, Heidelberg, 1989.

1.4 Dinámica p -ádica en dimensión superior

O. F. Casas-Sánchez¹

Resumen

La charla estará dedicada al estudio de un sistema dinámico generado por una función de la forma $F(x_1, x_2, \dots, x_m) = (f_1(x_1), f_2(x_2), \dots, f_m(x_m))$, donde $f_i : \mathbb{Q}_p \rightarrow \mathbb{Q}_p$, $1 \leq i \leq m$.

Palabras & frases claves: Sistemas dinámicos, teorema de Taylor, puntos atractores

1. Introducción

Los sistemas dinámicos p -ádicos han sido estudiados desde inicios de los años 90 por Anashin [1, 2, 3] y Khrennikov [7, 8, 9]. Los sistemas dinámicos p -ádicos han sido investigados en $\mathbb{Q}_p$, en $\mathbb{C}_p$, y recientemente sobre el anillo de enteros p -ádicos [10], y la línea proyectiva $\mathbb{P}^1(\mathbb{Q}_p)$ [5].

En [7], el autor estudia el sistema dinámico monomial $x \mapsto x^n$. La investigación la realiza sobre $\mathbb{C}_p$ y sobre $\mathbb{Q}_p$; como los puntos fijos del sistema son raíces de la unidad, para el caso en el que se considere el sistema dinámico sobre $\mathbb{Q}_p$, es necesario especificar cuales de estas raíces están o no en $\mathbb{Q}_p$. Muchos de los resultados que se tienen en el cuerpo $\mathbb{C}_p$ se tienen en $\mathbb{Q}_p$ siempre y cuando los puntos pertenezcan a este.

El propósito de la charla es mostrar el estudio del sistema dinámico en el espacio m -dimensional $\mathbb{Q}_p^m$, utilizando la teoría conocida de funciones en dimensión uno. Más precisamente tomaremos una función $F : \mathbb{Q}_p^m \rightarrow \mathbb{Q}_p^m$ dada por $F(x) = (f_1(x_1), \dots, f_m(x_m))$ para $x = (x_1, \dots, x_m)$, donde $f_i : \mathbb{Q}_p \rightarrow \mathbb{Q}_p$.

Siguiendo el estudio realizado por Khrennikov en [7] y utilizando el teorema de Taylor en una variable, obtenemos una versión para funciones de dimensión superior, en el que aparece la matriz Jacobiana de la función F . Más específicamente mostraremos el siguiente resultado

Teorema 1. Si $F : \mathbb{Q}_p^m \rightarrow \mathbb{Q}_p^m$ de la forma

$$F(x) = (f_1(x_1), \dots, f_m(x_m)), \quad (1)$$

donde cada una de las componentes $f_i : \mathbb{Q}_p \rightarrow \mathbb{Q}_p$ es diferenciable en el punto a_i . Sea $a = (a_1, \dots, a_m) \in \mathbb{Q}_p^m$ y denote por $J(a)$ la matriz diagonal con estradas $J_{ii} = f'_i(a_i)$. Entonces para $x \in \mathbb{Q}_p^m$ suficientemente cercano a a ,

$$\|F(x) - F(a)\|_p \leq \|J(a)\|_m \|x - a\|_p. \quad (2)$$

Teniendo en cuenta este resultado, es posible mostrar que:

Teorema 2. Sea $F : \mathbb{Q}_p^m \rightarrow \mathbb{Q}_p^m$ una función de la forma

$$F(x) = (f_1(x_1), \dots, f_m(x_m)), \quad x \in \mathbb{Q}_p^m,$$

¹Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia. Correo: oscar.casas01@uptc.edu.co

donde cada componente $f_i : \mathbb{Q}_p \rightarrow \mathbb{Q}_p$ es una función diferenciable en el punto a_i . Sean $a = (a_1, \dots, a_m) \in \mathbb{Q}_p^m$ un punto fijo de F , y $J(a)$ la matriz con entradas $J_{ii} = f'_i(a_i)$. Si $\|J(a)\|_{in} < 1$, entonces a es un punto **atractor** del sistema dinámico $F(x)$.

En el teorema anterior $\|A\|_{in} = \max_{\|x\|_p=1} \|Ax\|_p$ es la norma matricial inducida por la norma $\|X\|_p = \max |x_i|_p$, $X = (x_1, x_2, \dots, x_m)$; $x_i \in \mathbb{Q}_p$.

Por último, mostraremos dos casos específicos, en el primero, cada componente es el mismo monomio, es decir, para $i = 1, \dots, m$ tenemos $f_i(x) = x^n$ para un n fijo. En el segundo caso, seguimos con monomios, pero escogemos diferentes potencias, es decir, $f_i(x) = x^{n_i}$ para $i = 1, \dots, m$, donde los n_i son enteros.

Todos los resultados que se mostrarán en la charla se encuentran en el preprint [4].

Referencias

- [1] Anashin V. S., *Uniformly distributed sequences of p -adic integers*. Mathematical Notes, **55**(2) (1994):109–133.
- [2] Anashin V. S., *Ergodic transformations in the space of p -adic integers*, p -Adic Mathematical Physics, AIP Conf. Proc. **826** (2006):3–24.
- [3] Anashin V. S., *Applied Algebraic Dynamics*, De Gruyter, 2009.
- [4] Galeano-Peñaloza J. and Casas -Sánchez O. F., *Dynamical systems defined over p -adics in higher dimension*. Sometido a publicación, 2025.
- [5] Diagana T., *The long-term behavior of the p -adic Sigmoid Beverton-Holt dynamical systems in the projective line $\mathbb{P}^1(\mathbb{Q}_p)$* , J. Math. Anal. Appl. **530** (2024):127638.
- [6] Dragovich B., Khrennikov A. Y., Kozyrev S. V. and Volovich I. V., *On p -adic mathematical physics*, p -Adic Numbers, Ultrametric Analysis and Applications. **1**(1) (2009):1–17.
- [7] Khrennikov A. Y., *Non-Archimedean Analysis: Quantum paradoxes, Dynamical Systems and Biological Models*. Kluwer, Dordrecht, 1997.
- [8] Khrennikov A. Y., *p -Adic dynamical systems: description of concurrent struggle in biological population with limited growth*, Dokl. Akad. Nauk. **361** (1998):752–754.
- [9] Khrennikov A. Y., *Human subconscious as a p -adic dynamical systems*, J. of Theor. Biology. **193** (1998):179–196.
- [10] Khrennikov A. Y. and Yurova E., *Criteria of ergodicity for p -adic dynamical systems in terms of coordinate functions*, Chaos, Solitons & Fractals. **60** (2014):11–30.

1.5 El asociaedro y el complejo de conglomerado: un lugar de encuentro entre álgebra, combinatoria y geometría

Astrid Carolina Melo López¹

Resumen

El asociaedro es un poliedro que aparece de forma natural al estudiar las triangulaciones de un polígono, y que refleja profundas conexiones entre combinatoria y geometría. En esta charla mostraremos cómo este objeto surge en el contexto de las álgebras de conglomerado, una clase de estructuras algebraicas introducidas por Fomin y Zelevinsky que se construyen a partir de un proceso combinatorio llamado mutación. Veremos la definición del complejo de conglomerado, así como algunas de sus propiedades. Finalmente, presentaremos resultados recientes sobre una versión de este complejo en el contexto de las variedades de conglomerado.

Palabras & frases claves: asociaedro, álgebra de conglomerado, complejo de conglomerado.

1. Introducción

Algunas estructuras combinatorias aparentemente sencillas esconden fenómenos algebraicos y geométricos de gran profundidad. Un ejemplo clásico es el asociaedro, un poliedro cuyas caras describen las posibles triangulaciones de un polígono convexo. Este objeto, estudiado desde la combinatoria y la topología, reaparece en contextos más recientes dentro de la teoría de las álgebras de conglomerado (o cluster algebras), introducidas por Fomin y Zelevinsky a inicios de los años 2000.

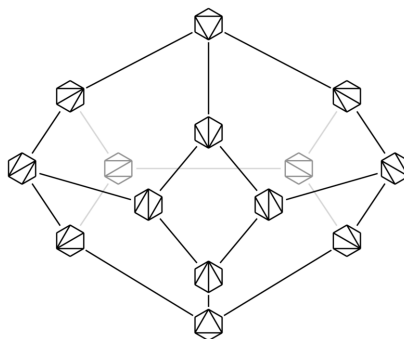


Figura 1: Realización geométrica del asociaedro para un hexágono (tipo A_3).

Las álgebras de conglomerado surgieron como marco para estudiar la positividad total, pero se han encontrado aplicaciones en diversas áreas, como la teoría de la representación, la geometría, la teoría de números y la combinatoria; véanse, por ejemplo, [4]. Estas álgebras se caracterizan por un proceso dinámico conocido como mutación, que genera nuevas variables y revela patrones combinatorios y geométricos profundos. En particular, están asociadas a estructuras geométricas llamadas variedades

¹Postdoctoral Fellow, Universidad Nacional Autónoma de México. Correo: amelo1@una1.edu.co

de conglomerado (definidas por Fock y Goncharov), que poseen un complejo simplicial denominado complejo de conglomerado.

El estudio de este complejo ofrece una forma de visualizar y organizar la información combinatoria de las mutaciones y variables de conglomerado. Cabe destacar que, en el caso de las variedades $\mathcal{A}$ de tipo A_n , el complejo de conglomerado corresponde al asociaedro. Esta elegante correspondencia ofrece una forma visual y algebraica de explorar el proceso de mutación y la interacción entre la combinatoria de estas variedades.

2. Álgebras y variedades de conglomerado

Introducidas por Fomin y Zelevinsky en [1], un álgebra de conglomerado A es un anillo conmutativo con un conjunto distinguido de generadores llamados *variables de conglomerado*, agrupados en subconjuntos de igual cardinalidad conocidos como *conglomerados* (clusters). Las variables de conglomerado se derivan de una semilla inicial $\mathbf{s}$, consistente en un conglomerado inicial $\{x_1, \dots, x_n\}$ y una matriz entera $n \times n$ antisimetrizable $B_{\mathbf{s}}$ asociada a $\mathbf{s}$. Estas variables de conglomerado se obtienen mediante un proceso explícito de *mutaciones*, dictado por $B_{\mathbf{s}}$, que produce nuevas semillas.

Las estructuras combinatorias de los conglomerados están profundamente conectadas con complejos simpliciales conocidos como *complejos de conglomerado*, introducidos por Fomin y Zelevinsky en [2]. El complejo de conglomerado $\Delta(A)$ es el complejo simplicial cuyo conjunto base está formado por todas las variables de conglomerado y cuyos símlices maximales son los conglomerados. Una conexión notable aparece en el caso de las álgebras de conglomerado de tipo A , donde una realización geométrica del complejo de conglomerado está dada por el *asociaedro*.

Asociadas a cada semilla existen dos familias de matrices enteras $n \times n$ llamadas *c-matrices* y *g-matrices*, ver [7]. Los elementos de estas familias están indexados por los vértices del árbol n -regular $\mathbb{T}_n$, con vértice distinguido $\mathbf{s}$. Dada una matriz antisimetrizable inicial $B_{\mathbf{s}}$ y $\mathbf{s}' \in \mathbb{T}_n$, denotamos por $C_{\mathbf{s}'}^{B_{\mathbf{s}}}$ (resp. $G_{\mathbf{s}'}^{B_{\mathbf{s}}}$) a la *c*-matriz (resp. *g*-matriz) indexada por el vértice $\mathbf{s}'$ de $\mathbb{T}_n$. Las columnas de $C_{\mathbf{s}'}^{-B_{\mathbf{s}}^T}$ (resp. $G_{\mathbf{s}'}^{B_{\mathbf{s}}}$) son $c_{1;\mathbf{s}'}, \dots, c_{n;\mathbf{s}'}$ (resp. $g_{1;\mathbf{s}'}, \dots, g_{n;\mathbf{s}'}$) y los vectores que surgen de esta forma son los *c-vectores* asociados a $-B_{\mathbf{s}}^T$ (resp. *g-vectores* asociados a $B_{\mathbf{s}}$).

Un resultado profundo establece que los *g*-vectores en una *g*-matriz —asociada a $B_{\mathbf{s}}$ y a la semilla $\mathbf{s}'$ — generan un cono de dimensión máxima $\mathcal{G}_{\mathbf{s}'}$ en $\mathbb{R}^n$ y que, además, la colección de todos los posibles *g-conos* $\mathcal{G}_{\mathbf{s}'}$ forman un *abanico simplicial* que es combinatoriamente equivalente a $\Delta(A)$. En particular, su dimensión es igual al número de variables de conglomerado en un cluster. Adicionalmente, bajo la suposición de un fenómeno llamado *propiedad de coherencia de signo*, Nakanishi y Zelevinsky demostraron en [7] la *dualidad tropical*:

$$(G_{\mathbf{s}'}^{B_{\mathbf{s}}})^T C_{\mathbf{s}'}^{-B_{\mathbf{s}}^T} = \mathbb{I}_n.$$

En [3], Vladimir Fock y Alexander Goncharov dieron una interpretación geométrica de las álgebras de conglomerado, que llamaron *variedades de conglomerado*; en particular, definieron las variedades de conglomerado $\mathcal{A}$ y $\mathcal{X}$, y sus complejos de conglomerado asociados $\Delta_{\mathbf{s}}^+(\mathcal{X})$ y $\Delta_{\mathbf{s}}^+(\mathcal{A})$. Como complejo simplicial, $\Delta_{\mathbf{s}}^+(\mathcal{A})$ es isomorfo al complejo de conglomerado $\Delta_{\mathbf{s}}(A)$ definido por Fomin y Zelevinsky. Dado que las variedades de conglomerado $\mathcal{X}$ son duales en cierto sentido a las variedades de conglomerado $\mathcal{A}$, se esperaba que la descripción explícita del complejo de conglomerado

de la variedad $\mathcal{A}$ usando $\mathbf{g}$ -vectores produjera también una descripción explícita del complejo de conglomerado de una variedad X usando $\mathbf{c}$ -vectores. Desafortunadamente, los $\mathbf{c}$ -conos no forman un abanico y no existía una descripción explícita del complejo de conglomerado de una variedad X en términos de $\mathbf{c}$ -vectores.

Recientemente en [6], Melo y Nájera-Chávez establecieron una descripción explícita del complejo de conglomerado $\Delta_s^+(X)$ y sus facetas usando $\mathbf{c}$ -vectores. Específicamente, se mostró que cada $\mathbf{c}$ -matriz determina un cono de $\Delta_s^+(X)$, sin embargo, de una manera diferente a como lo hacen los vectores $\mathbf{g}$ para $\Delta_s^+(\mathcal{A})$. Es decir, los $\mathbf{c}$ -vectores de una matriz $\mathbf{c}$ en general *no* generan un cono de $\Delta_s^+(X)$, sino que dichos $\mathbf{c}$ -vectores determinan las ecuaciones de los hiperplanos de soporte del cono respectivo. Adicionalmente, se describió la dimensión de estos conos a través de las igualdades implícitas del sistema de desigualdades derivado de la $\mathbf{c}$ -matriz asociada. En el caso especial donde X es antisimétrica y el carcaj Q asociado a B_s es acíclico, se describieron los vectores normales de los hiperplanos de soporte de los conos usando $\mathbf{g}$ -vectores de objetos en $K^b(\text{proj } kQ)$. Esto permite proporcionar clases de ejemplos donde los generadores de los rayos de los conos maximales de $\Delta_s^+(X)$ pueden expresarse en términos de $\mathbf{c}$ -vectores.

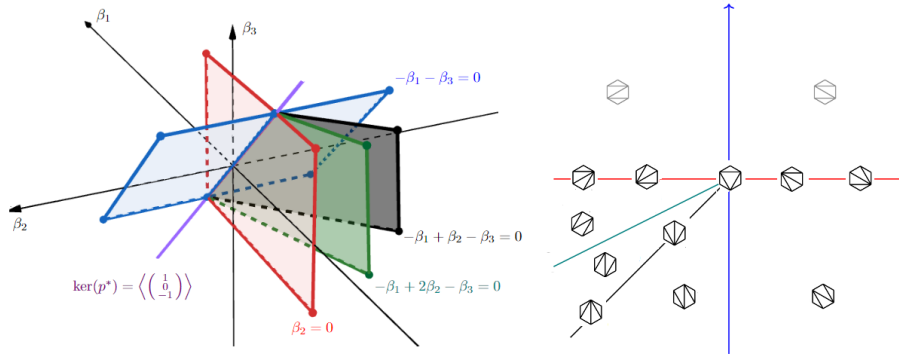


Figura 2: Complejo de conglomerado $\Delta_s^+(X)$ de tipo A_3 .

Referencias

- [1] S. FOMIN, A. ZELEVINSKY, *Cluster algebras I: Foundations*. J. Amer. Math. Soc. **15** (2002):497–529.
- [2] S. FOMIN, A. ZELEVINSKY, *Cluster algebras II: Finite type classification*. Invent. Math. **154** (2003):63–121.
- [3] V. FOCK, A. GONCHAROV, *Cluster ensembles, quantization and the dilogarithm*. Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. **42**(6) (2009):865–930.
- [4] Y. KODAMA, L. WILLIAMS, *KP solitons, total positivity, and cluster algebras*. Proc. Natl. Acad. Sci. USA **108**(22) (2011):8984–8989.

- [5] C. MELO, *On the cluster complex and theta functions for cluster Poisson varieties*. Ph.D. Thesis, Universidad Nacional de Colombia, 2024.
- [6] C. MELO, A. NÁJERA-CHÁVEZ, *The cluster complex for cluster Poisson varieties and representations of acyclic quivers*. Int. Math. Res. Not. **2024**(12) (2024):9663–9685.
- [7] T. NAKANISHI, A. ZELEVINSKY, *On tropical dualities in cluster algebras*. Contemp. Math. **565** (2012):217–226.

1.6 Grafo zero divisor para R -módulos mediante su primer dual

Andrés Luciano Barraza Medina¹

Resumen

En esta plática, dado M un R -módulo, le asociaremos un grafo $\Gamma(M)$ mediante su primer dual, es decir, $\text{Hom}_R(M, R)$. El objetivo es estudiar las propiedades grafo-teóricas que se preservan de una estructura a la otra. En particular, estudiaremos la conexidad, la cintura y la completitud de $\Gamma(M)$. Además, estamos interesados en hallar condiciones algebraicas para la validez de la conjetura de Beck para el R -módulo M . La mayoría de los resultados pueden ser consultados más ampliamente en [1].

Palabras & frases claves: Primer dual, conjetura de Beck.

1. Introducción

El estudio de grafos asociados a estructuras algebraicas ha recibido considerable atención en años recientes. Inicialmente Beck en [2] trabajó grafos sobre anillos conmutativos donde definió los vértices como divisores de cero y dos elementos $x, y \in R$ estaban relacionados si $xy = 0$. Posteriormente Redmond en [3] generalizó la definición para ideales. Por otro lado, en décadas recientes ha resultado interesante las gráficas construidas a partir de módulos sobre anillos conmutativos dado que ofrecen una rica interacción entre álgebra y teoría de grafos. Por ejemplo, en [4] dado un R -módulo M , se asocia el grafo $\Gamma_R(M)$ donde los vértices son elementos de torsión y dos elementos $x, y \in M$ están relacionados si $\text{Ann}(x) \cap \text{Ann}(y) \neq \{0\}$.

2. Preliminares

A continuación presentamos la definición del grafo asociado a partir del primer dual y damos unas observaciones inmediatas que se obtienen de $\Gamma(M)$.

Definición 1. Sea M un R -módulo. Denotamos al grafo asociado no dirigido $\Gamma(M)$ en el que diremos $x \in M \setminus \{0\}$ es un vértice si y solo si existe $y \in M$ tal que $y f(y)x = 0$ o $g(x)y = 0$ para algunos no cero R -homomorfismos $f, g \in M^*$. Además, al conjunto de vértices de $\Gamma(M)$ lo denotaremos como $Z(M)$.

Ejemplo 2. Sea $M = \mathbb{Z}_4$ un $\mathbb{Z}$ -módulo. Sabemos que $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_4, \mathbb{Z}) = 0$ y así $M^* = 0$ por lo que $\Gamma(M)$ es vacío.

Analizando el ejemplo anterior y sabiendo que en general $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_n, \mathbb{Z}) = 0$, podemos concluir que para todo $n \in \mathbb{N}$ el grafo $\Gamma(M)$ asociado a $\mathbb{Z}_n$ como $\mathbb{Z}$ -módulo es vacío.

Observación 3. Sea R un anillo, si consideramos $M = R$ como un R -módulo y restringiendo M^* a R -monomorfismos, tenemos que para $x, y \in M$, $x \sim y$ si y solo si existe $f \in M^*$ un R -monomorfismo

¹. Correo: andres.barraza0672@alumnos.udg.mx

tal que $f(x)y = 0$.

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow f(x)y = f(xy) = 0 \quad (\text{Dado que } f \text{ es monomorfismo}) \\ \Leftrightarrow xy = 0 \end{aligned}$$

La anterior propiedad coincide con la definición del grafo zero divisor para anillos conmutativos definido en [5]. Por lo que la definición de $\Gamma(M)$ generaliza al grafo zero divisor cuando f es R -monomorfismo y $M = R$.

3. Propiedades grafo-teóricas de $\Gamma(M)$

Teorema 4. Sea R un anillo conmutativo y M un R -módulo. Entonces $\Gamma(M)$ es conexo y además $\text{diam}(\Gamma(M)) \leq 3$.

Teorema 5 (Teorema 2.6, [1]). Sea R un anillo conmutativo y M un R -módulo. Si $\Gamma(M)$ posee un ciclo entonces $\text{gr}(\Gamma(M)) \leq 4$.

Cuando el grafo $\Gamma(M)$ es vacío todos los elementos de $\text{Hom}_R(M, R)$ satisfacen una propiedad importante. En el siguiente resultado queda consignado este hecho.

Proposición 6. Sea R un anillo conmutativo y M un R -módulo. Si $\Gamma(M) = \emptyset$ entonces todo no cero $f \in M^*$ es monomorfismo.

Podemos restringir $M^* = \text{Hom}_R(M, R)$ exclusivamente a los monomorfismos y obtenemos resultados interesantes. Por ejemplo, el siguiente resultado nos dice que todo R -módulo simple fiel tiene grafo $\Gamma(M)$ vacío o infinito.

Corolario 7. Sea M un R -módulo y sea $\Gamma(M)$ finito y no vacío. Entonces M es finito y M no es un R -módulo fiel simple.

Cuando un R -módulo es fiel y finito la propiedad de conexidad puede ser notablemente mejorada. La siguiente proposición ilustra este hecho.

Proposición 8. Sea R un anillo conmutativo y M un R -módulo. Si M es simple y $\Gamma(M)$ es no vacío entonces $\Gamma(M)$ es un grafo completo.

4. Conjetura de Beck

El objetivo de esta sección es brindar una versión de la conjetura de Beck para el grafo asociado a módulos sobre anillos conmutativos a través del primer dual. En general, para un R -módulo M , se verifica que $\text{cl}(\Gamma(M)) \geq |\mathcal{K}|$. El siguiente resultado nos brinda condiciones para la igualdad.

Teorema 9. Sea R un anillo conmutativo y M un R -módulo. Si R es dominio entero entonces $\text{cl}(\Gamma(M)) = k$ ó $\text{cl}(\Gamma(M)) = k + 1$, donde $k = |\mathcal{K}|$.

Recordemos que dado $n \in \mathbb{N}$, entonces $\varphi(n)$ representa la cantidad de números menores y coprimos a n . La función φ es llamada función de Euler y es fundamental para el área de la teoría de números. El siguiente resultado utiliza la función φ de Euler para establecer un caso particular del teorema anterior para el caso de los $\mathbb{Z}_n$ -módulos.

Corolario 10. Sea $n \in \mathbb{N}$ y consideremos $M = \mathbb{Z}_n$ como un $\mathbb{Z}_n$ -módulo. Entonces $\mathcal{K} = (\mathbb{Z}_n \setminus \{0\}) \setminus \{m \in \mathbb{Z}_n : (m, n) = 1\}$. Además, $cl(\mathbb{Z}_n) = n - \varphi(n)$.

Como última parte de esta sección, estamos interesados en condiciones bajo las cuales se garantice la conjetura de Beck para el grafo asociado $\Gamma_R(M)$. El siguiente resultado es una respuesta a este propósito.

Teorema 11. Sea R un dominio entero y M un R -módulo. Entonces, $cl(\Gamma_R(M)) = \chi(\Gamma_R(M))$.

Referencias

- [1] M. BAZIAR, E. MOMTAHAN, AND S. SAFAEEYAN. *A zero-divisor graph for modules with respect to their (first) dual*, Journal of Algebra and Its Applications. **12**(2) (2013):1250151. DOI: 10.1142/S0219498812501514.
- [2] I. BECK, *Coloring of Commutative Rings*, Department of Mathematics and Computer Science, University of Haifa, 1986. Communicated by Kent R. Fuller, Received October 29, 1986.
- [3] S. P. REDMOND. *An ideal-based zero-divisor graph of a commutative ring*. Communications in Algebra. **31**(9) (2003):4425–4443.
- [4] P. MALAKOOTI RAD, S. YASSEMI, SH. GHALANDARZADEH, P. SAFARI. *Diameter and Girth of Torsion Graph*. Analele Stiintifice ale Universitatii Ovidius Constanta. **22**(3) (2014):127–136. DOI: 10.2478/auom-2014-0054.
- [5] S. AKBARI AND A. MOHAMMADIAN. *On the zero-divisor graph of a commutative ring*. Journal of Algebra. **274** (2004):847–855.
- [6] D. F. ANDERSON, M. C. AXTELL, AND J. A. STICKLES. *Zero-Divisor Graphs in Commutative Rings*. En: FONTANA, M., KABBAL, S.-E., OLBERDING, B., SWANSON, I. (Eds.), *Commutative Algebra: Noetherian and Non-Noetherian Perspectives*, pp. 237–245. Springer-Verlag, New York, 2011.

1.7 Acciones parciales y simetrías cuánticas: de grupos a categorías monoidales

Fabio Calderón Mateus¹, Héctor Pinedo Tapia²

Resumen

Las simetrías son una herramienta fundamental en matemáticas: permiten simplificar problemas y descubrir estructuras ocultas. Sin embargo, en muchos contextos las simetrías no son globales, sino que sólo se manifiestan en “porciones” de un objeto. Este fenómeno da lugar a la teoría de *acciones parciales*, introducida inicialmente en el análisis funcional y que hoy se estudia en un marco más amplio: grupoides, álgebras de Hopf e incluso categorías monoidales.

En esta charla se presentará, de manera accesible, qué significa que una acción sea parcial, por qué es natural estudiarlas y cómo su generalización conecta la teoría de grupos, la geometría no conmutativa y la teoría de categorías tensoriales. También se discutirán ejemplos, el papel de la globalización y perspectivas recientes como el análogo categórico de estos conceptos.

Palabras & frases claves: Acciones parciales, álgebras de Hopf, categorías monoidales.

1. Introducción

La idea de simetría ha estado presente en las matemáticas desde sus orígenes. Formalmente, una simetría puede entenderse como una acción de un grupo o álgebra de Hopf sobre un objeto matemático. Pero muchas veces estas simetrías no son globales, sino que sólo se definen en subestructuras o “fragmentos”. Para describir esta situación surgieron las *acciones parciales*, introducidas por Exel en el contexto de C^* -álgebras y luego trasladadas a la teoría algebraica pura.

2. De grupos a álgebras de Hopf

Las primeras generalizaciones consideraron acciones parciales de grupos sobre álgebras. Posteriormente, Caenepeel y Janssen extendieron la teoría al caso de álgebras de Hopf, dando lugar a los primeros teoremas de globalización. Trabajos de Alves y Batista consolidaron estas ideas mostrando que toda acción parcial de una álgebra de Hopf admite una globalización y estableciendo equivalencias de Morita entre productos parciales y globales.

3. Hacia categorías y simetrías parciales cuánticas

La teoría de acciones parciales se ha expandido a entornos más generales:

- Acciones parciales de álgebras de Hopf débiles, que unifican las de grupos y groupoides.
- Representaciones y co-representaciones parciales, con estructuras asociadas de Hopf algebroides.

¹Universidad Industrial de Santander. Correo: facalde@uis.edu.co

²Universidad Industrial de Santander. Correo: hpinedo@uis.edu.co

- Acciones parciales en categorías monoidales, recientemente introducidas por los autores, que permiten estudiar simetrías locales en un lenguaje categórico.

Estos desarrollos tienen aplicaciones en geometría no conmutativa, teoría de Galois parcial y categorías tensoriales, conectando la teoría algebraica con problemas de física matemática.

Referencias

- [1] M. Alves, E. Batista, J. Vercruysse, *Partial representations of Hopf algebras*. J. Algebra. **426** (2015):137–187.
- [2] E. Batista, *Partial Actions: what they are and why we care*. arXiv:1604.06393 (2016).
- [3] E. Batista, F. Castro, M. Khrypchenko, *Partial actions of groups on monoidal categories*. arXiv:2412.13123 (2024).
- [4] M. Bischoff, A. Davydov, *Hopf algebra actions in tensor categories*, Transformation Groups. **26**(1) (2021):69–80.
- [5] S. Caenepeel, K. Janssen, *Partial (co)actions of Hopf algebras and partial Hopf–Galois theory*, Comm. Algebra. **36**(8) (2008):2923–2946.

1.8 Introducción al álgebra homológica

Johan S. Cortes V.¹

Resumen

En este minicurso abordaremos los fundamentos del álgebra homológica desde una perspectiva categórica y las usaremos como herramientas para estudiar condiciones de finitud en módulos y anillos. Veremos como el álgebra homológica es una herramienta que nos permite estudiar generalizaciones y obtener propiedades de los módulos finitamente generados y de los anillos noetherianos.

Palabras clave: Módulos finitamente n -presentados, Anillos noetherianos.

1. Introducción

El álgebra homológica es una disciplina central en matemáticas que proporciona herramientas poderosas para estudiar estructuras algebraicas a través de métodos funtoriales y técnicas de homología y cohomología. Surgió a principios del siglo XX como un lenguaje unificador entre la topología algebraica y el álgebra conmutativa, pero su influencia se ha extendido a campos tan diversos como la geometría algebraica, la teoría de números, la física matemática y la teoría de representaciones.

Los primeros indicios del álgebra homológica aparecieron en los trabajos de Henri Poincaré sobre homología en topología, donde introdujo los conceptos de cadenas, ciclos y grupos de homología. Sin embargo, fue Emmy Noether quien, en la década de 1920, reconoció que estos grupos podían estudiarse de manera abstracta dentro del marco de los módulos sobre un anillo, sentando las bases para un tratamiento algebraico de la homología.

El desarrollo formal del álgebra homológica como teoría independiente llegó en los años 1940 y 1950, gracias a los trabajos de Samuel Eilenberg y Saunders Mac Lane, quienes introdujeron la teoría de categorías y funtores. Este marco permitió generalizar y abstraer muchas construcciones topológicas y algebraicas. Más tarde, Henri Cartan y Eilenberg sistematizaron estos métodos en su influyente libro "Homological Algebra" (1956), donde desarrollaron herramientas fundamentales como los complejos de cadenas, sucesiones espectrales y funtores derivados.

En las décadas siguientes, el álgebra homológica experimentó un crecimiento explosivo, especialmente en geometría algebraica, donde Alexander Grothendieck y Jean-Pierre Serre aplicaron técnicas cohomológicas al estudio de esquemas y variedades algebraicas. La introducción de la cohomología de haces y la cohomología étale revolucionó la disciplina, permitiendo demostrar resultados profundos como las conjeturas de Weil (resueltas por Pierre Deligne en 1974).

Aplicaciones en otras áreas: El poder del álgebra homológica radica en su capacidad para conectar distintas ramas de las matemáticas:

- Topología algebraica: Los grupos de homología y cohomología proporcionan invariantes topológicos esenciales para clasificar espacios.

¹Universidad de la República. Correo: johancortes214@gmail.com

- Geometría algebraica: La cohomología de haces permite estudiar propiedades globales de variedades y esquemas.
- Álgebra conmutativa: La dimensión homológica y las resoluciones libres son herramientas clave en el estudio de anillos y módulos.
- Teoría de representaciones: Las álgebras de Artin y las teorías de Auslander-Reiten utilizan métodos homológicos para clasificar módulos.
- Teoría de números: La cohomología de Galois es fundamental en el programa de Langlands y en problemas de aritmética.
- Física teórica: La cohomología aparece en teoría de campos cuánticos, teoría de cuerdas y simetrías algebraicas.

En resumen, el álgebra homológica no solo es una herramienta técnica indispensable, sino también un puente entre distintas áreas de las matemáticas, con un impacto duradero en la investigación pura y aplicada. Su desarrollo continúa abriendo nuevas fronteras, demostrando que sigue siendo un campo vibrante y lleno de desafíos.

Dada la importancia que ha tomado esta área, con el fin de fomentar su estudio presentamos este minicurso introductorio dividido en cuatro lecturas de 60 minutos de la siguiente manera:

1. **Módulos como categoría abeliana:** Dado que el minicurso está dirigido a todo público, se estructuró con el fin de ser autocontenido, por lo tanto, en esta primera lectura empezaremos con conocer los módulos como categoría abeliana, sus construcciones universales, límites, colímites y sucesiones exactas. Veremos los distintos tipos de módulos que hay, como lo son los módulos inyectivos, proyectivos y planos. Conocer este tipo de módulos es fundamental, dado que en el futuro trabajaremos versiones generalizadas de estas clases de objetos. Por último recordaremos propiedades de los funtores $\text{Hom}_R(-, -)$ y $- \otimes_R -$, como lo son los lemas de adjunción, preservación/reflexión de sucesiones exactas y demás propiedades relevantes para las siguientes lecturas.
2. **Funtores derivados:** Elementos fundamentales del álgebra homológica se definen a partir de los funtores derivados Ext y Tor , así que, en esta lectura veremos como se construyen estos y sus propiedades. Para esto, retomaremos las sucesiones exactas y veremos como se construyen las resoluciones proyectivas e inyectivas, veremos que estas son objetos particulares de la categoría de complejos de cadena $C_\bullet(\text{Mod-}R)$ y usaremos los resultados de exactitud de los funtores $\text{Hom}_R(-, -)$ y $- \otimes_R -$ para construir los funtores derivados.
3. **Álgebra homológica relativa:** Introduciremos objetos básicos del álgebra homológica como lo son las cubiertas y envolturas, veremos que los proyectivos e inyectivos son ejemplos respectivamente de estas clases. Veremos la teoría de cotorsión como una herramienta que nos garantiza propiedades en la categoría de módulos, como aplicación de esta teoría probaremos que todo módulo tiene una cubierta plana.
4. **Condiciones de finitud:** Para esta última lectura recordaremos algunas definiciones equivalentes para que un anillo sea noetheriano, con esta motivación introduciremos los módulos finitamente n -presentados, $\mathcal{FP}_n$, como generalización de los módulos finitamente generados y presentados. Estudiaremos el álgebra homológica relativa a esta clase, por ejemplo los módulos inyectivos y relativos a la clase $\mathcal{FP}_n$, y veremos como el estudio de esta nos permite

dar caracterizaciones de de anillos hereditarios, noetherianos, coherentes, von Neumann, entre otros.

La bibliografía serán libros clásicos en lo que se refiere a la teoría de categorías, módulos y anillos, estos son [3], [8], [1], [2], [4] y [5]. También usaremos como referencia algunos artículos de Marco Pérez, Daniel Bravo, T. Ishikawa y H. Fausk, estos son [10], [9], [7] y [6].

Referencias

- [1] E. E. ENOCHS AND O. M. G. JENDA, *Relative homological algebra. Vol. 1.* Walter de Gruyter, 2011.
- [2] E. E. ENOCHS AND O. M. G. JENDA, *Relative Homological Algebra. Vol. 2.* De Gruyter, 2011.
- [3] F. W. ANDERSON AND K. R. FULLER, *Rings and categories of modules.* Graduate Texts in Mathematics, Vol. 13, Springer-Verlag, 1992.
- [4] T.-Y. LAM, *Lectures on modules and rings.* Springer, 2012.
- [5] J. J. ROTMAN, *An introduction to homological algebra.* Springer, 2nd edition, 2009.
- [6] T. ISHIKAWA, *Faithfully exact functors and their applications to projective modules and injective modules.* Nagoya Mathematical Journal. **24** (1964):29–42.
- [7] H. FAUSK, P. HU, AND J. P. MAY, *Isomorphisms between left and right adjoints.* arXiv:math/0206079v1 (2002).
- [8] F. BORCEUX, *Handbook of categorical algebra: Vol. 1, Basic category theory.* Cambridge University Press, 1994.
- [9] D. BRAVO AND M. A. PÉREZ, *Finiteness conditions and cotorsion pairs,* Journal of Pure and Applied Algebra. **221**(6) (2017):1249–1267.
- [10] D. BRAVO AND C. E. PARRA, *Torsion pairs over n -hereditary rings,* Communications in Algebra. **47**(5) (2019):1892–1907.

1.9 Análisis p -ádico y dinámica jerárquica en sistemas complejos

Anselmo Torresblanca Badillo¹

Resumen

En esta ponencia exploramos cómo el análisis p -ádico puede aplicarse al estudio de la dinámica de sistemas complejos, especialmente en redes con estructuras jerárquicas. Para ello utilizamos espacios ultramétricos, los cuales permiten describir distancias que capturan de manera natural estas jerarquías. En este marco, las probabilidades de transición entre estados no solo dependen de la distancia entre ellos, sino también de los potenciales locales. Presentaremos modelos matemáticos que muestran cómo dichas probabilidades evolucionan con el tiempo, subrayando el papel que juegan las distancias jerárquicas en la dinámica global del sistema.

Palabras & frases claves: Análisis p -ádico, operadores pseudodiferenciales.

1. Introducción

En los últimos años, el estudio de sistemas complejos ha captado una atención creciente debido a su capacidad para describir comportamientos intrincados que surgen de estructuras jerárquicas e interacciones no locales. Estos sistemas, presentes en áreas que van desde la física estadística y la biología hasta la informática, presentan dinámicas fuertemente influenciadas por la organización jerárquica de sus componentes y los “costos energéticos” asociados a las transiciones entre estados.

Un marco particularmente útil para comprender estas dinámicas es la representación de los sistemas complejos como redes con estructura ultramétrica. En estas redes, las transiciones entre estados dependen no solo de las condiciones locales, sino también de la disposición jerárquica de los elementos del sistema, que puede modelarse de manera natural mediante distancias p -ádicas. Esta perspectiva ultramétrica permite clasificar los estados en clústeres, identificar atractores y cuantificar probabilidades de transición de forma rigurosa.

En esta ponencia nos centramos en **redes p -ádicas** como herramienta para estudiar sistemas jerárquicos con interacciones no locales. Analizando las transiciones en términos de distancias p -ádicas y paisajes energéticos jerárquicos, exploramos cómo la estructura de la red influye en los patrones de propagación y en la formación de clústeres. Este enfoque ofrece una nueva perspectiva para examinar fenómenos como la propagación de información, la dinámica celular, la dispersión de contaminantes y la aparición de patrones jerárquicos en sistemas naturales y artificiales.

2. Desarrollo de la ponencia

El estudio de sistemas complejos a través de redes con estructura jerárquica ha demostrado ser un enfoque poderoso para comprender fenómenos donde intervienen interacciones no locales. Estas redes permiten capturar, de manera natural, dinámicas que emergen de la organización en niveles y de los costos asociados a las transiciones entre estados.

¹Universidad Industrial de Santander. Correo: anstorba@correo.uis.edu.co

En esta ponencia se propone utilizar las **redes p -ádicas** como un marco matemático para representar este tipo de sistemas. La distancia p -ádica proporciona una herramienta ultramétrica que clasifica de manera jerárquica los elementos del sistema, permitiendo describir con precisión cómo se agrupan en clústeres y cómo ocurren las transiciones entre ellos.

Un aspecto fundamental de este enfoque es que las transiciones no dependen únicamente de condiciones locales, sino que están determinadas por la **estructura jerárquica global**. Esto implica que los estados del sistema pueden organizarse en dominios con diferentes niveles de estabilidad, en donde los mínimos locales actúan como atractores y las barreras energéticas como fronteras que segmentan la dinámica.

Para ilustrar estas ideas, se consideran ejemplos en los que los estados de un sistema se organizan en una red. En este contexto, las probabilidades de transición entre nodos están determinadas por la distancia p -ádica y por parámetros que reflejan las condiciones energéticas locales. A partir de este análisis es posible observar patrones de propagación que revelan cómo la jerarquía condiciona la dinámica: clústeres de nodos que funcionan como comunidades internas, regiones de tránsito preferente y zonas donde la propagación se ralentiza.

Además de los aspectos teóricos, se presentan simulaciones numéricas que muestran de manera visual el comportamiento de estas redes. Dichas simulaciones permiten identificar escenarios de aplicación en problemas reales, como la *dispersión de contaminantes*, la *dinámica de poblaciones celulares* o la *propagación de información en sistemas artificiales*. Estos ejemplos ponen de manifiesto la utilidad del enfoque p -ádico no solo como herramienta matemática, sino también como modelo para fenómenos de interés en ciencias aplicadas.

En conclusión, el marco ultramétrico basado en redes p -ádicas ofrece una nueva perspectiva para el estudio de sistemas complejos jerárquicos. Su capacidad para integrar aspectos globales y locales en un mismo modelo lo convierte en un método prometedor para abordar problemas que no pueden ser descritos adecuadamente con herramientas convencionales.

Referencias

- [1] ALBEVERIO S., KHRENNIKOV A. YU., SHELKOVICH V. M., *Theory of p -adic distributions: linear and nonlinear models*. London Mathematical Society Lecture Note Series, 370. Cambridge University Press, Cambridge, 2010.
- [2] TORRESBLANCA-BADILLO A., TORRESBLANCA-BADILLO V.P., *Environmental contaminant dispersion models based on the Vladimirov-Taibleson p -adic pseudo-differential operator*. J. Pseudo-Differ. Oper. Appl. **16** (2025):59. <https://doi.org/10.1007/s11868-025-00681-y>
- [3] TORRESBLANCA-BADILLO A., ZÚÑIGA-GALINDO W. A., *Ultrametric Diffusion, Exponential Landscapes, and the First Passage Time Problem*. Acta Appl Math. **157** (2018):93–116. <https://doi.org/10.1007/s10440-018-0165-2>
- [4] ZAMBRANO-LUNA, B.A., ZÚÑIGA-GALINDO, W.A., *p -adic cellular neural networks: Applications to image processing*. Physica D: Nonlinear Phenomena. **446** (2023):133668. <https://doi.org/10.1016/j.physd.2023.133668>.

1.10 Códigos Castillo en el Criptosistema McEliece

Sandra Inés Manrique Guerrero¹, Wilson Olaya León²

Resumen

En esta charla presentamos una nueva familia de códigos correctores de errores, llamada códigos Castillo torcidos, basados en códigos Castillo [5] e inspirados por los códigos Hermitianos torcidos [1]. Mostramos que estos nuevos códigos tienen una dimensión de cuadrado de Schur alta y, en algunos casos, alcanzan una dimensión cercana a la de un código lineal aleatorio con los mismos parámetros. Esta característica permite que los códigos Castillo torcidos puedan ser utilizados para implementar el protocolo criptográfico de McEliece [4], que hasta el momento se cree resiste ataques desde un computador cuántico.

Palabras & frases claves: Criptografía poscuántica, códigos algebraico-geométricos, códigos Castillo, criptosistema McEliece.

1. Introducción

La criptografía poscuántica surge como respuesta a los avances de la computación cuántica, que amenazan la seguridad de sistemas ampliamente utilizados como RSA o los basados en curvas elípticas. En este contexto, el criptosistema de clave pública propuesto por McEliece en 1978 [4] ha demostrado ser una de las alternativas más sólidas, ya que su seguridad se basa en la dificultad de decodificar códigos lineales aleatorios, un problema que no puede resolverse eficientemente con algoritmos cuánticos. Por esta razón, el criptosistema de McEliece es uno de los principales candidatos dentro del proceso de estandarización impulsado por el NIST [3, 6].

Sin embargo, la implementación directa de códigos algebraico-geométricos en el criptosistema McEliece presenta vulnerabilidades frente al ataque de distinción por cuadrado de Schur. Para superar este inconveniente, se han propuesto variantes como los códigos Hermitianos torcidos [1], que logran un comportamiento más cercano al de un código aleatorio. Inspirados en esta construcción, en esta charla se presentan los códigos Castillo torcidos, una nueva familia basada en códigos Castillo clásicos [5]. La charla se centrará en presentar la idea de su construcción, discutir las propiedades que motivan su estudio y señalar su interés dentro de la criptografía poscuántica, particularmente por su posible aplicación en el criptosistema de McEliece.

2. Construcción y propiedades de los códigos Castillo torcidos

Con el propósito de superar las limitaciones de los códigos algebraico-geométricos clásicos, se han propuesto variantes como los códigos Hermitianos torcidos, los cuales logran un comportamiento más cercano al de los códigos aleatorios.

Inspirados en esta idea, se propone la construcción de los códigos Castillo torcidos, basados en las curvas de tipo Castillo. Estos códigos se obtienen introduciendo un término de torsión controlado

¹Universidad del Valle, Cali, Colombia. Correo: sandra.manrique@correounivalle.edu.co

²Universidad Industrial de Santander, Colombia. Correo: wolaya@uis.edu.co

sobre el espacio de funciones asociado a la curva, lo que modifica su estructura de paridad y aumenta la dimensión del cuadrado de Schur.

De esta forma, los códigos Castillo torcidos presentan propiedades que los hacen adecuados para aplicaciones criptográficas, en particular para el criptosistema de McEliece, al mejorar su resistencia frente a ataques estructurales sin sacrificar significativamente la eficiencia en la decodificación.

Referencias

- [1] ALLEN, A., BLACKWELL, K., FIOL, O., KSHIRSAGAR, R., MATSICK, B., MATTHEWS, G., NELSON, Z., *Twisted Hermitian Codes*. Transactions of the American Mathematical Society. **43** (2021):377–385.
- [2] BEELEN, P., PUCHINGER, S., NIELSEN, J. R., *Twisted Reed-Solomon codes*. IEEE International Symposium on Information Theory (ISIT). (2017):336–340.
- [3] ALBRECHT, M. R., BERNSTEIN, D. J., CHOU, T., CID, C., ET AL., *NIST PQC Competition*. 2020. Disponible en: <https://classic.mceliece.org/nist.html>
- [4] McELIECE, R. J., *A Public-Key System Based on Algebraic Coding Theory*. DSN Prog. Rep. **44** (1978):114–116.
- [5] MUNUERA, C., TORRES, F., SEPÚLVEDA, A., *Algebraic Geometry codes from Castle curves*. Coding Theory and Applications. Springer LNCS. **5228** (2008):117–127.
- [6] NIST , *Post-Quantum Cryptography Project*. (2022). Disponible en <https://csrc.nist.gov/Projects/post-quantum-cryptography>
- [7] OLAYA-LEÓN, W., MUNUERA, C., *On the minimum distance of Castle codes*. Finite Fields and Applications. **20** (2013):55–63.

1.11 Curvas generalizadas de Artin-Schreier y la cota de Hasse-Weil

Alexandra Albarracín-Mantilla¹, Arnoldo Teherán Herrera²

Resumen

Sea $\mathbb{F}_q$ el cuerpo finito con q elementos, donde q es una potencia de un primo p , una curva de Artin-Schreier es definida por una ecuación con modelo plano afín,

$$y^p - y = f(x), \quad \text{donde } f(x) \in \mathbb{F}_q(x), \quad (1)$$

las cuales han sido ampliamente estudiadas, ver por ejemplo [2] y [4].

Una ecuación del tipo anterior se puede extender a una hipersuperficie,

$$y^q - y = f(x_1, x_2, \dots, x_r), \quad (2)$$

sobre $\mathbb{F}_{q^n}$. Este trabajo se centra en un tipo de familias de curvas e hipersuperficies particulares del tipo anterior; en particular se presentan las familias estudiadas en [1] y se darán sobre condiciones suficientes y necesarias para estas tengan muchos puntos racionales, es decir, cercanos a la Cota de Hasse-Weil.³

Palabras & frases claves: Cuerpos finitos, curvas de Artin-Schreier, género, puntos racionales, cota de Hasse-Weil.

1. Introducción

Sea $\mathbb{F}_q$ el cuerpo finito con q elementos, donde q es potencia de un primo p , y denote por $\overline{\mathbb{F}}_q$ su clausura algebraica; considere C una **curva** sobre $\mathbb{F}_q$, es decir, una variedad algebraica, proyectiva $C \subseteq \mathbb{P}^r(\overline{\mathbb{F}}_q)$, de dimensión 1, que es no singular y geoméricamente irreducible sobre $\mathbb{F}_q$. Si se denota $\#N(C(\mathbb{F}_q))$ el número de puntos racionales de C sobre $\mathbb{F}_q$ y por $g = g(C)$ el género de la curva, la cota de Hasse-Weil establece que, $\#N(C(\mathbb{F}_q)) \leq 1 + q + 2gq^{1/2}$. Esta desigualdad proporciona una estimación fundamental en el estudio de curvas sobre cuerpos finitos.

Considere la curva de Artin-Schreier con modelo plano afín,

$$y^q - y = x(x^{q^j} - x) - \lambda,$$

y las hipersuperficies dadas por,

$$y^q - y = \sum_{j=1}^r a_j x_j (x_j^{q^{i_j}} - x_j) - \lambda,$$

con $\lambda \in \mathbb{F}_{q^n}$, que naturalmente son de la forma (1) y (2). Sean $N(C_i(\mathbb{F}_{q^n})) := N_n(C_i)$, el número de puntos de C_i sobre $\mathbb{F}_{q^n}$ y considere la aplicación $Q_i : \mathbb{F}_{q^n} \rightarrow \mathbb{F}_q$ donde $Q_i(\alpha) = \text{Tr}_{\mathbb{F}_{q^n}/\mathbb{F}_q}(\alpha \alpha^{q^i} -$

¹Universidad Industrial de Santander, Colombia. Correo: alealbam@uis.edu.co

²Universidad Industrial de Santander, Colombia. Correo: ateheran@uis.edu.co

³En el marco del Semillero de Investigación "Curvas Algebraicas y Aplicaciones"4387.

$\lambda)$), denote por $N_n(Q_i)$ el número de ceros de Q_i ; usando el Teorema 90 de Hilbert se establece que $N_n(C_i) = qN_n(Q_i)$, lo cual implica que $N_n(C_i)$ es equivalente a $N_n(Q_i)$. Con lo anterior, cuando q es un cuadrado, se pueden establecer condiciones suficientes y necesarias para que curvas del tipo C_i sean maximales o minimales.

Como una aplicación se estudian hipersuperficies de la forma,

$$H_r : y^q - y = \sum_{j=1} a_j x_j (x_j^{q^{i_j}} - x_j) - \lambda,$$

Referencias

- [1] BROCHERO MARTINEZ F.E, OLIVEIRA D., *On the number of rational points of Artin-Schreier's curves and hypersurfaces*. Des. Codes Cryptogr. **92** (2024):3133–3154.
- [2] FARNELL, S. , PRIES, R, *Families of Artin Schreier curves with Cartier manin matrix of constant rank*. Linear Algebra and its Applications. **439**(7) (2013):2158–2166.
- [3] GARZÓN A., TEHERÁN A., *Elementary Abelian P -extensions And Curves With Many Points*. Revista de la Academia Colombiana de Ciencias Exactas, Físicas Naturales. **36**(139) (2012):243–252.
- [4] VAN DER GEER, G., VAN DER VLUGT, M., *A Fibre products of Artin-Schreier curves and generalized Hamming weights of codes*. Journal of Combinatorial Theory Series A. **70**(2) (1995):337–348.

1.12 Geometría diferencial no conmutativa de planos cuánticos

Andrés Rubiano¹

Resumen

En esta charla se presentarán avances recientes sobre la noción de suavidad diferencial en el álgebra no conmutativa, con especial atención a las álgebras regulares de Artin-Schelter y familias relacionadas. Mostramos que la condición de suavidad diferencial impone fuertes restricciones estructurales; por ejemplo, las álgebras con menos generadores que su dimensión de Gelfand-Kirillov no pueden ser diferencialmente suaves. Se analizan casos específicos como las álgebras PBW bi-cuadráticas, las álgebras de Sklyanin en dimensión tres y cuatro, y ciertas extensiones dobles, proporcionando criterios sobre cuándo se preserva la suavidad diferencial. Estos resultados destacan el papel de la suavidad diferencial como una herramienta clave para extender los conceptos de la geometría diferencial clásica al ámbito no conmutativo.

Palabras & frases claves: Geometría diferencial no conmutativa, suavidad diferenciable, cálculo diferencial.

1. Introducción

El estudio de la suavidad diferencial en las álgebras no conmutativas surge como una extensión natural de la noción de suavidad de la geometría algebraica clásica al contexto no conmutativo. En el caso conmutativo, la suavidad puede caracterizarse mediante formas diferenciales, condiciones homológicas y propiedades geométricas de los esquemas. Extender estas ideas a álgebras que ya no conmutan abre nuevas vías para comprender los espacios no conmutativos y sus geometrías asociadas.

Las álgebras regulares de Artin-Schelter (AS) se han convertido en un objeto central dentro de este marco, al servir como análogos no conmutativos de las álgebras polinómicas. Poseen fuertes propiedades homológicas y aparecen en diversos contextos, desde los grupos cuánticos hasta la física matemática. Sin embargo, determinar si una álgebra AS-regular es diferencialmente suave depende de condiciones más sutiles, y explorar esos límites ha sido la motivación principal de nuestra investigación.

Uno de los resultados clave obtenidos es que la relación entre el número de generadores y la dimensión de Gelfand-Kirillov (GK) desempeña un papel decisivo: las álgebras AS-regulares con menos generadores que su dimensión GK no pueden ser diferencialmente suaves. Esta restricción estructural ofrece una herramienta poderosa para clasificar álgebras candidatas y comprender mejor qué construcciones preservan la suavidad diferencial.

En esta charla discutiré resultados sobre familias específicas de álgebras, como las álgebras PBW bi-cuadráticas, las álgebras de Sklyanin en dimensión tres y cuatro, y ciertas extensiones dobles. El enfoque se centrará en ilustrar cómo se aplican en la práctica los métodos de la geometría diferencial no conmutativa, cómo puede verificarse la suavidad diferencial y qué implicaciones tienen estos hallazgos para el panorama más amplio de la geometría algebraica no conmutativa.

¹Universidad ECCI. Correo: arubianos@eccí.edu.co

2. Contexto y Motivación

- Recordar la noción clásica de suavidad en el álgebra y la geometría conmutativa.
- Transición al mundo no conmutativo: por qué la suavidad diferencial es importante.
- Introducir las álgebras regulares de Artin-Schelter (AS) como el análogo no conmutativo de las álgebras polinómicas.

3. Definiciones y Resultados Generales

- Definir la suavidad diferencial en el contexto no conmutativo.
- Enunciar la restricción principal: la relación entre el número de generadores y la dimensión de Gelfand-Kirillov (GK).
- Explicar brevemente por qué esta condición excluye ciertas familias de álgebras.

4. Estudios de Caso

- Álgebras PBW bi-cuadráticas: presentar la clasificación obtenida y los criterios de suavidad.
- Álgebras de Sklyanin (3D y 4D): destacar su papel como casos de prueba en geometría no conmutativa, explicando cuáles son suaves y cuáles no.
- Extensiones dobles: mostrar cómo la suavidad se comporta en situaciones de mayor complejidad y señalar los problemas abiertos en esta línea.

5. Implicaciones y Direcciones Futuras

- Resumir cómo la suavidad diferencial restringe los posibles modelos de geometría no conmutativa.
- Conectar con aplicaciones: tríadas espectrales y geometría riemanniana no conmutativa.
- Mencionar el trabajo en curso sobre álgebras semi-graduadas y posibles generalizaciones.

6. Conclusiones

- La suavidad diferencial es una condición fuerte y selectiva en el mundo no conmutativo.
- Los resultados proporcionan herramientas de clasificación y una comprensión geométrica más profunda.
- Se abre el espacio para preguntas y discusión.

Referencias

- [1] V. ARTAMONOV, *Derivations of Skew PBW Extensions*. Commun. Math. Stat. **3**(4) (2015):449–457.
- [2] M. ARTIN AND W. F. SCHELTER, *Graded algebras of global dimension 3*. Adv. Math. **66**(2) (1987):171–216.
- [3] E. J. BEGGS AND S. MAJID, *Quantum Riemannian Geometry*, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Vol. 355. Springer Cham, Switzerland, 2020.
- [4] T. BRZEZIŃSKI, *Differential smoothness of affine Hopf algebras of Gelfand-Kirillov of dimension two*. Colloq. Math. **139**(1) (2015):111–119.
- [5] T. BRZEZIŃSKI, *Noncommutative Differential Geometry of Generalized Weyl Algebras*. SIGMA Symmetry Integrability Geom. Methods Appl. **12**(059) (2016):1–18.
- [6] A. CHIRVASITU AND S. P. SMITH, *Some algebras having relations like those for the 4-dimensional Sklyanin algebras*, J. Korean Math. Soc. **60**(4) (2023):745–777.
- [7] C. GALLEG0 AND O. LEZAMA, *Gröbner Bases for Ideals of σ -PBW Extensions*. Comm. Algebra. **39**(1) (2010):50–75.
- [8] O. LEZAMA, *Computation of Point Modules of Finitely Semi-Graded Rings*. Comm. Algebra. **48**(2) (2020):866–878.
- [9] O. LEZAMA AND H. VENEGAS, *Gelfand–Kirillov Dimension for Rings*. São Paulo J. Math. Sci. **14**(1) (2020):207–222.
- [10] A. REYES, *Gelfand–Kirillov Dimension of Skew PBW Extensions*. Rev. Colombiana Mat. **47**(1) (2013):95–111.
- [11] A. REYES AND C. SARMIENTO, *On the differential smoothness of 3-dimensional skew polynomial algebras and diffusion algebras*. Internat. J. Algebra and Comput. **32**(3) (2022):529–559.
- [12] A. REYES AND H. SUÁREZ, *Enveloping algebra and skew Calabi–Yau algebras over skew Poincaré–Birkhoff–Witt extensions*. Far East J. Math. Sci. (FJMS). **102**(2) (2017):373–397.
- [13] A. RUBIANO, *On differential smoothness of certain Artin-Schelter regular algebras of dimension 5*. arXiv: 2507.10853 (2025). Disponible en: <https://arxiv.org/abs/2507.10853>
- [14] A. RUBIANO AND A. REYES, *Smooth geometry of skew PBW extensions over commutative polynomial rings I*. arXiv:2409.18947 (2024). Disponible en: <https://arxiv.org/abs/2409.18947>
- [15] A. RUBIANO AND A. REYES, *A note on the differential smoothness of Skew PBW extensions*. arXiv:2410.13967 (2024). Disponible en: <https://arxiv.org/abs/2410.13967>
- [16] B. SHELTON AND M. VANCLIFF, *Schemes of Line Modules I*. J. Lond. Math. Soc. **65**(3) (2002):575–590.
- [17] E. K. SKLYANIN, *Some algebraic structures connected with the Yang-Baxter equation*. Funct. Anal. Appl. **16**(4) (1982):263–270.

- [18] E. K. SKLYANIN, *Some algebraic structures connected with the Yang-Baxter equation*. Representations of Quantum algebras. *Funct. Anal. Appl.* **17**(4) (1983):273–284.
- [19] C. WALTON, *Degenerate Sklyanin algebras and generalized twisted homogeneous coordinate rings*. *J. Algebra*. **322**(7) (2009):2508–2527.

1.13 Grafo nilpotente de anillos no conmutativos de tipo polinomial

Sebastián David Higuera Rincón¹

Resumen

En esta ponencia, nosotros presentamos un estudio sobre el diámetro y la excentricidad mínima (girth) del grafo nilpotente asociado a extensiones PBW (Poincaré-Birkhoff-Witt) torcidas definidas sobre anillos 2-primal [5]. Nuestro trabajo generaliza resultados previos obtenidos en el contexto de las extensiones de Ore, mostrando que algunas propiedades de grafos se preservan al considerar familias más generales de anillos no conmutativos. Estos resultados enriquecen la teoría de la interacción entre propiedades algebraicas de anillos y propiedades combinatorias de grafos asociados, y aportan un contexto más amplio que integra los grafos de divisores de cero y los grafos nilpotentes.

Palabras & frases claves: Grafo nilpotente, diámetro, girth, extensiones de Ore, extensiones PBW torcidas, anillos 2-primal.

1. Introducción

En los últimos años, los grafos asociados a anillos se han consolidado como una herramienta importante para comprender la estructura algebraica mediante técnicas combinatorias. Un ejemplo es el *grafo de divisores de cero*, introducido por Beck [2] y desarrollado ampliamente por Anderson y Livingston [1], quienes mostraron que este grafo refleja propiedades relevantes de los anillos.

Redmond [8] y otros autores extendieron la noción de grafo de divisores de cero al ámbito no conmutativo y analizaron sus propiedades métricas, como el diámetro y la excentricidad mínima (girth). Chen [3] y, posteriormente, Li y Li [6] definieron el *grafo nilpotente*, donde el conjunto de vértices está dado por una cierta clase de divisores de cero asociada al conjunto de elementos nilpotentes del anillo. Este grafo contiene como subgrafo al grafo de divisores de cero y, por tanto, amplía las posibilidades de análisis.

Recientemente, varios trabajos han estudiado estos grafos en el contexto de extensiones de Ore introducidos por Ore [7], obteniendo resultados significativos sobre los valores posibles del diámetro y la invarianza del girth. En este sentido, surge una pregunta natural: ¿qué ocurre cuando en lugar de extensiones de Ore se consideran extensiones no conmutativas más generales, como las extensiones PBW torcidas?. Las extensiones PBW torcidas, definidas por Gallego y Lezama [4], generalizan tanto las extensiones de Ore, como diversas familias de álgebras no conmutativas de interés en álgebra y física matemática. Estudiar los grafos nilpotentes asociados a estas estructuras permite extender y unificar resultados previos, a la vez que abre la posibilidad de nuevas aplicaciones.

Durante la ponencia se presentarán algunos conceptos fundamentales y los principales teoremas de nuestro trabajo, así como ejemplos explícitos de álgebras que no pueden escribirse como extensiones de Ore y que ilustran los resultados obtenidos. La charla estará orientada a mostrar cómo la interacción entre álgebra y teoría de grafos permite extraer conclusiones profundas acerca de la estructura

¹Universidad ECCI. Correo: shiguerar@ecci.edu.co

de anillos no conmutativos. Finalmente, se discutirán posibles líneas futuras de investigación, tales como la caracterización de otras propiedades métricas de los grafos nilpotentes en extensiones no conmutativas.

Referencias

- [1] D. F. ANDERSON, P. S. LIVINGSTON, *The zero-divisor graph of a commutative ring*. J. Algebra. **217**(2) (1999):434–447.
- [2] I. BECK, *Coloring of commutative rings*. J. Algebra. **116**(1) (1988):208–226.
- [3] P. CHEN, *A kind of graph structure of rings*. Algebra Colloq. **10**(2) (2003):229–238.
- [4] C. GALLEGO, O. LEZAMA, *Gröbner bases for ideals of σ -PBW extensions*. Comm. Algebra. **39**(1) (2011):50–75.
- [5] S. HIGUERA, A. REYES, *Nilpotent graphs over skew PBW extensions*. arXiv: 2506.00632 (2025).
- [6] A. LI, Q. LI, *A Kind of Graph Structure on Non-Reduced Rings*. Algebra Colloq. **17**(1) (2010):173–180.
- [7] O. ORE, *Theory of Non-Commutative Polynomials*. Ann. of Math. (2). **34**(3) (1933):480–508.
- [8] S. P. REDMOND, *The zero-divisor graph of a non-commutative ring*. Int. J. Commut. Rings. **1**(4) (2002):203–211.

1.14 Operador Pseudo-Diferencial de Bochner–Riesz p-ádico

Edwin Alberto Bolaño Benítez¹

Resumen

En este trabajo presentamos una formulación del operador pseudo-diferencial de Bochner–Riesz en el contexto de los números p-ádicos. Se define y estudia el núcleo asociado K_α , así como sus propiedades de semigrupo de convolución. Además, se introduce la noción de resolventes de medidas y se demuestra que el operador Bochner–Riesz p-ádico es un operador m-disipativo y generador de un semigrupo de contracción en $L^2(\mathbb{Q}_p^n)$. Finalmente, se obtiene la solución fundamental (o núcleo de calor) asociada a dicho operador, lo que abre la posibilidad de aplicaciones en procesos de Markov y ecuaciones de evolución en espacios p-ádicos.

Palabras & frases claves: análisis p-ádico, operadores pseudo-diferenciales, procesos de Markov, semigrupos de Feller, espacios de Sobolev.

1. Introducción

El estudio de operadores en campos de números p-ádicos se ha convertido en una herramienta esencial para la física matemática y el análisis armónico no arquimediano. En particular, los operadores de tipo Bochner–Riesz juegan un papel fundamental en el análisis de Fourier y en la construcción de núcleos de calor asociados a procesos de difusión en espacios p-ádicos.

2. Análisis de Fourier en números p-ádicos

Sea p un número primo fijo. Denotamos por $\mathbb{Q}_p$ el campo de los números p-ádicos, el cual es la completación de $\mathbb{Q}$ respecto al valor absoluto p-ádico $|\cdot|_p$. Para $x \in \mathbb{Q}_p^n$, la norma se define como

$$\|x\|_p = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|_p.$$

El espacio $\mathbb{Q}_p^n$ admite una medida de Haar $d^n x$ normalizada tal que $\int_{\mathbb{Z}_p^n} d^n x = 1$.

La transformada de Fourier de $f \in L^1(\mathbb{Q}_p^n)$ se define como

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{Q}_p^n} \chi_p(\xi \cdot x) f(x) d^n x, \quad \xi \in \mathbb{Q}_p^n,$$

donde χ_p es el carácter aditivo. Esta transformada es unitaria en $L^2(\mathbb{Q}_p^n)$ y satisface la igualdad de Parseval.

3. El operador de Bochner–Riesz p-ádico

¹Universidad del Norte. Correo: eabolano@uninorte.edu.co

Para $\alpha > 0$, definimos el núcleo

$$K_\alpha(x) = \int_{\mathbb{Q}_p^n} \chi_p(-x \cdot \zeta) (1 - \|\zeta\|_p)_+^\alpha d\zeta.$$

A partir de este núcleo, el operador pseudo-diferencial de Bochner–Riesz se define como

$$(B_\alpha f)(x) = (K_\alpha * f)(x).$$

Se demuestra que $B_\alpha : L^p(\mathbb{Q}_p^n) \rightarrow L^p(\mathbb{Q}_p^n)$ es un operador bien definido y contractivo.

4. Propiedades fundamentales

- El núcleo K_α determina un semigrupo de convolución $(K_\alpha)_{\alpha>0}$.
- Se construye una familia de medidas resolventes $(\rho_\lambda)_{\lambda>0}$.
- El operador Bochner–Riesz p-ádico resulta ser **m-disipativo** y **auto-adjunto** en $L^2(\mathbb{Q}_p^n)$.
- Además, se establece que genera un semigrupo de contracción en $L^2(\mathbb{Q}_p^n)$.

5. Solución fundamental asociada

Se define el núcleo de calor asociado:

$$Z(x, t) = \int_{\mathbb{Q}_p^n} \chi_p(-x \cdot \zeta) e^{-t(1-\|\zeta\|_p)^2} d\zeta, \quad x \in \mathbb{Q}_p^n, \quad t > 0.$$

Este núcleo satisface propiedades de convolución $Z_t * Z_s = Z_{t+s}$ y negatividad. Así, constituye la solución fundamental para la ecuación de evolución asociada al operador de Bochner–Riesz p-ádico.

6. Conclusiones

El análisis realizado muestra que el operador Bochner–Riesz p-ádico hereda propiedades clave de su análogo real, pero adaptadas al marco no arquimediano. Esto permite extender aplicaciones hacia procesos de Markov, teoría de semigrupos y ecuaciones diferenciales en espacios p-ádicos.

Referencias

- [1] S. ALBEVERIO, A. KHRENNIKOV, V. SHELKOVICH. *Theory of p-adic distributions: linear and nonlinear models*. Cambridge Univ. Press, 2010.
- [2] C. BERG, G. FORST. *Potential theory on locally compact abelian groups*. Springer, 1975.
- [3] T. CAZENAVE, A. HARAUX. *An Introduction to Semilinear Evolution Equations*. Oxford Univ. Press, 1998.
- [4] M. H. TAIBLESON. *Fourier analysis on local fields*. Princeton Univ. Press, 1975.

- [5] A. TORRESBLANCA-BADILLO. *Non-archimedean generalized Bessel potentials and their applications*. J. Math. Anal. Appl. **497**(12) (2021):124874.
- [6] V. VLADIMIROV, I. VOLOVICH, E. ZELENOV. *p-adic analysis and mathematical physics*. World Scientific, 1994.

1.15 Paisajes Exponenciales p -ádicos

Mauricio Jafet Santos Camargo¹, Alexandra Albarracín-Mantilla²

Resumen

En esta ponencia se mostrarán ecuaciones de ultradifusión relacionadas con paisajes energéticos de tipo exponencial. Estas ecuaciones involucran modelos p -ádicos de sistemas complejos introducidos por Avetisov et al. [1], [3].

Palabras & frases claves: Paisajes exponenciales, Transformada de Fourier p -ádica, Procesos de Lévy.

1. Introducción

Sea p un número primo. Para $x \in \mathbb{Q}$ la norma p -ádica de x se define como:

$$|x|_p = \begin{cases} 0, & \text{si } x = 0 \\ p^{-\gamma}, & \text{si } x = p^{\gamma} \frac{a}{b}, \end{cases}$$

donde a y b son enteros coprimos con p . El entero $\gamma := \text{ord}(x)$, con $\text{ord}(0) := +\infty$, es llamado el *orden p -ádico* de x . El cuerpo de números p -ádicos

$$\mathbb{Q}_p = \left\{ x = \sum_{i=k}^{\infty} x_i p^i : k \in \mathbb{Z}, k = \text{ord}(x), x_i \in \{0, 1, 2, \dots, p-1\}, x_k \neq 0 \right\},$$

es la completación del cuerpo de números racionales $\mathbb{Q}$ con respecto a la norma p -ádica $|\cdot|_p$. La norma $|\cdot|_p$ sobre $\mathbb{Q}_p$ satisface además de las propiedades básicas de una norma, la siguiente: Para todos $x, y \in \mathbb{Q}_p$ se tiene que

$$|x + y|_p \leq \max(|x|_p, |y|_p).$$

Adicionalmente, si $|x|_p \neq |y|_p$, entonces $|x \pm y|_p = \max\{|x|_p, |y|_p\}$.

Las propiedades adicionales son comúnmente conocidas como *La desigualdad triangular fuerte* o *la desigualdad untramétrica*. Esto significa que la norma p -ádica $|\cdot|_p$ es una *norma no-Arquimediana*. Una métrica o distancia métrica d_p puede ser definida sobre $\mathbb{Q}_p$ tal que para cualesquiera $x, y \in \mathbb{Q}_p$, $d_p(x, y) = |x - y|_p$. Esto significa que $(\mathbb{Q}_p, d_p)$ es un espacio métrico. Dado que la norma $|\cdot|_p$ es no Arquimediana, la métrica se adhiere a la desigualdad fuerte,

$$d_p(x, y) \leq \max\{d_p(x, z), d_p(z, y)\}, \quad x, y, z \in \mathbb{Q}_p,$$

lo que permite concluir que d es una *ultramétrica*.

¹Universidad Industrial de Santander, Colombia. Correo: mauricio2258066@correo.uis.edu.co

²Universidad Industrial de Santander, Colombia. Correo: alealbam@uis.edu.co

Se define la parte fraccionaria de $x \in \mathbb{Q}_p$, denotada $\{x\}_p$, como el número racional

$$\{x\}_p = \begin{cases} 0, & \text{si } x = 0 \text{ or } \text{ord}(x) \geq 0 \\ p^{\text{ord}(x)} \sum_{j=0}^{-\text{ord}_p(x)-1} x_j p^j, & \text{si } \text{ord}(x) < 0. \end{cases}$$

Puesto que la norma p -ádica toma valores de un conjunto discreto $\{p^r : r \in \mathbb{Z}\} \cup \{0\}$, es suficiente considerar bolas con radio de la forma p^r , donde $r \in \mathbb{Z}$. Se denota por $B_r(a) := \{x \in \mathbb{Q}_p : |x-a|_p \leq p^r\}$ la bola de radio p^r con centro en $a \in \mathbb{Q}_p$, y por $B_r(0) =: B_r$. El conjunto de números p -ádicos $B_0(0)$, también se refiere a $\mathbb{Z}_p$, conocido como el conjunto de enteros p -ádicos. Consiste en todos los números p -ádicos x que puede expresarse por la expansión:

$$x = \sum_{i=0}^{\infty} x_i p^i, \quad x_i \in \{0, 1, \dots, p-1\}.$$

La esfera de radio p^r con centro en un punto $a \in \mathbb{Q}_p$ se denota por

$$S_r(a) := \{x \in \mathbb{Q}_p : |x-a|_p = p^r\},$$

y $S_r(0) =: S_r$. Dado que $\mathbb{Q}_p$ es un espacio ultramétrico, es claro que $S_r(a) = B_r(a) \setminus B_{r-1}(a)$ para cualquier $r \in \mathbb{Z}$ y $a \in \mathbb{Q}_p$.

La topología de $\mathbb{Q}_p$ tiene características sorprendentes que la distinguen de la topología de los números reales $(\mathbb{R})$. Algunas de estas características: Cada punto de la bola $B_r(a)$ es su centro; dos bolas en $\mathbb{Q}_p$ tienen intersección no vacía si y solo si una está contenida en la otra; el conjunto de todas las bolas en $\mathbb{Q}_p$ es contable y el espacio $\mathbb{Q}_p$ es totalmente desconexo, i.e. los únicos subconjuntos conexos de $\mathbb{Q}_p$ son el conjunto vacío y los puntos. Un subconjunto de $\mathbb{Q}_p$ es compacto si y solo si es cerrado y acotado en $\mathbb{Q}_p$. Las bolas y esferas son subconjuntos compactos. Así $(\mathbb{Q}_p, |\cdot|_p)$ es un espacio topológicamente compacto que posee una estructura jerárquica natural, con la cual $\mathbb{Q}_p$ se puede visualizar como un árbol fractal infinito. A lo largo del artículo dx denotará una medida de Haar sobre $\mathbb{Q}_p$ normalizada de tal forma que $\int_{\mathbb{Z}_p} dx = 1$.

Una función complejo valuada φ definida sobre $\mathbb{Q}_p$ es llamada *localmente constante* si para cualquier $x \in \mathbb{Q}_p$ existe un entero $l := l(x)$ tal que

$$\varphi(x+x') = \varphi(x) \text{ for } x' \in B_l.$$

Denotada por $\mathcal{E}(\mathbb{Q}_p)$ el espacio lineal de funciones localmente constantes $\mathbb{C}$ -valuadas sobre $\mathbb{Q}_p$. Una función $\varphi : \mathbb{Q}_p \rightarrow \mathbb{C}$ es llamada *función Schwartz-Bruhat o función test*, si es localmente constante con soporte compacto. El $\mathbb{C}$ espacio vectorial de funciones Schwartz-Bruhat está denotado por $\mathcal{D}(\mathbb{Q}_p)$. Si $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{Q}_p)$, existe $l \in \mathbb{Z}$ tal que

$$\varphi(x+x') = \varphi(x), \quad x' \in B_l, \quad x \in \mathbb{Q}_p.$$

El mayor número $l := l(\varphi)$ es llamado el parámetro de constancia de las funciones φ .

Se define $\chi_p(y) := \exp(2\pi i \{y\}_p)$ para $y \in \mathbb{Q}_p$. La aplicación $\chi_p(\cdot)$ es un caracter aditivo sobre $\mathbb{Q}_p$, i.e. una aplicación continua de $(\mathbb{Q}_p, +)$ en S (el círculo unitario considerado como grupo multiplicativo)

satisface $\chi_p(x_0 + x_1) = \chi_p(x_0)\chi_p(x_1)$, $x_0, x_1 \in \mathbb{Q}_p$. Los caracteres aditivos de $\mathbb{Q}_p$ forman un grupo abeliano, el cual es isomorfo a $(\mathbb{Q}_p, +)$, el isomorfismo está dado por $\xi \mapsto \chi_p(\xi \cdot x)$.

Una función f definida sobre $\mathbb{Q}_p$ es llamada *integrable* (en el sentido impropio), si existe

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_{B_N} f(x) dx.$$

A este límite se le llama integral impropia y se denota por $\int_{\mathbb{Q}_p} f(x) dx$. En particular,

$$\int_{\mathbb{Q}_p} f(x) dx = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{r=-\infty}^N \int_{S_r} f(x) dx = \sum_{-\infty < r < \infty} \int_{S_r} f(x) dx.$$

El conjunto de todas las funciones integrables sobre $\mathbb{Q}_p$ se denota por $L^1(\mathbb{Q}_p)$. [4]

Si $f \in L^1(\mathbb{Q}_p)$, su transformada de Fourier está definida por

$$(\mathcal{F}f)(\xi) = \mathcal{F}_{x \rightarrow \xi}(f) := \widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{Q}_p} \chi_p(\xi \cdot x) f(x) dx, \quad \text{para } \xi \in \mathbb{Q}_p.$$

La transformada inversa de Fourier de una función $f \in L^1(\mathbb{Q}_p)$ es

$$(\mathcal{F}^{-1}f)(x) = \mathcal{F}_{\xi \rightarrow x}^{-1}(f) = \int_{\mathbb{Q}_p} \chi_p(-x \cdot \xi) f(\xi) d\xi, \quad \text{para } x \in \mathbb{Q}_p.$$

La transformada de Fourier es un isomorfismo lineal de $\mathcal{D}(\mathbb{Q}_p)$ sobre sí misma y satisface

$$(\mathcal{F}(\mathcal{F}f))(\xi) = f(-\xi),$$

para cada $f \in \mathcal{D}(\mathbb{Q}_p)$. [1] and [4]. Se demostrará que las soluciones fundamentales de estas ecuaciones son funciones de densidad de transición de los procesos de Lévy. [3]

2. Paisajes exponenciales

Sea $\mathbb{R}_+ := \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$. Fijaremos una función continua $J : \mathbb{Q}_p^n \rightarrow \mathbb{R}_+$, radial (denotado $J(x) = J(\|x\|_p)$ para todo $x \in \mathbb{Q}_p^n$) de tal manera que

$$\int_{\mathbb{Q}_p^n} J(\|x\|_p) d^n x = 1.$$

Definición 1. Diremos que la función $J(\|x\|_p)$ es del tipo exponencial [3], si existen constantes reales positivas A, B, C_1 , y una constante real $\gamma > -n$ tales que

$$A \|x\|_p^\gamma e^{-C_1 \|x\|_p} \leq J(\|x\|_p) \leq B \|x\|_p^\gamma e^{-C_1 \|x\|_p}, \text{ para cualquier } x \in \mathbb{Q}_p^n.$$

En esta charla se mostrará que la función $1 - \mathcal{F}J$ es creciente con respecto a la norma p -ádica, como en [2] es decir, si $x, y \in \mathbb{Q}_p^n$ son tales que $\|x\|_p \geq \|y\|_p$, entonces

$$1 - \mathcal{F}J(\|x\|_p) \geq 1 - \mathcal{F}J(\|y\|_p).$$

Referencias

- [1] ALBEVERIO S., KHRENNIKOV A. YU., SHELKOVICH V. M., *Theory of p -adic distributions: linear and nonlinear models*. London Mathematical Society Lecture Note Series, 370. Cambridge University Press, Cambridge, 2010.
- [2] GUTIÉRREZ-GARCÍA, I., TORRESBLANCA-BADILLO, A. *Probability density functions and the dynamics of complex systems associated to some classes of non-archimedean pseudo-differential operators*. J. Pseudo-Differ. Oper. Appl. **12** (2021):12. Disponible en: <https://doi.org/10.1007/s11868-021-00381-3>
- [3] TORRESBLANCA-BADILLO A., ZÚÑIGA-GALINDO W. A., *Ultrametric Diffusion, Exponential Landscapes, and the First Passage Time Problem*. Acta Appl Math. **157** (2018):93–116. Disponible en: <https://doi.org/10.1007/s10440-018-0165-2>
- [4] VLADIMIROV V. S., VOLOVICH I. V., ZELENOV E. I., *p -adic analysis and mathematical physics*. World Scientific, Singapore, 1994.

1.16 Permanentes, matrices idempotentes y números multifactoriales

Juan Gabriel Triana Laverde¹

Resumen

En esta charla estudiamos la familia de matrices C_n , definida de tal forma que todos los elementos de la fila i son x_i . Demostraremos que el permanente de la matriz rC_n , con $r \in \mathbb{Z}^+$, está relacionado con $n!_r$. Por otra parte, como caso particular estudiamos la matriz T_n definida como C_n pero con $x_n = 1 - x_1 - \dots - x_{n-1}$, y demostramos que T_n es idempotente.

Palabras & frases claves: Permanente de una matriz, matriz idempotente, números multifactorial.

1. Introducción

Sea $A = (a_{i,j})$ una matriz $n \times n$ y sea $N = \{1, 2, \dots, n\}$, se define el permanente de A como

$$\text{perm}(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \prod_{i=1}^n a_{i,\sigma(i)}$$

donde S_n es el grupo simétrico de permutaciones de N [5]. Recientemente, se ha visto un creciente interés en el estudio de los permanentes [7], sus propiedades [2], y su conexión con familias de números [4, 6].

El permanente de A es similar al determinante excepto porque no hay alternancia de signos [3]. Por lo anterior, la expansión de Laplace mediante menores puede adaptarse para el cálculo de permanentes de la siguiente forma

$$\text{perm}(A) = \sum_{j=1}^n A_{ij} M_{ij}$$

donde M_{ij} es el permanente de la submatriz obtenida al eliminar la i -ésima fila y la j -ésima columna de A .

Por otra parte, se definen los números multifactorial $n!_r$ mediante la recurrencia

$$n!_r = n(n-r)!_r \text{ con } (1-r)!_r = \dots = (-1)!_r = 0!_r = 1.$$

Si $r = 1$ obtenemos los números factorial, $n!_1 = n!$, con quienes se tiene la propiedad $(rn)!_r = r^n n!$. Estos números son de importancia en combinatoria y teoría de números, en The on-line encyclopedia of integer sequences, OEIS por sus siglas, hay códigos asignados para los números factorial (A000142), doble factorial (A001147) y triple factorial (A007661). En [8] son demostradas algunas identidades de los números multifactorial mediante gramáticas independientes del contexto.

¹Universitaria Agustiniiana. Correo: juang.triana@uniagustiniana.edu.co

2. Resultados

En este trabajo estudiamos la siguiente familia de matrices

$$C_n = \begin{bmatrix} x_1 & x_1 & \dots & x_1 \\ x_2 & x_2 & \dots & x_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_n & x_n & \dots & x_n \end{bmatrix}$$

Es fácil verificar que la matriz C_n es de rango 1. Incluso, podemos escribirla en la forma

$$C_n = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{bmatrix}$$

El siguiente resultado es una conexión entre permanentes y números multifactorial.

Proposición 1. $\text{perm}(rC_n) = (rn)!_r x_1 x_2 \cdots x_n$

Una matriz cuadrada A se dice idempotente si $A = A^2$ cf. [1]. Si se conoce una matriz idempotente A , a partir de ella se puede construir otra idempotente que sería $I - A$, lo cual se puede verificar ya que:

$$(I - A)(I - A) = I^2 - IA - AI + A^2 = I - 2A + A = I - A$$

Sea T_n definida como el caso particular de C_n considerando

$$x_n = 1 - x_1 - \cdots - x_{n-1},$$

sobre esta familia de matrices tenemos el siguiente resultado

Proposición 2. T_n es una matriz idempotente.

Como corolario de las proposiciones 1 y 2, tenemos una conexión entre el permanente de una familia de matrices idempotentes y números multifactorial.

Corolario 3. $\text{perm}(rT_n) = (rn)!_r x_1 x_2 \cdots x_{n-1} [1 - x_1 - \cdots - x_{n-1}]$.

Referencias

- [1] O. BAKSALARY, D. BERNSTEIN AND G. TRENKLER, *On the equality between rank and trace of an idempotent matrix*. Applied mathematics and computation. **217**(8) (2010):4076–4080.
- [2] D. DOLZAN, *Multiplicativity of permanents over matrix semirings*. Electronic journal of linear algebra. **40** (2024):446–452.
- [3] M. FIEDLER, F. HALL AND M. STROEV, *Permanents, determinants, and generalized complementary basic matrices*. Operators and matrices. **8**(4) (2014):1041–1051.

- [4] S. FU, Z. LIN AND Z. SUN, *Permanent identities, combinatorial sequences, and permutation statistics*. Advances in applied mathematics. **163** (2025):102789.
- [5] D. GLYNN, *The permanent of a square matrix*. European journal of combinatorics **31** (2010):1887–1891.
- [6] Z. LIN, W. YAN AND T. ZHAO, *Combinatorial identities arising from permanents for Euler numbers and Stirling numbers*. Advances in applied mathematics. **165** (2025):102852.
- [7] A. TARANENKO, *Permanents of multidimensional matrices: Properties and applications*. Journal of applied and industrial mathematics. **10** (2016):567–604.
- [8] J. TRIANA AND R. DE CASTRO, *The formal derivative operator and multifactorial numbers*. Revista colombiana de matemáticas. **52**(2) (2019):125–137.

1.17 Relación entre las bases de Gröbner Shirshov y las bases PBW

Karol Stefany Herrera Cano¹

Resumen

Las bases de Gröbner-Shirshov (bases GS) fueron estudiadas inicialmente por A. Shirshov en 1962. La idea surgió del deseo de encontrar una base lineal para un álgebra de Lie restringida a un conjunto de relaciones. Más tarde, su alumno L. Bokut amplió sus ideas a álgebras más generales, es decir, álgebras libres. Por otra parte, en la literatura podemos encontrar varios trabajos sobre el cálculo de bases GS para álgebras tales como el álgebra envolvente universal cuantizada, álgebras PBW (álgebra envolvente de un álgebra de Lie, álgebra de Clifford, álgebra de Weyl), álgebras de Lie simples, entre otras. En esta charla, definiremos los conceptos básicos de esta teoría, tales como: un orden monomial, la composición entre dos polinomios, un conjunto cerrado bajo la composición polinómica (estos conjuntos se denominan “bases GS”) y, por último, un lema de caracterización (Lema de Composición de Diamante); todo ello con el objetivo de describir y ejemplificar un algoritmo para calcular estas bases en un álgebra libre. Además, mencionaremos la relación entre estas bases y las bases de Gröbner (conmutativas), introducidas por B. Buchberger en 1965. Por último, discutiremos la conexión entre las bases GS y las bases PBW.

Key words and phrases: Base de Gröbner-Shirshov, álgebra libre y base PWB.

1. Introducción

El uso de las bases GS se ha extendido ampliamente en las ciencias matemáticas, por ejemplo, para demostrar el teorema de Poincaré-Birkhoff-Witt (PBW, por sus siglas en inglés). El teorema clásico de PBW establece que, dada una álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ de dimensión finita sobre $\mathbb{k}$, con un orden en la $\mathbb{k}$ -base $x_1, \dots, x_n$, los monomios estándar $x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$ para $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ forman la base del álgebra universal envolvente $U(\mathfrak{g})$ como un espacio vectorial sobre $\mathbb{k}$. De esta manera, los elementos de $U(\mathfrak{g})$ pueden ser expresados como en el anillo polinómico conmutativo $\mathbb{k}[x_1, \dots, x_n]$ incluso que la multiplicación no es conmutativa, ya que $x_j x_i = x_i x_j + [x_j, x_i]$. El teorema PBW puede demostrarse utilizando la teoría de bases de GS y el lema de composición de diamantes, ya que predicen la existencia de una base lineal para el álgebra. Con el objetivo de extender el teorema PBW a otras familias de álgebras no conmutativas, varios autores han introducido los anillos PBW y las *álgebras PBW* (e.g., [3, 6, 9], y las referencias que allí se incluyen), es decir, álgebras con base PBW, esto es, si el conjunto de monomios estándar $\{x_1^{a_1} x_2^{a_2} \cdots x_n^{a_n} \mid a_i \in \mathbb{N}\}$ es una base para el álgebra como $\mathbb{k}$ -espacio vectorial. Algunos ejemplos notables de álgebras no conmutativas que tienen bases PBW son extensiones de Ore [8], extensiones PBW tórcidas [3], G -álgebras [6], y recientemente, las álgebras de Sklyanin tridimensionales [5, Teorema 1.2].

2. Bases de Gröbner-Shirshov para álgebras libres

¹Universidad ECCI. Correo: kherrerac@eccci.edu.co

A lo largo de este documento, $\mathbb{k}$ es un campo, el conjunto X es un alfabeto y el símbolo $\mathbb{k}\{X\}$ denota el álgebra asociativa libre sobre $\mathbb{k}$ generada por X , es decir, el álgebra de polinomios no conmutativos en X con coeficientes en $\mathbb{k}$. También consideraremos X^* como el monoide libre, es decir, el conjunto de todas las palabras en X . Fije un orden monomial en $(X^*, \leq)$ y dado un polinomio $f \in \mathbb{k}\{X\}$, el *monomio principal* denotado por $\bar{f} \in X^*$ es tal que $f = \alpha_{\bar{f}}\bar{f} + \sum \alpha_i u_i$, con $0 \neq \alpha_{\bar{f}}$, $\alpha_i \in \mathbb{k}$, $u_i \in X^*$ y todo $u_i < \bar{f}$. El elemento $\alpha_{\bar{f}}$ se llama *el coeficiente principal de f* y el polinomio f se dice que es *mónico* si $\alpha_{\bar{f}} = 1$.

Definición 1 ([1, p. 37]). Sea f y g dos polinomios mónicos en $\mathbb{k}\{X\}$ y $(X^*, \leq)$ un orden monomial.

- (i) Si w es una palabra tal que $w = \bar{f}a = b\bar{g}$ para algún $a, b \in X^*$ con $|\bar{f}| + |\bar{g}| > |w|$, entonces el polinomio $(f, g)_w := fa - bg$ se llama la *composición intersección de f y g con respecto a w* .
- (ii) Si $w = \bar{f} = a\bar{g}b$ para algún $a, b \in X^*$, entonces el polinomio $(f, g)_w := f - agb$ se llama la *composición inclusión de f y g con respecto a w* .

En la composición $(f, g)_w$, w se llama *ambigüedad* o el $\text{lcm}(\bar{f}, \bar{g})$.

Definición 2 ([1, p. 37]). Dado un subconjunto no nulo $S \subset \mathbb{k}\{X\}$, decimos que la composición $(f, g)_w$ es trivial módulo S si

$$(f, g)_w = \sum \alpha_i a_i s_i b_i \in \text{Id}(S),$$

para cualquier $\alpha_i \in \mathbb{k}$, $a_i, b_i \in X^*$, $s_i \in S$ y $a_i \bar{s}_i b_i < w$. Los elementos $a_i s_i b_i$ son llamados *S -palabras*. En este caso, escribimos $(f, g)_w \equiv 0 \pmod{S}$.

Definición 3 ([1, Definición 4.1]). Sea $S \subset \mathbb{k}\{X\}$ un subconjunto no vacío de polinomios mónicos. Fije un orden $\leq$ en X . S es una *base de Gröbner-Shirshov* del ideal $\text{Id}(S)$ of $\mathbb{k}\{X\}$ con respecto a $(X^*, \leq)$ si cualquier composición $(f, g)_w$, con $f, g \in S$, es trivial módulo S .

Dado $S \subset \mathbb{k}\{X\}$ una base GS del ideal $\text{Id}(S)$ denotaremos el conjunto

$$\text{Irr}(S) := \{u \in X^* \mid u \neq a\bar{s}b, s \in S, a, b \in X^*\}$$

como todos los monomios que no tienen $\bar{s}$ como subpalabra, para todo $s \in S$. Los elementos de $\text{Irr}(S)$ son llamados *S -irreducibles*. Ahora, resultado principal en esta teoría se conoce como el lema de Composición del Diamante.

Proposición 4 ([1, Teorema 4.4]; [2, Proposición 1]). Escojamos un orden monomial $\leq$ en X^* . Consideremos el conjunto de polinomios mónicos $S \subset \mathbb{k}\{X\}$ y el ideal $\text{Id}(S) \subseteq \mathbb{k}\{X\}$ generado por S . Las siguientes condiciones son equivalentes:

- (1) S es una base de Gröbner-Shirshov en $\mathbb{k}\{X\}$.
- (2) Si $f \in \text{Id}(S)$, entonces $\bar{f} = a\bar{s}b$ para algún $s \in S$ y $a, b \in X^*$.
- (3) $\text{Irr}(S) = \{u \in X^* \mid u \neq a\bar{s}b, s \in S, a, b \in X^*\}$ es una base lineal de el álgebra $\mathbb{k}\{X\}/\text{Id}(S)$.

Para producir una base GS, “imitaremos” el algoritmo de Buchberger para extender el conjunto original. Denotaremos por S^c la *finalización* de S , esto es, el resultado de agregar todas la composiciones no triviales usando el algoritmo de Shirshov (o algoritmo de reducción) hasta obtener una base GS a partir del conjunto S . Note que S^c contiene a S y también es generado por el mismo ideal, es decir, $\text{Id}(S^c) = \text{Id}(S)$, dado que cada composición no trivial en S^c pertenece a $\text{Id}(S)$.

3. Bases PWB

Nuestro objetivo es presentar una condición necesaria y suficiente para que un álgebra definida en términos de generadores y relaciones tenga una base PBW. Siguiendo a Li [7], una $\mathbb{k}$ -álgebra finitamente generada A tiene una base PBW si el conjunto de polinomios estándar $\{x_1^{a_1} x_2^{a_2} \cdots x_n^{a_n} \mid a_i \in \mathbb{N}\}$ es una base para A como $\mathbb{k}$ -espacio vectorial. Esta álgebra A se llama un *álgebra PBW*. Suponga que A está definido por las siguientes relaciones

$$f_{ji} = x_j x_i - \lambda_{ij} x_i x_j - d_{ij}, \quad 1 \leq i < j \leq n, \quad (1)$$

donde $\lambda_{ij} \in \mathbb{k}$ y $d_{ij} = 0$ o $d_{ij} \in \mathbb{k}\{X\} - \text{Span}\{x_j x_i, x_i x_j\}$. Sea $\text{Id}(S)$ un ideal bilátero $\mathbb{k}\{X\}$ generado por $S = \{f_{ji} : 1 \leq i < j \leq n\}$. Además, asumimos que, con respecto a un orden monomial $\leq$ en X^* , las relaciones definitorias satisfacen

$$\bar{f}_{ji} = x_j x_i, \quad 1 \leq i < j \leq n. \quad (2)$$

Asumimos que ningún término de las relaciones f_{ji} es subpalabra de un término principal de los elementos de el conjunto S . Para Li, Polishchuk y Positselski, un álgebra tiene una base PBW (el cual es una base $\mathbb{k}$ -lineal) si tiene la misma base $\mathbb{k}$ -lineal del conjunto de monomios $\{x_1^{a_1} x_2^{a_2} \cdots x_n^{a_n} \mid a_i \in \mathbb{N}\}$. Esto ocurre si las relaciones del ideal son de la forma (1). El siguiente resultado fue demostrado por Green [4] utilizando bases de Gröbner y suponiendo que los elementos d_{ij} son polinomios cuadráticos homogéneos. Por otro lado, Li [7, Teorema 1.5, Cap. III] y Levandovskyy [6, Lema 2.2, Cap. I] demostraron el mismo resultado utilizando bases de Gröbner y eligiendo $\bar{d}_{ij} < x_i x_j$, es decir, el grado de los polinomios d_{ij} es como máximo 2.

Proposición 5 ([4, Teorema 2.14]). *Sea $A = \mathbb{k}\{X\}/\text{Id}(S)$ un álgebra $\mathbb{k}$ finitamente generada. Entonces, A tiene una base PBW si y solo si S es una base de Gröbner-Shirshov para $\text{Id}(S)$ con respecto a $\leq$.*

Referencias

- [1] BOKUT, L. A., CHEN, Y., *Gröbner-Shirshov Bases Theory and Shirshov Algorithm*. Novosibirsk: RIZ NSU, 2014.
- [2] BOKUT, L., *Embeddings into simple associative algebras*. Algebra Logika. **15**(2) (1976):117–142.
- [3] FAJARDO, W., GALLEG0, C., LEZAMA, O., REYES, A., SUÁREZ, H., VENEGAS, H., *Skew PBW Extensions. Ring and Module-theoretic Properties, Matrix and Gröbner Methods, and Applications*. Springer, 2020.
- [4] GREEN, E. L., *Noncommutative Gröbner Bases and Projective Resolutions*. En: *Computational Methods for Representations of Groups and Algebras: Euroconference in Essen (Germany), April 1–5, 1997*, pp. 29–60. Birkhäuser, Basel, 1999.
- [5] IYUDU, N., SHKARIN, S., *Three dimensional Sklyanin algebras and Gröbner bases*. J. Algebra. **470** (2017):379–419.

- [6] LEVANDOVSKYY, V., *Noncommutative Computer Algebra for polynomial algebras: Gröbner bases, applications and implementation*. Doctoral dissertation, Technische Universität Kaiserslautern, 2005.
- [7] LI, H., *Noncommutative Gröbner Bases and Filtered-Graded Transfer*. Springer, 2004.
- [8] ORE, O., *Theory of Non-Commutative Polynomials*. Ann. of Math. (2). **34**(3) (1933):480–508.
- [9] POLISHCHUK, A., POSITSIELSKI, L., *Quadratic Algebras*. University Lecture Series, Vol. 37. American Mathematical Society, 2005.

1.18 Subfuntores cerrados y la propiedad del lema 3×3

Juan Camilo Cala¹

Resumen

Sean $\mathcal{A}$ una categoría abeliana y F un subfuntor del bifuntor aditivo

$$\mathrm{Ext}_{\mathcal{A}}^1(-, -): \mathcal{A}^{\mathrm{op}} \times \mathcal{A} \rightarrow \mathrm{Ab}.$$

Buan probó en [2] que F es cerrado si, y solo si, F tiene la propiedad del lema 3×3 , una cierta propiedad diagramática satisfecha por la clase de las sucesiones F -exactas. La prueba de este resultado se basa en técnicas avanzadas de la teoría de categorías exactas y en el Teorema de Inmersión de Freyd–Mitchell. En esta charla, el objetivo es dar a conocer una demostración de dicho resultado usando únicamente técnicas elementales de categorías abelianas. Posteriormente, se discutirá el problema de formular dicha caracterización en el contexto de categorías extrianguladas.

Palabras & frases claves: Subfuntor; bifuntor Ext ; sucesiones exactas.

1. Introducción

En [4] Butler y Horrocks introdujeron los subfuntores del bifuntor Ext sobre categorías abelianas bajo el nombre de *clases naturales de extensiones simples* y *E-funtores*. En este trabajo, también definieron los *subfuntores cerrados* y probaron que estos estaban íntimamente relacionados con ciertas clases de morfismos, llamadas *h.f. clases*, que habían sido introducidas previamente por Buchsbaum en [3]. Esta conexión resultó ser de interés pues Buchsbaum ya había mostrado que una teoría de álgebra homológica relativa podía desarrollarse a partir de este tipo de clases. Con esto se hizo evidente que el trabajo de Butler y Horrocks fue la primera tentativa de cómo el álgebra homológica relativa se podía abordar desde el estudio de la teoría de subfuntores del Ext , una idea que fue explorada y formalizada posteriormente por Auslander y Solberg [1] en el contexto de categorías de módulos sobre álgebras de Artin.

Tiempo después, Draxler et al. [8] estudiaron los subfuntores cerrados y su relación con sus colecciones de sucesiones exactas pero desde el punto de vista de la categorías exactas en el sentido de Quillen, las cuales son una generalización natural de las categorías abelianas. Uno de sus principales resultados establece que la definición de subfuntor cerrado dada por Butler y Horrocks es redundante.

Más adelante, Buan [4] probó que un subfuntor es triangulado si, y solo si, es cerrado. Para ello, probó que los subfuntores cerrados son aquellos cuya clase inducida de sucesiones exactas satisface una cierta propiedad al estilo del Lema 3×3 . Su prueba está basada en el hecho que la colección de sucesiones exactas inducida por un subfuntor, define una estructura exacta sobre la categoría abeliana subyacente y por lo tanto, por un resultado de Keller, existe una versión del Teorema de Inmersión de Freyd–Mitchell que aplica sobre este tipo de categorías, esto es, hay un funtor fiel, pleno y exacto que envía las sucesiones exactas de la colección inducida a sucesiones exactas en una

¹Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM). Correo: jccalab@gmail.com

categoría abeliana. Así pues, el problema se trivializa porque el lema 3×3 es cierto para categorías abelianas.

Recientemente, en [5] fue dada una demostración del resultado de Buan utilizando únicamente técnicas elementales de categorías abelianas. Las ideas de esta demostración dieron espacio a la pregunta de si una caracterización de este estilo podría formularse ahora en un contexto más general, como por ejemplo las categorías extrianguladas, las cuales fueron introducidas recientemente por Nakaoka y Lu [8] en un intento de unificar las categorías abelianas, exactas y trianguladas. La dificultad latente de trabajar sobre esta generalidad es que no se tiene certeza de si las técnicas existentes sobre categorías abelianas, exactas o trianguladas, funcionan correctamente sobre categorías extrianguladas. Por mencionar alguna, no existe a la fecha una versión del Teorema de Inmersión de Freyd–Mitchell sobre categorías extrianguladas. En ese sentido, en [6] se introduce la propiedad del lema 3×3 para subfuntores en categorías extrianguladas y se demuestra que un subfuntor es cerrado si, y solo si, satisface tal propiedad.

2. Contenido

En cada una de las siguientes definiciones, $\mathcal{A}$ denota una categoría abeliana.

Definición 1. Un **subfuntor** de $\text{Ext}_{\mathcal{A}}^1(-, -)$ es un funtor $F: \mathcal{A}^{\text{op}} \times \mathcal{A} \rightarrow \text{Set}$ tal que para cada par de objetos $A, C \in \mathcal{A}$ se satisface lo siguiente:

- (i) $F(C, A) \subseteq \text{Ext}_{\mathcal{A}}^1(C, A)$. Los elementos de $F(C, A)$ son llamados **sucesiones F -exactas**.
- (ii) Para cualesquiera $f: C' \rightarrow C$ y $g: A \rightarrow A'$, el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} F(C, A) & \xrightarrow{\subseteq} & \text{Ext}_{\mathcal{A}}^1(C, A) \\ F(f, g) \downarrow & & \downarrow \text{Ext}_{\mathcal{A}}^1(f, g) \\ F(C', A') & \xrightarrow{\subseteq} & \text{Ext}_{\mathcal{A}}^1(C', A') \end{array}$$

Diremos que F es un **subfuntor propio** si $F(C, A) \neq \emptyset$ para cualesquiera $A, C \in \mathcal{A}$. Además, F es **cerrado** si sus funtores inducidos en cada variable resultan ser exactos sobre la clase de las sucesiones F -exactas.

Definición 2. Sea $\mathcal{M}$ una clase de morfismos de $\mathcal{A}$. Consideremos las siguientes propiedades para $\mathcal{M}$:

- (A) $\mathcal{M}$ contiene todos los monomorfismos y epimorfismos cero de $\mathcal{A}$.
- (B) Si $f \in \mathcal{M}$ y $f = xg$ para algunos isomorfismos x e y , entonces $g \in \mathcal{M}$.
- (C) $f \in \mathcal{M}$ si, y solo si, $k_f, c_f \in \mathcal{M}$, donde k_f y c_f son el núcleo y el conúcleo de f , respectivamente.
- (D) Si f y gf son monomorfismos y $gf \in \mathcal{M}$, entonces $f \in \mathcal{M}$.
- (D*) Si g y gf son epimorfismos y $gf \in \mathcal{M}$, entonces $g \in \mathcal{M}$.
- (E) Si $f, g \in \mathcal{M}$ son monomorfismos y gf está definido, entonces $gf \in \mathcal{M}$.

(E*) Si $f, g \in \mathcal{M}$ son epimorfismos y gf está definido, entonces $gf \in \mathcal{M}$.

Decimos que $\mathcal{M}$ es una **f.clase** si satisface las propiedades (A)–(D*). Si $\mathcal{M}$ satisface todas ellas, decimos que es una **h.f.clase**.

Por ejemplo, no es difícil ver que todo subfunctor propio F induce de manera natural una clase de morfismos $\mathcal{M}_F$, cuyos elementos son llamados F -morfismos.

Definición 3. Decimos que un subfunctor propio F **tiene la propiedad del lema 3×3** si dado un diagrama conmutativo con filas y columnas exactas

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{a} & B & \xrightarrow{b} & C \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow i & & \downarrow j & & \downarrow c \\
 0 & \longrightarrow & D & \xrightarrow{d} & E & \xrightarrow{e} & G \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow k & & \downarrow l & & \downarrow f \\
 0 & \longrightarrow & H & \xrightarrow{g} & I & \xrightarrow{h} & J \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & 0 & & 0 & & 0
 \end{array}$$

tal que la primera y la tercera columna y todas las filas son F -exactas, entonces también la segunda fila es F -exacta.

En esta ponencia, se abordarán los resultados que hay detrás de cada una de las definiciones anteriores, con el propósito de enunciar la siguiente conexión:

Teorema 4 ([5, Theorem 3.18]). Para una categoría abeliana $\mathcal{A}$ y un subfunctor propio F , las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- (a) F es cerrado.
- (b) $\mathcal{M}_F$ es una h.f.clase.
- (c) F tiene la propiedad del lema 3×3 .

Posteriormente, se discutirá el problema de formular el resultado anterior en el contexto de categorías extrianguladas [6, Theorem 2.3].

Referencias

- [1] M. AUSLANDER, Ø. SOLBERG, *Relative homology and representation theory I: Relative homology and homologically finite subcategories*. Comm. Algebra. **21**(9) (1993):2995–3031.
- [2] A. B. BUAN, *Closed subbifunctors of the extension functor*. J. Algebra. **244**(2) (2001):407–428.
- [3] D. A. BUCHSBAUM, *A note on homology in categories*. Ann. of Math (2). **69**(1) (1959):66–74.

- [4] M. C. R. BUTLER, G. HORROCKS, *Classes of extensions and resolutions*. Philos. Trans. Roy. Soc. London Ser. A. **254**(1039) (1961):155–222.
- [5] J. C. CALA, *An elementary proof of a criterion for subfunctors of EXT to be closed*. Indag. Math. **36**(3) (2025): to appear.
- [6] J. C. CALA, S. R. HERNÁNDEZ, *A characterization of closed subfunctors through the 3×3 -lemma property in extriangulated categories*. arXiv:2504.15579 (2025).
- [7] P. DRÄXLER, I. REITEN, S. SMALØ, Ø. SOLBERG; WITH AN APPENDIX BY B. KELLER, *Exact categories and vector space categories*. Trans. Amer. Math. Soc. **351**(2) (1999):647–682.
- [8] H. NAKAOKA, Y. PALU, *Extriangulated categories, Hovey twin cotorsion pairs and model structures*. Cah. Topol. Géom. Différ. Catég. **60**(2) (2019):117–193.

1.19 Un vistazo a la categoría de módulos semi-graduados

Andrés Chacón Capera¹

Resumen

Los anillos semi-graduados, introducidos por Lezama y Latorre en 2017, constituyen una generalización de los anillos graduados y de las extensiones PBW torcidas. Esta nueva clase de estructuras ha mostrado un notable potencial para extender resultados previamente establecidos en contextos graduados, además de ofrecer mayor flexibilidad para abordar problemas algebraicos. En esta charla se presentará un panorama introductorio sobre los módulos semi-graduados y las principales propiedades que se han podido establecer acerca de su categoría asociada. Asimismo, se comentarán algunas preguntas abiertas que buscan orientar futuros trabajos de investigación en esta línea.

Palabras & frases claves: Módulo semi-graduado, anillo semi-graduado, álgebra no conmutativa.

1. Introducción

El estudio de los anillos graduados ha sido de gran importancia en el álgebra moderna debido a su utilidad en problemas de geometría algebraica, álgebra homológica y teoría de representaciones. No obstante, este marco teórico resulta insuficiente en ciertos escenarios, donde las restricciones de la graduación estricta limitan el alcance de las herramientas disponibles.

En este contexto, Lezama y Latorre introdujeron en 2017 los anillos semi-graduados como una extensión natural de los anillos graduados y de las extensiones PBW torcidas. Esta clase de anillos conserva parte de la estructura graduada, pero permite mayor generalidad, lo que abre la puerta a nuevas aplicaciones y a la posibilidad de extender resultados conocidos a un marco más amplio.

El interés por los anillos semi-graduados no radica únicamente en sus propiedades intrínsecas, sino también en el estudio de sus categorías de módulos semi-graduados, pues estas proporcionan un lenguaje adecuado para comprender con mayor profundidad las herramientas que estos anillos ofrecen. En particular, analizar aspectos categóricos como la existencia de inyectivos o las condiciones bajo las cuales estas categorías pueden ser consideradas de tipo Grothendieck, resulta esencial para avanzar en la consolidación de una teoría coherente.

2. Categorías de módulos semi-graduados

La categoría de módulos sobre un anillo graduado ha demostrado ser una herramienta poderosa en álgebra y geometría no conmutativa. De manera análoga, la categoría de módulos semi-graduados se presenta como un marco natural para estudiar a los anillos semi-graduados.

En los últimos años se ha demostrado que esta categoría es abeliana (Lezama y Latorre, 2017) y que cumple la condición Ab5, lo cual la acerca a las propiedades de las categorías de Grothendieck.

¹Universidad Industrial de Santander. Correo: andchaca@uis.edu.co

Estos resultados iniciales confirman que se trata de un entorno manejable, en el que es posible aplicar técnicas homológicas y categóricas de uso común en otros contextos algebraicos.

La charla presentará un panorama general de estas propiedades, así como una ilustración de cómo surgen los módulos semi-graduados.

Referencias

- [1] LEZAMA, O., *Some open problems in the context of skew PBW extensions and semi-graded rings*. Communications in Mathematics and Statistics. **9**(3) (2021):347–378.
- [2] LEZAMA, O., & LATORRE, E., *Non-commutative algebraic geometry of semi-graded rings*. International Journal of Algebra and Computation. **27**(4) (2017):361–389.

1.20 Coloraciones del Cubo: Aplicacando el Lema de Burnside

Laura M. Castro Bermudez¹, John W. Guzmán Vega²

Resumen

Este trabajo aborda el problema combinatorio de contar coloraciones distintas de un cubo considerando equivalencia bajo sus rotaciones. La herramienta central es el lema de Burnside, un resultado de la teoría de grupos que puede entenderse también dentro del marco de la teoría de representaciones, donde las configuraciones distintas corresponden a invariantes de la acción del grupo de simetrías. En este caso, el grupo rotacional del cubo isomorfo a S_4 permite traducir un problema visual y geométrico en un cálculo algebraico elegante. La propuesta muestra así cómo conceptos abstractos encuentran aplicación en problemas concretos de gran atractivo combinatorio y geométrico.

Palabras & frases claves: Cubo, coloraciones, lema de Burnside.

1. Introducción

Las **representaciones de grupos** pueden entenderse como acciones de un grupo sobre espacios vectoriales, donde cada simetría se traduce en una transformación lineal. Este marco algebraico permite estudiar problemas de simetrías a través de invariantes y caracteres, estableciendo un puente entre la teoría abstracta y aplicaciones concretas en áreas como la física, la geometría y la combinatoria [1, 2].

En este contexto, el **Lema de Burnside** surge como una herramienta fundamental. Formulado como un método de conteo de órbitas bajo la acción de un grupo, puede entenderse también como una consecuencia de la teoría de caracteres: el número de configuraciones distintas corresponde a la dimensión del subespacio de invariantes. De esta manera, un problema de enumeración se resuelve mediante la estructura algebraica subyacente [3].

Un ejemplo emblemático y visualmente atractivo es el de las **coloraciones del cubo**, te invitamos a hacerte una pregunta diferente: si tomamos un cubo y pintamos sus caras, ¿de cuántas formas distintas puede hacerse? A simple vista parece un problema sencillo, pero cuando consideramos que rotar el cubo puede hacer que dos coloraciones se vean igual, la cuenta se vuelve mucho más interesante. El grupo de simetrías rotacionales, isomorfo a S_4 , actúa sobre el conjunto de coloraciones posibles, y el Lema de Burnside permite calcular cuántas son esencialmente diferentes bajo rotación. Este caso muestra cómo la teoría de representaciones y el álgebra lineal ofrecen una mirada moderna para resolver un problema clásico de combinatoria con fuerte componente geométrico [4, 5].

¹Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Correo: lamcastrob@udistrital.edu.co

²Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Correo: jwguzmanv@udistrital.edu.co

Referencias

- [1] LAVIÉ, J. Y SOSA, N., *Representaciones lineales de grupos finitos*. Trabajo Final. Facultad de Ciencias Exactas, Universidad Nacional de La Plata, 2018. Director: Dr. Demetrio Stojanoff.
- [2] ETINGOF, P., GOLBERG, O., HENSEL, S., LIU, T., SCHWENDNER, A., VAINTROB, D. Y YUDOVINA, E., *Introduction to Representation Theory*. American Mathematical Society, 2011.
- [3] JIN, J., *Analysis and Applications of Burnside's Lemma*. (2018).
- [4] CHONOLES, Z., *Counting Colorings Cleverly*. University of Chicago, (s.f).
- [5] GALLIAN, J. A., *Contemporary Abstract Algebra 7th ed*. Brooks/Cole, Cengage Learning, Belmont, CA, 2010.

1.21 Cuerpos de Funciones algebraicas y Extensiones de Kummer

Edwin José Ávila¹, Johan Andrey Santamaría²

Resumen

En este póster se hace una presentación de las definiciones y resultados de la teoría de cuerpos de funciones algebraicas y se muestran curvas con “muchos” puntos racionales del cuerpo de funciones racionales $\mathbb{F}_q(x)$ vía extensiones de Kummer, las cuales satisfacen que el número N_q de lugares de grado uno del cuerpo de funciones algebraicas está cercano a la cota de Weil, es decir, $N_q \leq q + 1 + 2[g\sqrt{q}]$, ver [1].

Palabras & frases claves: Cuerpos de funciones algebraicas, Extensiones de Kummer, Cota de Weil.

1. Introducción

Sea $\mathbb{F}_q$ un cuerpo finito con $q = p^n$ elementos y $\overline{\mathbb{F}}_q$ la clausura algebraica de $\mathbb{F}_q$. Dado un polinomio $f(x, y) \in \mathbb{F}_q[x, y]$ irreducible sobre $\overline{\mathbb{F}}_q$, el conjunto:

$$C_f = \{(\alpha, \beta) \in \overline{\mathbb{F}}_q \times \overline{\mathbb{F}}_q : f(\alpha, \beta) = 0\}$$

es una curva algebraica afín (sobre el cuerpo finito $\mathbb{F}_q$) y los puntos $P = (\alpha, \beta) \in C_f$ tal que $(\alpha, \beta) \in \mathbb{F}_q \times \mathbb{F}_q$ se llaman puntos racionales de C_f sobre $\mathbb{F}_q$. En 1940 Andre Weil, [6] probó la hipótesis de Riemann para curvas sobre cuerpos finitos obteniendo como consecuencia, una cota superior para el número de puntos racionales de una curva C de género g sobre un cuerpo finito de cardinalidad q , a saber:

$$|C(\mathbb{F}_q)| \leq q + 1 + 2g\sqrt{q},$$

donde $C(\mathbb{F}_q)$ denota el conjunto de puntos racionales de la curva C . En la década del 80, Goppa [3], introdujo códigos asociados a curvas algebraicas conocidos como códigos geométricos de Goppa, en los cuales se destacan dos propiedades que debe tener una curva de tal forma que el código inducido tenga buenos parámetros:

1. La curva debe ser explícita, es decir debe obtenerse mediante una ecuación de la forma $f(x, y) = 0$.
2. El número de puntos racionales de dicha curva debe estar cercano a la cota de Weil.

En este póster se muestran curvas (cuerpos de funciones algebraicas) con muchos puntos racionales (lugares de grado uno) es decir, que el número $N(F/\mathbb{F}_q) := N_q$ de puntos racionales satisface $a \leq N_q \leq b$, donde b es la cota de Weil, Ihara o Serre, para un cuerpo de funciones de género g y $a = b/\sqrt{2}$. Dichas curvas se obtienen de la recta proyectiva $\mathbb{F}_q(x)$ vía extensiones de Kummer.

¹Universidad Industrial de Santander, Colombia. Correo: edwin2212512@correo.uis.edu.co

²Universidad Industrial de Santander, Colombia. Correo: johan2220960@correo.uis.edu.co

Una extensión

$$F' = F(y) \text{ con } y^r = u,$$

se llama una extensión de Kummer de F , si F/K es un cuerpo de funciones algebraicas, ζ una raíz r -ésima primitiva de la unidad contenida en K (con $r > 1$ y r primo relativo con la característica de K) y $u \in F$ que satisface:

$$u \neq w^d, \quad \forall w \in F \text{ y } d|r, \text{ con } d > 1.$$

Referencias

- [1] ALBARRACÍN MANTILLA, A., GARZÓN ROJAS A., *Productos fibrados de extensiones de Kummer y Artin-Schreier*. Rev. Acad. Colomb. Cienc. **34** (2010):513–520.
- [2] FULTON W., *Algebraic curves*. Benjamin, 1969.
- [3] GOPPA V. D., *Codes on algebraic curves*. Sov. Math. **24** (1981):170–172.
- [4] IHARA Y., *Some remarks on the number of rational points of algebraic curves over finite fields*. J. Fac. Sci. Tokyo **28** (1981):721–724.
- [5] SERRE J-P., *Sur le nombre de points rationnels d'une courbe alge'brique sur un cops fini*. C.R.Sci. Paris, Série I **296** (1993):397–402.
- [6] STICHTENOTH H., *Algebraic Function Fields and Codes*. Springer-Verlag, Berlin, 1993.

1.22 Curvas de Artin-Schreier: género y puntos racionales

Claro Melo Denzel Olived¹, Viviescas Ortiz Keiner Miguel²

Resumen

Este trabajo presenta resultados concretos sobre curvas del tipo Artin-Schreier definidas sobre cuerpos finitos, con énfasis en el análisis de su estructura geométrica. Se realiza el cálculo explícito del género mediante el estudio de las ramificaciones, y se estima el número de puntos racionales. Los valores obtenidos se comparan con la cota teórica establecida por el teorema de Hasse-Weil, lo que permite evaluar el comportamiento de estas curvas en característica positiva.

Este trabajo es presentado en el marco del semillero de Curvas Algebraicas y Aplicaciones - 4387 ofrecido a estudiantes de pregrado de la Universidad Industrial de Santander y dirigido por el profesor Arnoldo Teherán Herrera.

Palabras & frases claves: Cuerpos finitos, curvas de Artin-Schreier, género, puntos racionales, cota de Hasse-Weil.

1. Introducción

Sea q potencia de un primo p , $\mathbb{F}_q$ el cuerpo finito con q elementos, se denota por $\overline{\mathbb{F}}_q$ su clausura algebraica; considere C una **curva** sobre $\mathbb{F}_q$, es decir, una variedad algebraica, proyectiva $C \subseteq \mathbb{P}^r(\overline{\mathbb{F}}_q)$, de dimensión 1, que es no singular y geoméricamente irreducible sobre $\mathbb{F}_q$. Si se denota $N(C(\mathbb{F}_q))$ el número de puntos racionales de C sobre $\mathbb{F}_q$ y por $g = g(C)$ el género de la curva, la cota de Hasse-Weil establece que,

$$\#N(C(\mathbb{F}_q)) \leq 1 + q + 2gq^{1/2}.$$

Esta desigualdad proporciona una estimación fundamental en el estudio de curvas sobre cuerpos finitos, con diversas aplicaciones, entre ella la teoría de códigos.

En este trabajo se presenta el estudio de curvas con modelo plano afín, particularmente aquellas definidas por ecuaciones de la forma,

$$y^p - y = f(x), \quad \text{donde } f(x) \in \mathbb{F}_q(x),$$

Estas curvas son conocidas como curvas de Artin-Schreier, y surgen naturalmente en el contexto de extensiones de cuerpos de funciones en característica p . El análisis se centra en sus propiedades geométricas y aritméticas, incluyendo el cálculo del género, el comportamiento de la ramificación, y la estimación del número de puntos racionales en relación con la cota de Hasse-Weil.

Referencias

[1] FULTON W., *Algebraic curves*. Benjamin, 1969.

¹Investigador en semillero de investigación. Correo: denzel2230145@correo.uis.edu.co

²Investigador en semillero de investigación. Correo: keiner2230138@correo.uis.edu.co

- [2] SERRE J-PR., *Sur le nombre de points rationnels d'une courbe algébrique sur un corps fini*. C. R. Sci. Paris, Serie I. **296** (1983):397–402.
- [3] STICHTENOTH H., *Algebraic function fields and codes*. Springer-Verlag, Berlin, 1993.
- [4] HIRSCHFELD J., KORCHMÁROS G., TORRES F., *Algebraic curves over a Finite Field*. Princeton University Press, 2008.
- [5] GARCIA A, STICHTENOTH H., *Topics in geometry, coding theory and cryptography*. Springer Science and Business Media, 2006.
- [6] GLASBY S., *Hilbert's Theorem 90*. arXiv:2505.00346v3 (2025).

1.23 Dominios de Integridad y Enteros de Eisenstein

Juan David Gaitán Zamudio¹

Resumen

Estudiaremos el anillo de los enteros de Eisenstein $\mathbb{Z}[\omega]$, con especial atención a la estructura de sus elementos primos, la aritmética modular (módulo n) del anillo cociente E_n de $\mathbb{Z}[\omega]$ con sus ideales primales y sus conexiones con la aritmética computacional a través de una caracterización de los elementos von Neumann en $E_n = \{a + b\omega : a, b \in \mathbb{Z}_n\}$.

Palabras & frases claves: Enteros de Eisenstein, campo cuadrático, Teoría de Números.

1. Introducción

Consideraremos los campos de extensión algebraicos de $\mathbb{Q}$ de grado 2 llamados **Campos cuadráticos**. Un caso particular son los **enteros de Eisenstein**

$\mathbb{Z}[\omega] = \{a + b\omega : a, b \in \mathbb{Z}\}$, donde $\omega = \frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$ es una raíz cúbica primitiva. Este anillo es el **anillo de enteros algebraicos** del campo cuadrático $\mathbb{Q}(\sqrt{-3})$.

2. Contenido

En esta presentación, veremos algunas propiedades importantes sobre dominios de integridad que satisface $\mathbb{Z}[\omega]$, fundamentales para describir sus elementos primos y sus unidades, representadas en el plano complejo de una forma simétrica dada su construcción (Ver Figura 1).

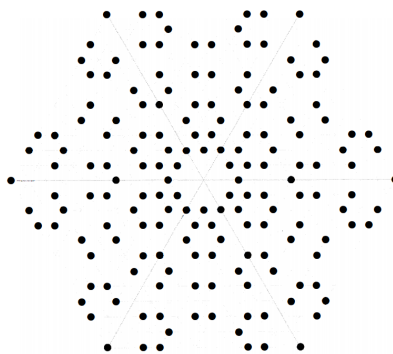


Figura 1: Primos de Eisenstein en el plano complejo.

Describiremos los enteros de Eisenstein módulo n , construyendo el anillo cociente:

$$\mathbb{Z}[\omega]/n\mathbb{Z}[\omega] \cong E_n = \{a + b\omega : a, b \in \mathbb{Z}_n\}$$

¹Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Correo: jdgaitanz@udistrital.edu.co

el cual es anillo conmutativo con unidad y es un dominio de ideales principales. Exploraremos este isomorfismo para ver la estructura de los Enteros de Eisenstein módulo n .

Referencias

- [1] SARADA BANDARA, *An Exposition of the Eisenstein Integers*. In: Eastern Illinois University - Student Theses Publications, 2016.
- [2] JOHN B. FRALEIGH, *A First Course in Abstract Algebra 7th ed.* Addison-Wesley - Pearson, 2003. ISBN: 978-0201763904.
- [3] EMAD ABU OSBA OSAMA ALKAM, *On Eisenstein Integers Modulo n* . International Mathematical Forum, **5**(22) (2010):1075–1082.
- [4] KENNETH S. WILLIAMS, SABAN ALACA, *INTRODUCTORY ALGEBRAIC NUMBER THEORY*. 1st ed. Cambridge University Press, New York, 2004. ISBN: isbn-13 978-0-521-54011-7.

1.24 Teorema de Maschke: Una mirada a las representaciones de grupos.

Nicole Dayanna Vargas Lozano¹, Valeria Montaña Moreno²

Resumen

Dentro de la teoría de representaciones de grupos, uno de los resultados fundamentales es el teorema de Maschke, éste muestra que todo FG -módulo no nulo es una suma directa de FG -submódulos irreducibles. Por esta razón, el presente poster muestra la importancia de este teorema en la clasificación de grupos, algunas aplicaciones y el papel esencial que desempeñan los módulos irreducibles.

Palabras & frases claves: FG -módulos, representaciones de grupos, teorema de Maschke

1. Introducción

El 12 de abril de 1896, F. G. Frobenius escribió su primera carta a R. Dedekind para describir sus nuevas ideas sobre cómo factorizar un polinomio homogéneo cierto asociado con un grupo finito, llamado el “determinante de grupo”. Dos cartas más fueron enviadas rápidamente (el 17 y 26 de abril de 1896), y para finales de abril de ese año, Frobenius tenía en su poder los fundamentos del carácter de la teoría de grupos finitos.

Tomaría algo más de tiempo antes de que la idea de las representaciones de grupos se desarrollara plenamente, pero las famosas *cartas Frobenius–Dedekind* de abril de 1896 ahora son aclamadas por los historiadores como el evento más significativo que marca el nacimiento de la **teoría de la representación** de grupos finitos [5].

Esta teoría surgió de la necesidad de crear una herramienta para abordar problemas de la teoría de grupos mediante cálculos elementales de álgebra lineal [2]. El objetivo de esta teoría es la descripción y clasificación de las distintas representaciones de un grupo finito G .

Un resultado importante que permite descomponer representaciones de grupos de un grupo finito en elementos irreducibles es el teorema de Maschke, introducido por el matemático alemán Heinrich Maschke quien se interesó por las ideas de Felix Klein sobre el uso de la teoría de grupos para resolver ecuaciones algebraicas. Maschke comenzó a trabajar en grupos finitos de transformaciones lineales y publicó el teorema de Maschke en 1899 [1]. El teorema dice lo siguiente:

Teorema (Teorema de Maschke [3]). Sea G un grupo finito y sea F un cuerpo cuya característica no divide a $|G|$. Si V es un FG -módulo y U es un submódulo de V , entonces V tiene un submódulo W tal que

$$V = U \oplus W$$

(es decir, todo submódulo es un sumando directo).

¹Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Correo: ndvargas1@udistrital.edu.co

²Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Correo: vmontanom@udistrital.edu.co

Este teorema establece que las representaciones lineales de un grupo finito sobre cuerpos de característica 0, como los números complejos, reales o racionales, se descomponen en piezas irreducibles.

Las aplicaciones del teorema de Maschke serán para FG -módulos finitamente generados y para la clasificación de representaciones de grupos. Por ejemplo, una consecuencia directa de este teorema es que todo FG -módulo es una suma directa de submódulos irreducibles de FG , donde F es $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$. Esto es importante porque, en esencia, reduce la teoría de representaciones al estudio de FG -módulos irreducibles [1].

Referencias

- [1] ABIGAIL SHELDON, *Maschke's Theorem*. Department of Mathematics The University of Chicago, 2006. Disponible en: <https://www.math.uchicago.edu/~may/VIGRE/VIGRE2006/PAPER S/Sheldon.pdf>.
- [2] DAVID KANG, *Group Representations and Character Theory*. Department of Mathematics The University of Chicago, 2001. Disponible en: <https://www.math.uchicago.edu/~may/VIGRE/VIGRE2011/REUPapers/KangD.pdf>
- [3] DAVID S. DUMMIT & RICHARD M. FOOTE, *Abstract Algebra*. John Wiley & Sons, Inc, New York. **3** (2004):840–864.
- [4] T.Y. LAM, *A First Course in Noncommutative Rings*. Springer-Verlag. **2** (2001):101–152.
- [5] T.Y. LAM, *Representations of finite groups: A hundred years, Part I*. Notices of the American Mathematical Society. **45** (1998):361.

1.25 Teorema de Riemann-Roch: Algunas aplicaciones en Curvas Algebraicas

Nicole Dayanna Vargas Lozano¹

Resumen

En esta monografía se pretende estudiar algunas aplicaciones del teorema de Riemann-Roch en la clasificación de curvas algebraicas a través de su género. Se presentan las definiciones necesarias para su comprensión, incluyendo conceptos de geometría algebraica, funciones racionales y divisores.

Palabras & frases claves: curvas algebraicas–divisores–geometría algebraica–Teorema de Riemann–Roch

1. Introducción

El teorema de Riemann–Roch es uno de los resultados fundamentales para la clasificación de curvas algebraicas. Su origen se remonta al año 1850, cuando fue inicialmente planteado por Bernhard Riemann y posteriormente desarrollado por Gustav Adolph Roch. Riemann fue el primero en establecer una relación entre el análisis complejo y la geometría algebraica, demostrando que dos funciones meromorfas cualesquiera definidas sobre una curva algebraica están algebraicamente relacionadas. Más adelante, con las aportaciones de su alumno Gustav Roch, surgió el teorema de Riemann–Roch, que conecta el espacio de funciones racionales definidas sobre una curva algebraica con su género, a través del concepto de divisor [1].

Varios matemáticos como Alexander von Brill y Max Noether, hasta Guido Castelnuovo y Federigo Enriques, a lo largo de los años tomaron el teorema como eje central para sus investigaciones en la teoría de funciones complejas y en el estudio de curvas y superficies algebraicas, encontrando conexiones con diferentes áreas de la matemática como la geometría algebraica y la teoría de módulos [2]. En este contexto, el análisis del teorema de Riemann–Roch no solo permite una comprensión profunda de las propiedades de las curvas algebraicas, sino que también proporciona herramientas fundamentales para su clasificación y estudio en geometría algebraica contemporánea.

2. Teorema de Riemann-Roch y curvas algebraicas

Existen varias versiones del teorema de Riemann–Roch, cada una adaptada a diferentes contextos matemáticos. La demostración de este teorema puede llegar a ser bastante técnica, donde se requiere un amplio conocimiento de la teoría; en [3] se enuncia el teorema y se demuestra desde el punto de vista de teoría de haces y cohomología, mientras que en [4] se aborda desde el análisis complejo y topología, logrando establecer una conexión entre las superficies de Riemann y las curvas algebraicas.

¹Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Correo: ndvargas1@udistrital.edu.co

Sin embargo, en el presente trabajo, se aborda la versión del teorema de Riemann–Roch enunciada en el artículo [1], una versión clásica del teorema por medio de una igualdad aplicada a curvas algebraicas. El enfoque principal consiste en analizar cómo el teorema de Riemann–Roch proporciona herramientas efectivas para el estudio de curvas algebraicas mediante el género, abordando los fundamentos conceptuales necesarios para su correcta interpretación y aplicación.

3. Conclusiones

Estudiar las implicaciones más destacadas de un teorema relevante en las distintas áreas de la matemática moderna puede ser un trabajo exigente pero satisfactorio. Es interesante el trabajo de caracterizar curvas algebraicas por su género, y cómo el teorema de Riemann–Roch facilita este proceso, a través del uso de divisores y mapeos asociados a estos.

En esta monografía se ha presentado una introducción a los conceptos necesarios para entender el teorema de Riemann–Roch en curvas algebraicas, iniciando con definiciones básicas como curvas algebraicas, funciones racionales y divisores. Posteriormente, se exploraron conceptos más avanzados como el divisor canónico y el género de una curva.

Gracias a este estudio, se logra entender cómo el teorema permite caracterizar curvas algebraicas por medio de sus propiedades, en este caso, a través del género. Además, es importante recalcar la importancia de continuar con el estudio de las distintas perspectivas del teorema de Riemann–Roch, en diferentes contextos como en geometría diferencial y a través de la teoría de cohomología; adicionalmente, explorar aplicaciones en geometría algebraica y áreas como superficies de Riemann y variedades de mayor dimensión.

Referencias

- [1] DOMINIC WYNTER, *An exposition of the Riemann-Roch Theorem for curves*, 2016. URL: <https://math.uchicago.edu/~may/REU2016/REUPapers/Wynter.pdf>
- [2] JEREMY GRAY, *THE RIEMANN-ROCH THEOREM AND GEOMETRY, 1854-1914*. URL: <http://sites.math.rutgers.edu/~tunnell/courses/574/574-S19/Gray.pdf>
- [3] R. HARTSHORNE, *Algebraic Geometry*. New York: Springer-Verlag, 1977.
- [4] RICK MIRANDA, *Algebraic Curves and Riemann Surfaces*. Vol. 5. American Mathematical Society, 1995.

ANÁLISIS FUNCIONAL, SISTEMAS DINÁMICOS Y TEORÍA DESCRIPTIVA DE CONJUNTOS



2.1 Operadores de Toeplitz radiales en espacios de Fock-Segal-Bargmann

Kevin Esmeral García¹, Egor A. Maximenko²

Resumen

Los operadores de Toeplitz cuyos símbolos son funciones radiales han sido muy estudiados en varios espacios de funciones analíticas y funciones armónicas. Esmeral y Maximenko en [2] en el estudio de las C^* -álgebras conmutativas generadas por operadores de Toeplitz radiales actuando sobre el espacio de Fock-Segal-Bargmann demostraron que las sucesiones espectrales resultantes de la diagonalización de operadores de Toeplitz radiales son raíz-oscilante y si los símbolos tienen límites al infinito generan un conjunto denso en $c_0(\mathbb{N}_0)$. La demostración de dicho resultado no es constructiva, allí se usa el Teorema de Hanh-Banach. En esta charla, mostraremos como cambiando un poco el enfoque del uso de funcionales al uso de herramientas del problema de momentos de Stieltjes y polinomios ortogonales podemos demostrar el mismo resultado de densidad, pero esta vez se da una receta para construir la sucesión espectral. Adicionalmente, mostraremos una generalización usando medidas de Borel radiales.

Esta charla es en honor al Profesor Nikolai Vasilevski (1948–2024) quien fue mi mentor en esta línea de las matemáticas.

Palabras & frases claves: Espacios de Hilbert con kernel reproductor, Espacio de Hardy, Espacios de Bergman, Espacio de Fock-Segal-Bargmann, operadores de Toeplitz, transformada Berezin, Símbolos Wick y anti-Wick.

1. Introducción

El espacio de Fock-Segal-Bargmann $\mathcal{F}^2(\mathbb{C})$ consiste de funciones enteras en $L_2(\mathbb{C}, dg)$ donde $dg(z) = e^{-|z|^2} dz$ es la medida Gaussiana. Dada una familia de funciones $\mathcal{M} \subset L_\infty(\mathbb{C})$ los operadores de Toeplitz T_φ con símbolos $\varphi \in \mathcal{M}$ actuando sobre el espacio de Fock $\mathcal{F}^2(\mathbb{C})$ tienen representación integral

$$T_\varphi f(z) = \pi^{-1} \int_{\mathbb{C}} f(w) e^{\bar{z}w} e^{-|w|^2} \varphi(w) dw, \quad f \in \mathcal{F}^2(\mathbb{C}). \quad (1)$$

Las C^* -álgebras $\mathcal{T}(\mathcal{M})$ de operadores de Toeplitz resulta en la mayoría de los casos es no conmutativa. Pero Vasilevski et. al. [6] han probado que estos generan una C^* -álgebra conmutativa $\mathcal{T}(\mathcal{M})$ si y solo si $\mathcal{M}$ consiste de funciones horizontales (funciones que dependen de $\operatorname{Re}(z)$), o radiales (funciones que dependen de $|z|$).

En el caso particular $\mathcal{M}_{rad} = \{f \in L_\infty(\mathbb{C}) : f \text{ es radial}\}$, por lo anteriormente mencionado, la C^* -álgebra $\mathcal{T}(\mathcal{M})$ generada por operadores de Toeplitz es conmutativa, y además es subconjunto de

$$\mathcal{Rad} = \{S \in \mathcal{B}(\mathcal{F}^2(\mathbb{C})) : \operatorname{Rot}_\theta S = S \operatorname{Rot}_\theta, \quad \text{para cada } \theta \in [0, 2\pi)\},$$

¹Universidad de Caldas, Manizales. Correo: kevin.esmeral@ucaldas.edu.co

²Escuela Superior de Física y Matemáticas, Instituto Politécnico Nacional, México. Correo: egormaximenko@gmail.com

donde $\text{Rot}_\theta: \mathcal{F}^2(\mathbb{C}) \rightarrow \mathcal{F}^2(\mathbb{C})$, llamado *operador rotación*, y dado por

$$(\text{Rot}_\theta f)(z) = f(e^{-i\theta}z),$$

ver [2]. Incluso, Berger y Coburn en [1, Theorem 17] muestran que esta contención es propia, ya que el operador $Jf(z) = f(-z)$ es invariante bajo el operador Rot_θ , no es un operador de Toeplitz y no puede ser aproximado de forma uniforme (en la norma de operadores) por operadores de Toeplitz invariantes bajo el operador Rot_θ .

Sea $\varphi \in \mathcal{M}_{rad}$. Esto es, existe $g \in L_\infty(\mathbb{R}_{\geq 0})$ tal que $\varphi(z) = g(|z|)$ a.e. en $\mathbb{C}$. Grudsky y Vasilevski [4] mostraron que el operador de Toeplitz $\mathbf{T}_\varphi$ es diagonal con respecto a la base canonica del espacio de Fock-Segal-Bargmann $(b_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ dada por $b_n(z) = \frac{z^n}{\sqrt{n!}}$:

$$\mathbf{T}_\varphi b_n = \gamma_g(n) b_n,$$

aquí la sucesión de autovalores γ_g se llama sucesión espectral y es dada por

$$\gamma_g(n) = \frac{1}{n!} \int_0^{+\infty} g(\sqrt{r}) e^{-r} r^n dr \quad (n \in \mathbb{N}_0). \quad (2)$$

A partir de este resultado y del estudio hecho por Suárez en [5] para el caso de espacios de Bergman sobre el disco unitario, Esmeral y Maximenko demostraron en [2] que

$$\mathcal{Rad} \cong \ell_\infty(\mathbb{N}_0), \quad \text{y} \quad \mathcal{T}(\mathcal{M}_{rad}) \cong \text{RO}(\mathbb{N}_0)$$

donde $\text{RO}(\mathbb{N}_0)$ es la C^* -álgebra de todas las sucesiones acotadas $\sigma: \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{C}$ que son uniformemente continuas con respecto a la *distancia-sqrt*: $\rho(m, n) := |\sqrt{m} - \sqrt{n}|$. En [2], se demostró que $\gamma(L_\infty(\mathbb{R}_{\geq 0})) = \{\gamma_g: g \in L_\infty(\mathbb{R}_{\geq 0})\}$ es un subconjunto denso de $\text{RO}(\mathbb{N}_0)$. Dicha prueba [2] consiste de dos partes. La primera es una demostración constructiva y muestra que después de hacer el cambio de variable $\sqrt{n} = x$, la sucesión espectral de los operadores de Toeplitz, visto como funciones: $x \mapsto \gamma_g(x^2)$, para x suficientemente grande, se aproxima a la convolución del símbolo g con el kernel de calor. La segunda parte de la demostración, [2, Theorem 7.3], no es constructiva. Usando el Teorema de Hahn–Banach se muestra que el espacio de sucesiones $c_0(\mathbb{N}_0)$ coincide con la cerradura en la norma supremo del conjunto $\gamma(\mathcal{X}) = \{\gamma_g: g \in \mathcal{X}\}$, donde

$$\mathcal{X} = \left\{ g \in L_\infty(\mathbb{R}_{\geq 0}): \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0 \right\}. \quad (3)$$

En esta charla, daremos una prueba alternativa, constructiva y directa de este último resultado dado en [2] por medio del uso de herramientas del problema de momentos de Stieltjes y polinomios de Laguerre.

Los detalles pueden ser encontrados en nuestro preprint [3] publicado en el ArXiv <https://arxiv.org/abs/2503.23276>.

Referencias

- [1] C. A. BERGER, L. A. COBURN, *Heat flow and Berezin-Toeplitz estimates*. Amer. J. Math. **116**(3) (1994):563–590. <http://dx.doi.org/10.2307/2374991>

- [2] K. ESMERAL, E. A. MAXIMENKO, *Radial Toeplitz Operators on the Fock Space and Square-Root-Slowly Oscillating Sequences*. Complex Anal. Oper. Theory. **10** (2016):1655-1677. <https://doi.org/10.1007/s11785-016-0557-0>
- [3] K. ESMERAL, E. A. MAXIMENKO, *Constructive approximation of convergent sequences by eigenvalue sequences of radial Toeplitz-Fock operators*. Submitted Boletín Sociedad Matemática Mexicana, 2025.
- [4] S. M. GRUDSKY, N. L. VASILEVSKI, *Toeplitz operators on the Fock space: Radial component effects*. Integr. Equ. Oper. Theory. **44** (2002):10-37. <https://doi.org/10.1007/BF01197858>
- [5] D. SUÁREZ, *The eigenvalues of limits of radial Toeplitz operators*. Bull. London Math. Soc. **40**(4) (2008): 631–641. <https://doi.org/10.1112/blms/bdn042>
- [6] VASILEVSKI, N., *Commutative Algebras of Toeplitz Operators on the Bergman Space*. Operator Theory: Advances and Applications, Vol. 185. Birkhäuser, 2008.
- [7] K. ZHU, *Analysis on Fock spaces*. Graduate Texts in Mathematics, Vol. 263. Springer, 2012.

2.2 El espectro de Lyapunov para el mapa de fracciones continuas de Schneider

Nicolás Arévalo Hurtado^{1,2}

Resumen

Estudiamos el espectro de Lyapunov y la descomposición fractal de la aproximación racional para el mapa de fracciones continuas de Schneider en $p\mathbb{Z}_p$. De hecho, extendemos resultados sobre el espectro de Lyapunov y obtenemos fórmulas explícitas. Recuperamos resultados conocidos sobre la dimensión de Hausdorff de los conjuntos de puntos con media aritmética asintótica prescrita.

Palabras & frases claves: Teoría Ergódica y análisis multifractal.

1. Ponencia

Sea p un número primo. Sea v_p la valuación p -ádica en $\mathbb{Q}$, donde para $x \in \mathbb{Q}$, $v_p(x)$ denota el único entero tal que $x = p^{v_p(x)} \frac{m}{n}$, con $(p, mn) = 1$. Sea $|\cdot|_p$ el valor absoluto p -ádico en $\mathbb{Q}$, definido por $|0|_p = 0$ y $|x|_p = p^{-v_p(x)}$ si $x \neq 0$. El cuerpo de los números p -ádicos se define como la completación de $\mathbb{Q}$ con respecto a la norma $|\cdot|_p$, y se denota por $\mathbb{Q}_p$. El conjunto de todos los elementos $x \in \mathbb{Q}_p$ con $|x|_p \leq 1$ se denota por $\mathbb{Z}_p$, y $p\mathbb{Z}_p$ es el conjunto de todos los elementos $x \in \mathbb{Z}_p$ con $|x|_p < 1$. Explícitamente, un elemento en $\mathbb{Q}_p$ puede escribirse como $\sum_{n \geq 0} c_n p^n$, donde c_0 es un entero que depende solo de x y $c_n \in \{0, 1, \dots, p-1\}$. Por otro lado, un elemento x en $\mathbb{Z}_p$ puede expresarse como $\sum_{n \geq 0} c_n p^n$. $p\mathbb{Z}_p$ se caracteriza como todos los elementos en $\mathbb{Z}_p$ con $c_0 = 0$. El cuerpo $\mathbb{Q}_p$ es localmente compacto, por lo tanto existe una medida de Haar μ_p con la normalización $\mu_p(p\mathbb{Z}_p) = 1$.

El mapa de fracciones continuas p -ádicas de Schneider $S_p : p\mathbb{Z}_p \rightarrow p\mathbb{Z}_p$ se define por $S_p(0) = 0$ y para $x \in p\mathbb{Z}_p \setminus 0$

$$S_p(x) = \frac{p^{a_1(x)}}{x} - b_1(x),$$

donde $a_1(x) = v_p(x)$ y $b_1(x) \in \{1, 2, \dots, p-1\}$ tal que $b_1(x) \equiv p^{a_1(x)}/x \pmod{p}$. El mapa S_p satisface que todo elemento $x \in p\mathbb{Z}_p$ con $x \notin \bigcup_{m \in \mathbb{N}} S_p^{-m}(0)$ puede escribirse para cada $n \in \mathbb{N}$ como

$$x = \frac{p^{a_1(x)}}{b_1(x) + \frac{p^{a_2(x)}}{b_2(x) + \frac{p^{a_3(x)}}{b_3(x) + \dots \frac{p^{a_n(x)}}{b_n(x) + \dots}}}}. \quad (1)$$

Hirsh y Washington probaron que el mapa de Schneider es ergódico con respecto a la medida de Haar μ_p (véase [2, Lemma 2]). También proporcionan algunas caracterizaciones aritméticas de expansiones de fracciones continuas de Schneider que finitas y no finitas. Haddley y Neir mostraron

¹Escuela Colombiana de Ingeniería Julio Garavito. Correo: nicolas.arevalo-h@escuelaing.edu.co

²En conjunto con el Dr Matías Alvarado de la Universidad de Talca, Chile.

[1] que S_p tiene entropía $\frac{p}{p-1} \log(p)$ para la medida de Haar y que la extensión natural de (S_p, μ_p) es Bernoulli. Para una buena visión general sobre este mapa véase [4] y las referencias allí citadas.

Desde el punto de vista de la geometría fractal, Hu, Yu y Zhao [3] describieron la descomposición fractal dada por las medias aritméticas asintóticas de los dígitos a_n que aparecen en la expansión en fracciones continuas. Recientemente, Song, Wu, Yu y Zeng [6] estudiaron la dimensión fractal de conjuntos con una tasa de crecimiento prescrita en los dígitos a_n .

El mapa de fracciones continuas de Schneider es continuo y expansor con respecto a la métrica p -ádica. Por ello, la dificultad principal es cómo estudiar un espectro de Lyapunov cuando la transformación involucrada S_p no satisface necesariamente un teorema del valor medio ya que por lo general sirve para relacionar la derivada con el diámetro de conjuntos. No obstante, podemos definir un potencial en términos de cómo se expanden los conjuntos cilindro. Definimos para cada par enteros $a \geq 1$ y $1 \leq b \leq p-1$ el cilindro $I_{(a,b)} := \{x \in p\mathbb{Z}_p : a_1(x) = a \text{ y } b_1(x) = b\}$. Puesto que $S_p(I_{(a,b)}) = p\mathbb{Z}_p$ y $|p\mathbb{Z}_p|_p = 1$ definimos el potencial

$$\psi(x) = \frac{1}{|I(a_1(x), b_1(x))|_p} = p^{a_1(x)}.$$

Veremos que $\log(\psi)$ muestra cuán rápido S_p expande sobre órbitas cercanas.

Sea F el conjunto de elementos en $p\mathbb{Z}_p$ con expansión en fracciones continuas de Schneider finita. Así, definimos para cada $x \in p\mathbb{Z}_p \setminus F$ el exponente de Lyapunov de x como

$$\lambda_p(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} S_n \log(\psi(x)),$$

siempre que este límite exista y donde $S_n \log \psi = \sum_{k=0}^{n-1} \log(\psi \circ S_p^k)$ denota la n -ésima suma de Birkhoff de $\log(\psi)$ en x . Análogamente, para cada $\alpha \in \mathbb{R}$ definimos

$$J_{\alpha,p} = \{x \in p\mathbb{Z}_p \setminus F : \lambda_p(x) = \alpha\},$$

los conjuntos de nivel y el espectro de Lyapunov como $L(\alpha) = \text{Dim}_H(J_{\alpha,p})$ donde Dim_H denota la dimensión de Hausdorff. Nótese que

$$\lambda_p(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \log(p) \frac{a_1(x) + a_2(x) + \cdots + a_n(x)}{n}, \quad (2)$$

siempre que el límite exista. Por lo tanto, salvo una constante multiplicativa, el exponente de Lyapunov de un punto coincide con la media aritmética asintótica de los dígitos a_i en la expansión en fracciones continuas. El siguiente es nuestro resultado principal, que afirma que en este contexto extendemos los resultados de Weiss y Pollicott [5] para el mapa de Gauss. Lo que resaltamos también es que no es común encontrar fórmulas explícitas para este tipo de funciones.

Teorema 1. *El espectro de Lyapunov L es real-analítico. Para cada $\alpha \geq \log(p)$*

$$L(\alpha) = \frac{1}{\alpha} \inf \{P(-t \log(\psi)) + t\alpha : t > 0\},$$

donde $P(-t \log(\psi))$ es la presión topológica con respecto al potencial $-t \log(\psi)$. Además

$$L(\alpha) = \frac{\log(p-1) + \log(\alpha - \log(p)) - \log(\log) + \alpha \log_p(\alpha) - \alpha \log_p(\alpha - \log(p))}{\alpha}. \quad (3)$$

Asimismo, al considerar $\widehat{\alpha} = \alpha / \log(p)$, recuperamos [3, Theorem 2.2], es decir, el conjunto

$$\left\{ x \in p\mathbb{Z}_p : \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1(x) + a_2(x) + \cdots + a_n(x)}{n} = \widehat{\alpha} \right\},$$

tiene dimensión de Hausdorff

$$\frac{\widehat{\alpha} \log(\widehat{\alpha}) - (\widehat{\alpha} - 1) \log(\widehat{\alpha} - 1) + \log(p - 1)}{\widehat{\alpha} \log(p)}.$$

Por otro lado, para cada $x \in p\mathbb{Z}_p \setminus F$ sea

$$\begin{aligned} \frac{p_n(x)}{q_n(x)} &= \frac{p^{a_1(x)}}{b_1(x) + \frac{p^{a_2(x)}}{b_2(x) + \frac{p^{a_3(x)}}{\ddots + \frac{p^{a_n(x)}}{b_n(x)}}}} \\ &= [(a_1(x), b_1(x)), (a_2(x), b_2(x)), \dots, (a_n(x), b_n(x))], \end{aligned}$$

la n -ésima aproximación racional de x dada por S_p . Mostraremos que para cada $x \in p\mathbb{Z}_p \setminus F$

$$\lambda_p(x) = - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \left| x - \frac{p_n(x)}{q_n(x)} \right|_p.$$

Así obtenemos una descomposición fractal análoga a la dada por aproximaciones diofánticas para el mapa de Gauss.

Teorema 2. *Para cada $\alpha \geq \log(p)$, el conjunto*

$$\left\{ x \in p\mathbb{Z}_p \setminus F : - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \left| x - \frac{p_n(x)}{q_n(x)} \right|_p = \alpha \right\},$$

tiene dimensión de Hausdorff igual a

$$\frac{\log(p - 1) + \log(\alpha - \log(p)) - \log(\log(p)) + \alpha \log p(\alpha) - \log_p(\alpha - \log(p))}{\alpha}.$$

Referencias

- [1] HADDLEY, A. AND NAIR, R. *On Schneider's continued fraction map on a complete non-Archimedean field.* Arnold Mathematical Journal. **8**(1) (2022):19–38.
- [2] HIRSH, J. AND WASHINGTON, L. *P-adic continued fractions.* The Ramanujan Journal. **25**(2011):389–403.
- [3] HU, H. AND YU, Y. AND ZHAO, Y. *On the digits of Schneider's p-adic continued fractions.* Journal of Number Theory. **187** (2018):372–390.

- [4] ROMEO, G. *Continued fractions in the field of p -adic numbers*. Bulletin of the American Mathematical Society. **61**(2) (2024):343–371.
- [5] POLLICOTT, M. AND WEISS, H. *Multifractal analysis of Lyapunov exponent for continued fraction and Manneville–Pomeau transformations and applications to Diophantine approximation*. Communications in Mathematical Physics. **207**(1) (1999):145–171.
- [6] SONG, K. AND WU, W. AND YU, Y. AND ZENG, S. *Multifractal analysis of the growth rate of digits in Schneider’s p -adic continued fraction dynamical system*. arXiv:2406.09081 (2024).

2.3 Equilibrium States for Random Zooming Systems

Rafael José Álvarez Bilbao^{1,2}

Resumen

In this work, we introduce the notion of random zooming systems and prove the existence of equilibrium states for which we call random zooming potentials, that include the hyperbolic ones, possibly with the presence of a critical set. With a mild condition, we obtain uniqueness. As an example of existence, we have the so-called random Viana maps with critical points. We also prove that the classes of random zooming potentials and random hyperbolic potentials are equivalent and also contain the null potential, giving measures of maximal entropy.

Palabras & frases claves: Equilibrium states, random zooming systems, random hyperbolic potentials.

1. Introduction

The theory of equilibrium states on dynamical systems was firstly developed by Sinai, Ruelle and Bowen in the sixties and seventies. It was based on applications of techniques of Statistical Mechanics to smooth dynamics. Given a continuous map $f : M \rightarrow M$ on a compact metric space M and a continuous potential $\phi : M \rightarrow \mathbb{R}$, an equilibrium state is an invariant measure that satisfies a variational principle, that is, a measure μ such that

$$h_\mu(f) + \int \phi d\mu = \sup_{\eta \in \mathcal{M}_f(M)} \left\{ h_\eta(f) + \int \phi d\eta \right\},$$

where $\mathcal{M}_f(M)$ is the set of f -invariant probabilities on M and $h_\eta(f)$ is the so-called metric entropy of η .

We define what we mean by random zooming systems (which generalizes both deterministic zooming systems and random non-uniformly expanding maps), random zooming potentials and follow ideas of [1] to obtain equilibrium states. With a mild condition, we obtain uniqueness. Moreover, we prove that the class of random zooming potentials is equivalent to the class of random hyperbolic potentials and contain the null potential, giving measures of maximal entropy.

2. Preliminaries and Main Result

Let M be a connected compact metric space and $C^0 := C^0(M, M)$ the space of continuous maps on M . Let $(\Omega, T, \mathbb{P})$ be a measure preserving system, where $T : \Omega \rightarrow \Omega$ is $\mathbb{P}$ -invariant (where $\mathbb{P}$ is a Borel measure) and Ω is a Polish space, i.e., Ω is a complete separable metric space. By a random transformation we mean a continuous map $f : \Omega \rightarrow C^0$. Then, we define the skew-product generated by f as

¹Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia. Correo: rafael.alvarez@uptc.edu.co.

²Working together with: Eduardo Santana-UFAL and Marlón Oliveira - UEMA.

$$F : \Omega \times M \rightarrow \Omega \times M, \quad F(w, x) = (T(w), f_w(x)),$$

where the iterates of F are given by

$$F^n(w, x) = (T^n(w), f_w^n(x))$$

with

$$f_w^n(x) := f_{T^{n-1}(w)} \circ \cdots \circ f_w(x).$$

In this work, we aim to study the dynamics of the orbits $(f_w^n(x))$ for each $x \in M$ and $w \in \Omega$. In other words, we analyze the dynamics of F on its fibers $\{w\} \times M := M_w$, conditioned by the dynamics of the system T .

Definición 1 (Zooming contractions). *A zooming contraction is a sequence of functions $\alpha_n : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ such that*

- $\alpha_n(r) < r$ for all $n \in \mathbb{N}$, for all $r > 0$.
- $\alpha_n(r) < \alpha_n(s)$ if $0 < r < s$ for all $n \in \mathbb{N}$.
- $\alpha_m \circ \alpha_n(r) \leq \alpha_{m+n}(r)$ for all $r > 0$ and all $m, n \in \mathbb{N}$.
- $\sup_{r \in (0,1)} \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n(r) < \infty$.

We define a random (α, δ) -zooming time for $(w, x) \in \Omega \times M$. Fix a zooming contraction $\alpha = \{\alpha_n\}$, $\delta > 0$ and $(w, x) \in \Omega \times M$. We say that $n \in \mathbb{N}$ is a (α, δ) -random zooming time for (w, x) if

1. There exists a neighbourhood $V_n(w, x) \subset \{w\} \times M$ of (w, x) such that f_w^n sends $V_n(w, x)$ homeomorphically onto the ball $B_\delta(f_w^n(x)) \subset \{T^n(w)\} \times M$.

2.1. Random Zooming Potentials

Let $\mathcal{Z}$ be the set of random zooming measures on $\Omega \times M$. We say that a function $\phi \in \mathbb{L}_{\mathbb{P}}^1(\Omega, C^0(M))$ is a **random zooming potential** if the following inequality holds:

$$\sup_{\nu \in \mathcal{Z}^c} \left\{ h_\nu(f) + \int \phi d\nu \right\} < \sup_{\mu \in \mathcal{Z}} \left\{ h_\mu(f) + \int \phi d\mu \right\}. \quad (1)$$

If $P(\phi)$ denotes the topological pressure of ϕ , by the Variational Principle, we have:

$$P(\phi) = \sup_{\mu \in \mathcal{M}(\Omega \times M)} \left\{ h_\mu(f) + \int \phi d\mu \right\} = \sup_{\mu \in \mathcal{Z}} \left\{ h_\mu(f) + \int \phi d\mu \right\}.$$

It means that, if there exists some equilibrium state for a random zooming potential, the equilibrium states must be random zooming measures.

2.2. Random Hyperbolic Potentials

We say that a function $\phi \in \mathbb{L}_{\mathbb{P}}^1(\Omega, C^0(M))$ is a **random hyperbolic potential** if the topological pressure $P_f(\phi)$ is concentrated at the random zooming set Λ , that is, if the following inequality holds:

$$P_f(\phi, \Lambda^c) < P_f(\phi, \Lambda) = P_f(\phi). \quad (2)$$

As a consequence of the Theorem (Variational Principle), we have the following inequality

$$\sup_{\nu \in \mathcal{Z}^c} \left\{ h_\nu(f) + \int \phi d\nu \right\} \leq P_f(\phi, \Lambda^c) < P_f(\phi, \Lambda) = P_f(\phi) = \sup_{\mu \in \mathcal{Z}} \left\{ h_\mu(f) + \int \phi d\mu \right\}.$$

It means that every random hyperbolic potential is a random zooming potential.

2.3. Main Result

Teorema 2. *Let $F : \Omega \times M \rightarrow \Omega \times M$ be a random zooming map and $\phi : \Omega \times M \rightarrow \mathbb{R}$ a random zooming potential. Then,*

1. *There exists some equilibrium state and every equilibrium state is a random zooming measure.*
2. *Suppose that the marginal $\mathbb{P}$ is ergodic and the map $F : \Omega \times M \rightarrow \Omega \times M$ is such that the set $\{f_w^n(x) \mid n \in \mathbb{N}\}$ is dense on M , for every $(w, x) \in \Lambda \cap M_w$ $\mathbb{P}$ -a.e. $w \in \Omega$. In this case, all ergodic equilibrium states have the same support S .*
3. *If there exists a fixed point $y_0 = (w_0, x_0) \in \Lambda \cap S$, we have uniqueness of equilibrium states.*

Corolario 3. *We have that every random zooming potential is also a random hyperbolic potential. These two classes of potentials are then equivalent.*

Ejemplo 4 (Random Viana map). *Considering f_0 as Viana map and the functions $f \in C^2$ around of Viana map must have the same critical point set C and impose that*

$$Df_t(x) = Df_0(x) \quad \text{for every } x \in M \setminus C \quad \text{and } t \in Y,$$

where Y metric space with probability measure ν . They also consider that, in the case of maps with critical sets, they assume a slow approximation of random orbits to the critical set: given any small $\gamma > 0$ there is $\delta > 0$ such that

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} -\log \text{dist}_\delta(f_t^j(x), C) \leq \gamma$$

for $\nu^{\mathbb{N}} \times m$ almost every $(\underline{t}, x) \in \Omega \times M$ for $\Omega = Y^{\mathbb{N}}$. Where $\text{dist}_\delta(x, C)$ is δ -truncated distance from $x \in M$ to C , $\underline{t} = (t_1, t_2, \dots) \in \Omega$ and the random orbit $(f_{\underline{t}}^n(x))_{n \geq 1}$ defined

$$f_{\underline{t}}^n = f_{t_n} \circ \dots \circ f_{t_1} \quad \text{for } n \geq 1.$$

On the other hand, considering $T : \Omega \rightarrow \Omega$ the left shift map and $\nu^{\mathbb{N}}$ ergodic product measure on (T, Ω) , then we have

- A measure $\mu \in \mathcal{Z}$ which is random zooming: since the deterministic Viana map has an expanding fixed point and the shift map also has fixed points, we can obtain a fixed point for the random Viana map which is a zooming point. Also, the Dirac probability supported on this fixed zooming point is a random zooming measure.
- A potential $\phi : \Omega \times M \rightarrow \mathbb{R}$ for the random Viana map which is a zooming potential (see (1)).
- The null potential is random zooming and we have the existence of measures of maximal entropy.

Referencias

- [1] A. ARBIETO, C. MATHEUS, K. OLIVEIRA, *Equilibrium States for Random Non-Uniformly Expanding Maps*. Nonlinearity, **17** (2004):581-593.
- [2] V. PINHEIRO & P. VARANDAS, *Thermodynamic Formalism for Expanding Measures*. arXiv:2202.05019 (2022).
- [3] E. SANTANA, M. OLIVERA & R. BILBAO, *Equilibrium States for Random Zooming Systems*. arXiv:2401.09437v2 (2024).

2.4 Análisis funcional en espacios de funciones analíticas

Kevin Esmeral García¹

Resumen

La idea principal del curso es explorar cómo las herramientas del análisis complejo y del análisis funcional se integran para estudiar las propiedades de diversos espacios de funciones analíticas. Hablaremos acerca de los espacios de Hardy sobre el disco unitario, espacios de Bergman tanto sobre el disco unitario como en el semiplano superior, espacio de Fock-Segal-Bargmann, mencionaremos otros tipos de espacios de funciones analíticas así como los principales operadores que se trabajan en estos espacios (Operadores de Toeplitz, transformada Berezin, Símbolos Wick y anti-Wick).

Este curso es en honor al Profesor Nikolai Vasilevski (1948–2024) quien fue mi mentor en esta línea de las matemáticas.

Palabras & frases claves: Espacios de Hilbert con kernel reproductor, Espacio de Hardy, Espacios de Bergman, Espacio de Fock-Segal-Bargmann, operadores de Toeplitz, transformada Berezin, Símbolos Wick y anti-Wick.

1. Funciones analíticas y holomorfas

1.1. Funciones holomorfas

Definición 1 (Derivada compleja). *Dada una función $f: \mathcal{D} \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, la derivada (compleja) de f en un punto $z_0 \in \mathcal{D} \cap \mathcal{D}'$ se define como*

$$f'(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}.$$

Cuando $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}$ y $f(\mathcal{D}) \subset \mathbb{R}$, el concepto de derivada recién introducido es exactamente el mismo que conocíamos para funciones reales de una variable real.

1.2. Ecuaciones de Cauchy-Riemann

Definición 2 (Condiciones de Cauchy-Riemann). *Si $f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$ entonces decimos que f satisface las ecuaciones de Cauchy-Riemann si*

$$\frac{\partial u}{\partial x}(a, b) = \frac{\partial v}{\partial y}(a, b), \quad \frac{\partial u}{\partial y}(a, b) = -\frac{\partial v}{\partial x}(a, b)$$

¹Universidad de Caldas, Manizales. Correo: kevin.esmeral@ucaldas.edu.co

En caso de que f sea complejo derivable entonces

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= f'(a + ib) = \lambda = \operatorname{Re}(\lambda) + i \operatorname{Im}(\lambda) \\ &= \frac{\partial u}{\partial x}(a, b) + i \frac{\partial v}{\partial x}(a, b) = \frac{\partial v}{\partial y}(a, b) + i \frac{\partial u}{\partial y}(a, b) \\ &= \frac{\partial v}{\partial y}(a, b) - i \frac{\partial u}{\partial y}(a, b) \end{aligned} \quad (1)$$

Definición 3 (Función holomorfa). ■ Una función f es holomorfa en un punto z_0 si es holomorfa en alguna vecindad de z_0 .

- Una función es holomorfa en algún conjunto no abierto A si es holomorfa en cada punto de A .

Denotaremos $\operatorname{Hol}(\mathcal{D})$ el conjunto de todas las funciones holomorfas en $\mathcal{D}$. Las funciones holomorfas en todo el plano complejo se llaman funciones enteras.

1.3. Funciones analíticas

Dada una sucesión de números complejos $(c_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ y un número $a \in \mathbb{C}$ entonces a $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - a)^n$ se le llama *serie de potencias centrada en a* . La sucesión $(c_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ recibe el nombre de sucesión de coeficientes de la serie. Si existe un número complejo s_z (depende de z) tal que $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - a)^n = s_z$ decimos que la serie converge.

2. Espacios de Hilbert con kernel reproductor

Consideraremos los espacios de Hilbert sobre el campo $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$.

Dado un conjunto V no vacío, si equipamos al conjunto $F(V, \mathbb{K}) = \{f : V \rightarrow \mathbb{K}, f \text{ es función}\}$ con las operaciones habituales de adición y multiplicación puntual, entonces $\mathcal{F}$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$.

Definición 4. Dado un conjunto V no vacío, diremos que $\mathcal{H} \subset F$ es un espacio de Hilbert con kernel reproductor (RKHS) en V sobre $\mathbb{K}$, siempre que:

1. $\mathcal{H}$ es un subespacio vectorial de $F(V, \mathbb{K})$,
2. $\mathcal{H}$ está dotado de un producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$, convirtiéndolo en un espacio Hilbert.
3. Para todo $t \in V$, el funcional de evaluación lineal, $E_t : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{K}$, definida por $E_t(f) = f(t)$, está acotada.

3. Operadores integrales en espacios L_p

Sea (X, Σ, μ) un espacio de medida. Definimos el espacio $L^p(X, d\mu)$ por

$$L^p(X, d\mu) = \left\{ f: X \rightarrow \mathbb{C} \text{ es medible y } \int_X |f(x)|^p d\mu(x) < \infty \right\}$$

Dotamos a este espacio con la norma (clases de equivalencias)

$$\|f\|_p = \left(\int_X |f(x)|^p d\mu(x) \right)^{1/p}. \quad (2)$$

Definición 5 (Operadores integrales). Sean (X, μ) un espacio de medida y K una función medible sobre $X \times X$. Entonces K induce un operador lineal T sobre el espacio de Hilbert $L^2(X, d\mu)$ por medio de:

$$Tf(x) = \int_X K(x, y)f(y)d\mu(y), \quad f \in L^2(X, d\mu)$$

El operador T es llamado el operador integral con kernel K .

4. Espacio de Hardy $\mathcal{H}^2(\mathbb{D})$

Definición 6 (Espacio de Hardy $\mathcal{H}^2(\mathbb{D})$). El espacio de Hardy $\mathcal{H}^2(\mathbb{D})$ es el espacio de funciones holomorfas $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ en $\mathbb{D}$ tales que la sucesión de sus coeficientes de Taylor es de cuadrado sumable: $\|f\|_{\mathcal{H}^2}^2 = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 < \infty$

5. Espacio de Bergman sobre el disco

Definición 7. Se define $\mathcal{A}^2(\mathbb{D})$ como:

$$\mathcal{A}^2(\mathbb{D}) = \left\{ f: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C} \mid f \text{ es analítica en } \mathbb{D} \text{ y } \int_{\mathbb{D}} |f(z)|^2 dA(z) < +\infty \right\}$$

Y su producto interno: $\langle f, g \rangle := \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{D}} f(z)\overline{g(z)} dA(z)$

6. Espacio de Bergman sobre el semiplano superior

Definición 8. Sea m la medida usual de Lebesgue en $\mathbb{C}$. Se define $\mathcal{A}^2(\Pi)$ como:

$$\mathcal{A}^2(\Pi) = \left\{ f: \Pi \rightarrow \mathbb{C} \mid f \text{ es analítica en } \Pi \text{ y } \int_{\Pi} |f(z)|^2 dm(z) < +\infty \right\}$$

Y su producto interno: $\langle f, g \rangle := \frac{1}{\pi} \int_{\Pi} f(z)\overline{g(z)} dm(z)$

7. Espacio de Fock-Segal-Bargmann

Definición 9. Sea m la medida usual de Lebesgue en $\mathbb{C}$. Se define el espacio de Fock-Segal-Bargmann $\mathcal{F}^2(\mathbb{C})$ como:

$$\mathcal{F}^2(\mathbb{C}) = \left\{ f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \mid f \text{ es entera y } \int_{\mathbb{C}} |f(z)|^2 e^{-|z|^2} dm(z) < +\infty \right\}$$

Y su producto interno: $\langle f, g \rangle := \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\mathbb{C}} f(z) \overline{g(z)} e^{-|z|^2} dm(z)$

Referencias

- [1] J. B. CONWAY, *Functions of One Complex Variable*. Springer, 1973.
- [2] R. REMMERT, *Theory of Complex Functions*. Graduate Texts in Mathematics. Springer, 1991.
- [3] N. VASILEVSKI, *Commutative Algebras of Toeplitz Operators on the Bergman Space*. Series: Operator Theory: Advances and Applications, Vol- 185. Birkhäuser, 2008.
- [4] K. ZHU, *Operator theory in Function spaces*. Mathematical surveys and Monographs, Vol. 138. American Mathematical Society, 2007.
- [5] K. ZHU, *Analysis on Fock spaces*. Graduate Texts in Mathematics, Vol. 263. Springer, 2012.

2.5 Algunas propiedades de los núcleos definidos positivos

Arnaldo De la Barrera¹

Resumen

En este trabajo se presentan algunas propiedades conocidas de los núcleos definidos positivos. Para estos se obtiene un resultado similar a uno conocido referente a bases de Riesz.

Palabras & frases claves: Núcleo definido positivo, espacio de Hilbert, núcleo reproductor.

1. Introducción

El objetivo fundamental de este trabajo es presentar algunas propiedades de los núcleos definidos positivos a valores escalares y un resultado de representación para estos núcleos. El resultado obtenido es similar a uno conocido referente a bases de Riesz. El trabajo se encuentra organizado de la siguiente manera. Una sección está dedicada a la presentación de resultados conocidos referentes a los definidos positivos a valores escalares en espacios de Hilbert, se continúa con un resultado de representación y finalmente se presentan los nuevos resultados.

2. Núcleos definidos positivos

Sea X un conjunto no vacío. Un *núcleo* en X es una función $\varphi : X \times X \rightarrow \mathbb{C}$. Se dice que la función φ es un *núcleo simétrico* cuando $\varphi(y, x) = \varphi(x, y)$ para todo $x, y \in X$.

Se dice que la función φ es un *núcleo hermitiano* cuando $\varphi(y, x) = \overline{\varphi(x, y)}$ para todo $x, y \in X$.

Se dice que φ es un *núcleo definido positivo* cuando

$$\sum_{j,k=1}^n c_j \overline{c_k} \varphi(x_j, x_k) \geq 0 \quad (1)$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, para todo $\{x_1, \dots, x_n\} \subset X$ y para todo $\{c_1, \dots, c_n\} \subset \mathbb{C}$.

Ejemplo 1. Dado un núcleo constante $\varphi(x, y) = c$ se tiene que: φ es definido positivo si y sólo si $c \geq 0$.

Proposición 2. Sea $\varphi : X \times X \rightarrow \mathbb{C}$ un núcleo definido positivo, entonces:

1. $\varphi(x, x) \geq 0$ para todo $x \in X$.
2. φ es hermitiano.
3. $|\varphi(x, y)|^2 \leq \varphi(x, x) \varphi(y, y)$ para todo $x, y \in X$.

Proposición 3. Dada una función arbitraria $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ sea $\varphi_f : X \times X \rightarrow \mathbb{C}$ dada por

$$\varphi_f(x, y) := f(x) \overline{f(y)}.$$

¹Universidad de Pamplona. Correo: abarrera1994@unipamplona.edu.co

Entonces φ_f es un núcleo definido positivo.

Proposición 4. Sea H un espacio pre-Hilbert con producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ sobre el cuerpo de los números complejos. Entonces $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es un núcleo definido positivo.

Demostración. Sean $x, y \in H$, φ un núcleo cualquiera. Sean $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{C}$ y

$$\varphi(x, y) = \langle x, y \rangle.$$

Luego

$$\sum_{j,k=1}^n c_j \overline{c_k} \langle x_j, y_k \rangle = \left\langle \sum_{j=1}^n c_j x_j, \sum_{k=1}^n c_k y_k \right\rangle = \left\| \sum_{j=1}^n c_j x_j \right\|^2 \geq 0.$$

Por lo tanto $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es definido positivo. $\square$

3. Representación de núcleos definidos positivos en espacios de Hilbert

Sea X un conjunto no vacío y $\varphi : X \times X \rightarrow \mathbb{C}$ un núcleo definido positivo. Para $x \in X$ fijo consideraremos la función $\varphi_x : X \rightarrow \mathbb{C}$ dada por $\varphi_x(y) = \varphi(x, y)$.

Sea $H_0 = \text{span}\{\varphi_x : x \in X\}$ la variedad lineal de $\mathbb{C}^X = \{g : X \rightarrow \mathbb{C} \text{ tal que } g \text{ es una función}\}$.

Si $f, g \in H_0$ y vienen dadas por $f = \sum_j c_j \varphi_{x_j}$, $g = \sum_k d_k \varphi_{y_k}$

entonces se tiene que

$$f(y_k) = \sum_j c_j \varphi_{x_j}(y_k) = \sum_j c_j \varphi(x_j, y_k)$$

y

$$g(x_j) = \sum_k d_k \varphi_{y_k}(x_j) = \sum_k d_k \varphi(y_k, x_j).$$

Se tiene que $\sum_k \overline{d_k} f(y_k) = \sum_j c_j \overline{g(x_j)} = \sum_{j,k} c_j \overline{d_k} \varphi(x_j, y_k)$. Además este valor no depende de la representación seleccionada para f y g la cual podría no ser única.

Se define $\langle \cdot, \cdot \rangle_\varphi : H_0 \times H_0 \rightarrow \mathbb{C}$ mediante

$$\langle f, g \rangle_\varphi := \sum_{j,k} c_j \overline{d_k} \varphi(x_j, y_k). \quad (2)$$

Es posible probar que $\langle \cdot, \cdot \rangle_\varphi$ es una forma sesquilineal y hermítica. Como φ es definido positivo se tiene que $\langle f, f \rangle_\varphi = \sum_{j,k=1}^n c_j \overline{c_k} \varphi(x_j, x_k) \geq 0$.

Por lo tanto, $\langle \cdot, \cdot \rangle_\varphi$ es un producto interno (eventualmente degenerado) en H_0 . Se cumple la desigualdad de Cauchy-Schwartz:

$$|\langle f, g \rangle_\varphi|^2 \leq \langle f, f \rangle_\varphi \langle g, g \rangle_\varphi.$$

Una consecuencia inmediata de la igualdad (2) es $\langle f, \varphi_x \rangle = \sum_j c_j \varphi(x_j, x) = f(x)$ para todo $f \in H_0$ y $x \in X$.

De donde $\langle f, \varphi_x \rangle = f(x)$ para todo $f \in H_0$ y $x \in X$. Esta propiedad es conocida como la *propiedad reproductiva*. A continuación daremos otra expresión para $\langle f, g \rangle_\varphi$.

Sean

$$f_j = c_j \varphi_{x_j} \quad \text{y} \quad g_k = d_k \varphi_{y_k}.$$

Se tiene que

$$\langle f_j, g_k \rangle_\varphi = \langle c_j \varphi_{x_j}, d_k \varphi_{y_k} \rangle_\varphi = c_j \overline{d_k} \varphi(x_j, y_k).$$

Por lo tanto

$$\langle \varphi_{x_j}, \varphi_{y_k} \rangle_\varphi = \varphi(x_j, y_k). \quad (3)$$

De donde, $\langle f, g \rangle_\varphi = \sum_{j,k} c_j \overline{d_k} \langle \varphi_{x_j}, \varphi_{y_k} \rangle_\varphi$.

Además de (3) se sigue que $\langle \varphi_x, \varphi_y \rangle_\varphi = \varphi(x, y)$ para todo $x, y \in X$.

Veamos que el producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle_\varphi$ es no degenerado. Por la desigualdad de Cauchy-Schwarz se tiene que $|f(x)|^2 = |\langle f, \varphi_x \rangle_\varphi|^2 \leq \langle f, f \rangle_\varphi \langle \varphi_x, \varphi_x \rangle_\varphi$. Por lo tanto $|f(x)|^2 \leq \langle f, f \rangle_\varphi \varphi(x, x)$.

De la desigualdad anterior es inmediato que $\langle f, f \rangle_\varphi = 0$ si y sólo si $f = 0$. De donde el producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle_\varphi$ es no degenerado. De esta forma hemos definido un producto interior sobre H_0 a partir del núcleo φ . Por lo tanto, H_0 es un espacio pre-Hilbert y su completación o clausura H es un espacio de Hilbert (en el cual H_0 es un subespacio denso). Se dice que φ es el núcleo reproductor del espacio de Hilbert H , este espacio usualmente se nota H_φ . Se puede probar que existe un único espacio de Hilbert, cuyos elementos son funciones definidas en X , que tiene a φ como su núcleo reproductor. Este espacio de Hilbert es usualmente llamado el espacio de Hilbert con núcleo reproductor (RKHS) asociado con φ .

Si φ es de valor real entonces, H_φ puede ser escogido como un espacio de funciones reales. Es importante resaltar que $\langle \cdot, \cdot \rangle_\varphi$ es un núcleo definido positivo sobre $H_0 \times H_0$. Esto es consecuencia de la Proposición 4.

Sean $\varphi : X \times X \rightarrow \mathbb{C}$ un núcleo definido positivo y sea H el espacio de Hilbert con núcleo reproductor φ . Sea $\Psi : H \rightarrow \mathbb{C}^X$ dada por $\Psi(f) = g$, para $f \in H$, donde

$$g(x) = \langle f, \varphi_x \rangle$$

para todo $x \in X$. Se puede probar que la aplicación Ψ es lineal e inyectiva. Por lo cual el espacio de Hilbert H puede ser visto como un subespacio de $\mathbb{C}^X$, esto es como un espacio de funciones y no como en otras situaciones similares en las que debe considerarse, el espacio de Hilbert que surge, como un espacio de clases de equivalencia de funciones. De lo anterior se puede asumir que existe un espacio de Hilbert $H \subseteq \mathbb{C}^X$ y una aplicación $x \rightarrow \varphi_x$ de X a H tal que $\varphi(x, y) = \langle \varphi_x, \varphi_y \rangle$ para $x, y \in X$.

Definición 5. Sean $\varphi, \sigma : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ dos núcleos reproductores y H_φ, H_σ los espacios de Hilbert asociados. Se dice que φ, σ son núcleos reproductores equivalentes si existe un operador lineal, acotado e invertible $\psi : H_\varphi \rightarrow H_\sigma$ tal que $\psi_{\varphi_n} = \sigma_n$ para todo $n \in \mathbb{Z}$.

Proposición 6. Sean $\varphi, \sigma : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ dos núcleos reproductores y H_φ, H_σ los espacios de Hilbert asociados. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

(i) Los núcleos reproductores φ, σ son equivalentes.

(ii) Existen dos constantes A, B con $0 < A \leq B$ tales que $A \|f\|_{H_\varphi}^2 \leq \|g\|_{H_\sigma}^2 \leq B \|f\|_{H_\varphi}^2$

(iii) Existen dos constantes A, B con $0 < A \leq B$ tales que $A \sum_{j,k=1}^n c_j \overline{c_k} \varphi(j, k) \leq \sum_{j,k=1}^n c_j \overline{c_k} \sigma(j, k) \leq B \sum_{j,k=1}^n c_j \overline{c_k} \varphi(j, k)$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y para todo $\{c_1, \dots, c_n\} \subset \mathbb{C}$.

Referencias

- [1] C. BERG, J. P. CHRISTENSEN, P. RESSEL, *Harmonic Analysis on semigroups*. Graduate Texts in Mathematics, Vol. 100. Springer-Verlag, New York, 1984
- [2] R. M. YOUNG, *An introduction to Nonharmonic Fourier Series*. Academic Press, New York, 1980.
- [3] G. STRANDELL, *Stationary in Hilbert Spaces*. U.U.D.M. Report 2001:31, Department of Mathematics, Uppsala University, ISSN 1101-3591, 2001.

2.6 Complejidad de la conjugación topológica en sistemas dinámicos numerables

Jhon Perez¹, Carlos Uzcátegui²

Resumen

En esta ponencia presentaremos una herramienta que nos proporciona la *Teoría Descriptiva de Conjuntos* la cual permite clasificar relaciones de equivalencia definidas en espacios polacos. En particular, nos centraremos en el estudio de la complejidad de la conjugación topológica en sistemas dinámicos. Revisaremos algunos resultados conocidos en la literatura para los casos en el que el espacio de fase es el intervalo o el conjunto de Cantor. Finalmente, presentaremos algunos aportes recientes relacionados con la complejidad de la conjugación en sistemas dinámicos numerables.

Palabras & frases claves: Conjugación topológica, complejidad, sistemas dinámicos.

1. Introducción

Un sistema dinámico es un par (X, f) donde X (*espacio de fase*) es un espacio métrico compacto y $f : X \rightarrow X$ una función continua. Dado un punto $x \in X$, denotamos con $O_f(x)$ la órbita de x , es decir

$$O_f(x) = \{x, f(x), f^2(x), \dots\}.$$

Dentro del estudio de los sistemas dinámicos una de las nociones más estudiadas para decidir si dos sistemas tienen las mismas propiedades dinámicas es la conjugación topológica. Formalmente, dos sistemas dinámicos (X, f) y (Y, g) son *topológicamente conjugados* (o *conjugados*) si existe un homeomorfismo $\varphi : X \rightarrow Y$ tal que $\varphi \circ f = g \circ \varphi$.

Si fijamos el espacio de fase, la conjugación genera una relación de equivalencia sobre $C(X, X)$ (el espacio de funciones continuas de X en sí mismo) la cual denotaremos con $\mathbb{E}_C(X)$. Más precisamente, para cada $f, g \in C(X, X)$

$$f \mathbb{E}_C^X g \iff \exists \varphi \in \text{Homeo}(X) (\varphi \circ f = g \circ \varphi).$$

Similarmente, podemos considerar la conjugación de sistemas dinámicos sobre $\text{Homeo}(X)$, el espacio de los autohomeomorfismos de X , la cual denotaremos con $\mathbb{E}_H(X)$.

Nuestro interés se centra en estudiar, desde el punto de vista de la teoría descriptiva de conjuntos, la complejidad de $\mathbb{E}_C(X)$ y $\mathbb{E}_H(X)$ para algunos espacios de fase.

2. Reducibilidad boreliana

¹Universidad Industrial de Santander. Correo: prjhonf@gmail.com

²Universidad Industrial de Santander. Correo: cuzcatea@uis.edu.co

En la *Teoría Descriptiva de Conjuntos* surge una línea de investigación dedicada a analizar la complejidad de los subconjuntos invariantes de relaciones de equivalencia sobre espacios polacos (es decir, espacios completamente metrizables y segundo numerables). Esta área, conocida en la literatura como *Teoría Descriptiva de Conjuntos Invariante*, ha sido desarrollada durante más de tres décadas gracias al trabajo de matemáticos como Kechris, Hjorth, Louveau y Harrington, entre otros. En años recientes, sus técnicas y resultados han encontrado aplicaciones en diversos campos de las matemáticas, incluyendo análisis funcional, geometría, sistemas dinámicos y teoría de grupos (véase [3] para una revisión más amplia).

La noción principal dentro de la Teoría Descriptiva de Conjuntos Invariante es la reducibilidad boreliana. Dado X un espacio polaco, la σ -álgebra que genera la topología de X es llamada la σ -álgebra de Borel y sus elementos son llamados borelianos de X .

Definición 1. Sean X, Y espacios polacos y E, F relaciones de equivalencia definidas sobre X y Y , respectivamente. Decimos que E es **Borel reducible** a F ($E \leq_B F$) si existe una función boreliana (es decir, $f^{-1}[U]$ es boreliano para todo U abierto) $f : X \rightarrow Y$ tal que

$$xEy \iff f(x)Ff(y).$$

Si $E \leq_B F$ podemos pensar que E es, a lo sumo, tan compleja como F , pues toda la información de E está codificada en F bajo una función boreliana. A continuación presentamos ejemplos de relaciones de equivalencia.

Ejemplo 2. 1. Dado un espacio X definimos la relación identidad como:

$$\text{Id}(X) = \{(x, x) : x \in X\}.$$

2. Sea $M_n(\mathbb{C})$ el espacio de matrices de orden n con entradas complejas. Definimos la relación de semejanza de matrices $\sim$ sobre $M_n(\mathbb{C})$ como: para cada $A, B \in M_n(\mathbb{C})$,

$$A \sim B \iff \exists C \in M_n(\mathbb{C}) \text{ invertible tal que } A = CBC^{-1}.$$

3. Definimos la relación de igualdad de subconjuntos numerables de Cantor $=^+$ sobre $(2^{\mathbb{N}})^{\mathbb{N}}$ como sigue: para cada $\bar{x} = (x_n), \bar{y} = (y_n) \in (2^{\mathbb{N}})^{\mathbb{N}}$,

$$\bar{x} =^+ \bar{y} \iff \{x_n : n \in \mathbb{N}\} = \{y_n : n \in \mathbb{N}\}.$$

Ahora presentamos un ejemplo que ilustra el comportamiento de la reducibilidad boreliana.

Ejemplo 3. $\sim \leq_B \text{Id}(M_n(\mathbb{C}))$. En efecto, consideremos $J : M_n(\mathbb{C}) \rightarrow M_n(\mathbb{C})$ donde $J(A)$ es la forma canónica de Jordan de la matriz A . Entonces,

$$A \sim B \iff J(A) = J(B).$$

Más aún, J es una función boreliana.

Sean E y F dos relaciones de equivalencia, decimos que E es **Borel equivalente** a F (escribimos $E \sim_B F$) si $E \leq_B F$ y $F \leq_B E$.

3. Complejidad de la conjugación topológica

Iniciamos esta sección presentando algunos resultados conocidos dentro de la literatura acerca de la complejidad de la conjugación en sistemas dinámicos cuando el espacio de fase es el intervalo o el conjunto de Cantor.

Teorema 4. (Camerlo & Gao, [2]) $\mathbb{E}_C(2^{\mathbb{N}}) \sim_B \mathbb{E}_H(2^{\mathbb{N}}) \sim_B E_{S_\infty}^\infty$. Donde $E_{S_\infty}^\infty$ denota la relación de isomorfismo de grafos sobre $\mathbb{N}$.

Teorema 5. (Hjorth - Bruin & Vejnar, [4, 1]) $\mathbb{E}_C([0, 1]) \sim_B \mathbb{E}_H([0, 1]) \sim_B E_{S_\infty}^\infty$.

Los resultados anteriores muestran que el problema de clasificar sistemas dinámicos en espacios de fase clásicos como el intervalo o el conjunto de Cantor, es altamente complejo, puesto que $E_{S_\infty}^\infty$ es una relación analítica no boreliana.

Como se mencionó al inicio de este resumen, nuestro interés se centra en sistemas dinámicos numerables, más precisamente, en sistemas donde el espacio de fase es de la forma $\omega^\alpha + 1$ dotado con la topología del orden. Algunos resultados obtenidos son los siguientes.

Teorema 6. Sea X un espacio métrico compacto numerable. Entonces

$$=^+ \leq_B \mathbb{E}_C(X).$$

Con el fin de conocer la complejidad exacta de $\mathbb{E}_C(\omega + 1)$ planteamos el siguiente problema.

Problema 7. Demostrar que $\mathbb{E}_C(\omega + 1) \leq_B =^+$.

Con respecto a $\mathbb{E}_H(\omega + 1)$, se puede demostrar que este es Borel equivalente a $\text{Id}(2^{\mathbb{N}})$. Por otro lado, cuando el espacio de fase es $\omega^2 + 1$, no sabemos cuál es la complejidad de $\mathbb{E}_H(\omega^2 + 1)$; sin embargo, creemos que $\mathbb{E}_H(\omega^2 + 1)$ es Borel equivalente a $=^+$.

Dado un espacio métrico compacto X , introducimos $\mathcal{OD}(X)$ como

$$\mathcal{OD}(X) = \{f \in C(X, X) : \exists z \in X \text{ tal que } \mathcal{O}_f(z) \text{ es denso en } X\}.$$

Abusando de la terminología, consideramos a $\mathcal{OD}(X)$ como el espacio de los sistemas dinámicos con órbita densa sobre X . Denotaremos con $\mathbb{E}_{OD}(X)$ la relación de conjugación restringida a $\mathcal{OD}(X)$.

Kaya en [5] demostró que la conjugación de sistemas dinámicos minimales de Cantor punteados es Borel equivalente a $=^+$. Aunque en el contexto numerable no existen sistemas minimales, logramos adaptar la idea de Kaya y probar el siguiente resultado.

Teorema 8. Sea X un espacio métrico compacto numerable. Entonces

$$\mathbb{E}_{OD}(X) \leq_B =^+.$$

En el caso de $X = \omega^2 + 1$, encontramos una cota inferior para la complejidad de $\mathbb{E}_{OD}(X)$.

Teorema 9. Sea $X = \omega^2 + 1$. Entonces,

$$\text{Id}(2^{\mathbb{N}}) \leq_B \mathbb{E}_{OD}(X) \leq_{B=^+}.$$

Aunque se tienen cotas para la complejidad de $\mathbb{E}_{OD}(\omega^2 + 1)$, no se sabe la complejidad exacta de esta.

Problema 10. Determinar la complejidad exacta de $\mathbb{E}_{OD}(\omega^2 + 1)$.

Referencias

- [1] BRUIN H. & VEJNAR B., *Classification of one dimensional dynamical systems by countable structures*. The Journal of Symbolic Logic. **88** (2023):562-578.
- [2] CAMERLO R. & GAO S., *The Completeness of the Isomorphism Relation for Countable Boolean Algebras*. Transactions of the American Mathematical Society. **353** (2001):491-518.
- [3] GAO S., *Invariant Descriptive Set theory*. Chapman and Hall/CRC, 2008.
- [4] HJORTH, G., *Classification and Orbit Equivalence Relations*. Mathematical Surveys and Monographs, Vol. 75. American Mathematical Society, Providence, RI, 2000.
- [5] KAYA B., *The complexity of topological conjugacy of pointed Cantor minimal systems*. Archive for Mathematical Logic. **56** (2017):215-235.

2.7 Filippov's theorem for sweeping processes with outer multivalued perturbations

Diana Narváez¹, Emilio Vilches²

Resumen

In this work, we focus on stability theorems of Filippov type addressed by Donchev and Farkhi [2] in the convex and nonconvex case, in which the authors replace the Lipschitz condition on the right-hand side of differential inclusions at the famous Filippov's theorem [1] with a weaker one-sided Lipschitz (**OSL**) condition. This theorem gives approximation and stability properties of the solutions and reachable sets of a differential inclusion with compact right-hand side, with respect to perturbations on the right-hand side and on the initial condition of the inclusion. Based on a reduction result for sweeping processes with outer multivalued perturbations, together with a existence results of solutions for the sweeping process in this setting and a measurable selection result from [4], we have obtained a new extension of the Filippov's theorem for sweeping processes under an outer multivalued perturbation satisfying the one-sided Lipschitz (**OSL**) condition [3].

Keywords: Filippov's theorem · one-sided Lipschitz condition

1. Introduction

Sweeping processes provide a flexible framework for modeling systems whose evolution is constrained by a moving set. They arise naturally in applications where nonsmooth interactions or outer perturbations play a central role. The aim of this work is to establish the existence of solutions under an **OSL** condition combined with a linear growth bound for $F(t, x)$, without imposing global boundedness or fixed compactness on its values. This relaxation represents a significant strengthening of the existing framework, as it allows us to treat outer perturbations of far greater generality in a setting where the convex geometry of the moving constraint interacts in a nontrivial way.

The developments presented in this work establish a coherent analytical framework for addressing sweeping processes perturbed by an **OSL** set-valued mapping. The combination of existence arguments under weak compactness hypotheses, the reduction of the constrained system to an equivalent unconstrained formulation, and the new Grönwall-type inequality provides a unified pathway for understanding these systems and clarifies the mechanisms through which nonsmooth geometry, and multivalued perturbations interact.

2. Functional Analysis, Dynamical Systems, and Descriptive Set Theory

In this work we address *sweeping processes with outer multivalued perturbations*, that is, systems of the form

$$\begin{cases} \dot{x}(t) \in -N_{C(t)}(x(t)) + F(t, x(t)), & \text{a.e. } t \in I, \\ x(0) = x_0 \in C(0), \end{cases}$$

¹Universidad de O'Higgins. Correo: diana.narvaez@postdoc.uoh.cl

²Universidad de O'Higgins. Correo: emilio.vilches@uoh.cl

where $C(t)$ are convex sets in a separable Hilbert space, and F is a set-valued mapping defined on $I \times \mathcal{H}$, with nonempty, convex, and closed values satisfying a one-sided Lipschitz (OSL) condition.

The presentation is organized into five main steps, each addressing a fundamental component of the analytical framework underlying our Filippov-type stability theorem.

2.1. Motivation and problem formulation

We begin by introducing the motivation through a physical analogy and by presenting the *sweeping process with outer multivalued perturbations*.

2.2. Assumptions and analytical framework

In this step we describe the assumptions on set-valued mapping F , and the moving set $C(t)$. Two key aspects are emphasized:

- The perturbation $F(t, x)$ satisfies an OSL condition, and neither Lipschitz nor UOSL regularity is required;
- No global boundedness or fixed compactness of the values of F is assumed.

Outcome. These assumptions establish the minimal analytical structure ensuring existence and stability under OSL perturbations and convex constraints.

2.3. Existence of solutions

We present our first main result: an existence theorem for sweeping processes with outer multivalued perturbations under OSL assumptions. We show that absolutely continuous solutions exist whenever one of the following compactness hypotheses holds:

- (i) Ball-compactness of the moving set $C(t)$; or
- (ii) A compactness condition on the set-valued mapping F .

Outcome. Existence of absolutely continuous solutions is established under weak compactness assumptions and an OSL condition on the multivalued perturbation, thereby generalizing all known existence results for sweeping processes in which the set-valued mapping is required to take values in a fixed compact set.

2.4. Reduction of the sweeping processes with outer multivalued perturbations

In this step we introduce a reduction technique for sweeping processes with outer multivalued perturbations, which allows us to establish a relationship between the solutions of the original constrained system and those of an appropriate unconstrained differential inclusion, thereby opening the way to the analysis of stability properties using tools not directly available in the constrained setting.

Outcome. The reduction technique links the constrained and unconstrained formulations, providing the foundation for the Filippov-type stability analysis.

2.5. Filippov-type stability theorem

Finally, we present the central result: a Filippov-type stability theorem for sweeping processes with outer multivalued perturbations satisfying OSL condition. We derive a quantitative stability estimate showing that the distance between the solutions of the perturbed and unperturbed systems is bounded by an exponential (Grönwall-type) estimate. Since classical Grönwall inequalities cannot be generated by the outer multivalued perturbations and the reduction procedure, we introduce a new inequality—Enhanced Grönwall Inequality—specifically designed to handle the error structure arising from the OSL perturbation.

Outcome. We obtain an explicit exponential estimate for the deviation between perturbed and unperturbed trajectories, extending Filippov’s classical stability result to the sweeping process framework.

Referencias

- [1] A. FILIPPOV, *Classical solutions of differential equations with multi-valued right-hand side*. SIAM Journal on Control. **5**(4) (1967):609–621.
- [2] T. DONCHEV, E. FARKHI, *Stability and Euler Approximation of One-sided Lipschitz Differential Inclusions*. SIAM Journal on Control and Optimization. **36**(2) (1998):780-796.
- [3] A. JOURANI, D. NARVÁEZ, E. VILCHES, *Filippov’s theorem for sweeping processes with outer multivalued perturbations*. In preparation, 2025.
- [4] PÉREZ-AROS PEDRO, TORRES-VALDEBENITO MANUEL, VILCHES EMILIO, *Galerkin-like method for integro-differential inclusions with application to state-dependent sweeping processes*. arXiv:2306.07821v1 (2023).

2.8 Propiedades combinatoricas de los ideales de conjuntos

Carlos Uzcátegui Aylwin¹

Resumen

Un ideal sobre un conjunto X es una colección hereditaria de subconjuntos de X cerrada bajo uniones finitas. Las propiedades combinatoricas de los ideales hacen referencia a ciertas propiedades motivadas por el teorema clásico de Ramsey. Presentaremos algunas de estas propiedades y algunos resultados recientes.

Palabras & frases claves: Ideales de conjuntos, Teorema de Ramsey.

1. Introducción

El teorema clásico de Ramsey asegura que para toda coloración en k colores $c : [\mathbb{N}]^2 \rightarrow \{0, 1, \dots, k\}$ de los pares de elementos de $\mathbb{N}$ existe un conjunto infinito H tal que c restringida a $[H]^2$ es constante; un conjunto H con esa propiedad se dice que es homogéneo para la coloración. Ramsey lo demostró también para coloraciones de $[\mathbb{N}]^m$, es decir, coloraciones de los subconjuntos de $\mathbb{N}$ de m elementos. Estos resultados han sido extendidos a diversos contextos.

Un *ideal* sobre $\mathbb{N}$ es una colección $\mathcal{I}$ de subconjuntos de $\mathbb{N}$ que es cerrada bajo uniones finitas y hereditaria (es decir, si $A \in \mathcal{I}$ y $B \subseteq A$, entonces $B \in \mathcal{I}$). Denotaremos por $\mathcal{I}^+$ a la colección de conjuntos que *no* pertenecen al ideal $\mathcal{I}$. Diremos que un ideal $\mathcal{I}$ es *Ramsey*, si para toda coloración $c : [\mathbb{N}]^2 \rightarrow \{0, 1\}$ y todo conjunto $A \in \mathcal{I}^+$ existe $H \subseteq A$ homogéneo con $H \in \mathcal{I}^+$. El teorema clásico de Ramsey asegura que el ideal FIN, de los subconjuntos finitos de $\mathbb{N}$, es un ideal Ramsey. Construir otros ejemplos interesantes requiere trabajo. En la charla mostraremos algunos bien conocidos.

Se han estudiado diferentes propiedades relacionadas con los ideales Ramsey [1, 2, 3]. Una propiedad que poseen los ideales Ramsey es la siguiente. Diremos que un ideal es q^+ si dada cualquier partición de un conjunto $A \in \mathcal{I}^+$ en pedazos finitos $\{P_n : n \in \mathbb{N}\}$, existe $B \subseteq A$ tal que $B \in \mathcal{I}^+$ y $B \cap P_n$ tiene un solo elemento. Esta propiedad es estrictamente más débil que ser Ramsey.

El objetivo de la charla es presentar algunas propiedades combinatoricas que permiten estudiar con más precisión a los ideales Ramsey. Este es un trabajo conjunto con Carlos Di Prisco y Julián Cano.

Referencias

- [1] M. Hrušák, *Combinatorics of filters and ideals*. Contemporary Mathematics. **533** (2011):29–69.
- [2] M. Hrušák, D. Meza-Alcántara, E. Thümmel and C. Uzcátegui, *Ramsey type properties of ideals*. Annals of Pure and Applied Logic. **168** (2017):2022–2049.
- [3] C. Uzcátegui-Aylwin, *Ideals on countable sets: a survey with questions*. Revista Integración, temas de matemáticas. **37**(1) (2019):167–198.

¹Universidad Industrial de Santander. Correo: cuzcatea@uis.edu.co

2.9 Sistemas dinámicos y ergodicidad sobre el cuerpo de los números p -ádicos $\mathbb{Q}_p$

Mateo Martin Vásquez¹

Resumen

Este trabajo explora los sistemas dinámicos y la ergodicidad sobre el cuerpo de los números p -ádicos $\mathbb{Q}_p$. Comienza con una construcción básica de $\mathbb{Q}_p$, destacando su estructura no arquimediana y el Teorema de Ostrowski, que caracteriza las normas sobre los racionales. En el ámbito de la dinámica discreta, los puntos fijos (atractores, repulsores e indiferentes) se clasifican mediante condiciones sobre la derivada, aplicadas a la función logística p -ádica y a funciones racionales. Finalmente, se estudia la ergodicidad de funciones en $\mathbb{Z}_p$, caracterizando los sistemas ergódicos. El trabajo muestra cómo la perspectiva p -ádica enriquece la teoría de los sistemas dinámicos, revelando propiedades distintivas en comparación con el caso real.

1. Introducción

Pensemos en qué pasaría si por un momento nuestra forma habitual de medir distancias cambiara radicalmente. En el mundo real, el cual está estructurado bajo los números reales $\mathbb{R}$, si nos alejamos 10 metros de un punto y luego 10 más, estamos a 20 metros. Pero, ¿y si existiera un mundo matemático donde, al alejarnos sucesivamente, la distancia total nunca superara cierto límite? Este es el mundo de los números p -ádicos, denotado por $\mathbb{Q}_p$, un sistema numérico que desafía nuestra intuición geométrica y que resulta ser, sorprendentemente, de gran utilidad en áreas como la física teórica y la teoría de números.

Este trabajo está dedicado a dar a conocer este espacio alternativo y a estudiar cómo **evolucionan** los sistemas dentro de él. Nos centraremos en dos pilares fundamentales: la **dinámica discreta**, que analiza la evolución a largo plazo de sistemas gobernados por funciones dentro de este espacio, y la **ergodicidad**, que estudia el comportamiento promedio de dichos sistemas. Todo ello sobre el cuerpo de los números p -ádicos $\mathbb{Q}_p$.

La presentación de este trabajo se estructurará en tres partes principales. En la primera, sentaremos las bases al presentar el cuerpo $\mathbb{Q}_p$, comenzando con su construcción a partir de los racionales y dotándolos de una noción de distancia **no arquimediana**. Esta propiedad, que parece extraña a primera vista (donde los triángulos son isósceles y toda bola es a la vez abierta y cerrada), es la que dota a $\mathbb{Q}_p$ de su carácter único.

En la segunda parte se estudia la **dinámica discreta** de funciones que van de $\mathbb{Q}_p$ en $\mathbb{Q}_p$ (o entre subconjuntos de él). Aquí nos preguntamos: si aplicamos una función una y otra vez, ¿hacia dónde tiende el sistema? Clasificaremos los puntos según su comportamiento: los **atractores**, que atraen a las órbitas cercanas; los **repulsores**, que las alejan; y los **indiferentes**, que las mantienen invariantes. Para funciones analíticas, esta clasificación depende de un criterio simple ligado a la derivada $f'(a)$ del punto a :

- Si $|f'(a)|_p < 1$, el punto es **atractor**.

¹Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia. Correo: mateo.martin@uptc.edu.co

- Si $|f'(a)|_p > 1$, el punto es **repulsor**.
- Si $|f'(a)|_p = 1$, el punto es **indiferente**.

Llevaremos esta teoría a la práctica analizando dos familias de funciones. La primera es la **función logística p -ádica**, definida como $L_a(x) = ax(1 - x)$ para $a \in \mathbb{Q}_p$, $a \neq 0$, un modelo clásico de crecimiento poblacional que en $\mathbb{Q}_p$ exhibe un comportamiento radicalmente distinto al de los números reales. La segunda tomaremos la función racional $\frac{ax}{cx+d}$ (con $x \neq -d/c$).

Finalmente, en la tercera parte, estudiaremos la **ergodicidad** de funciones que mapean desde $\mathbb{Z}_p^m$ hacia $\mathbb{Z}_p^n$, con especial énfasis en el caso $m = n = 1$ (funciones de $\mathbb{Z}_p$ en $\mathbb{Z}_p$). La ergodicidad es una propiedad que, intuitivamente, nos dice que un sistema dinámico se "mezcla" lo suficiente como para que su comportamiento promedio en el tiempo sea equivalente a su comportamiento promedio en el espacio.

El objetivo de este trabajo es, por tanto, ofrecer un recorrido por los temas anteriores, mostrando cómo el cambio de perspectiva que ofrece $\mathbb{Q}_p$ enriquece y modifica profundamente la teoría de sistemas dinámicos, abriendo la puerta a un territorio amplio por explorar.

Referencias

- [1] Anashin, V. & Khrennikov, A. *Applied Algebraic Dynamics*. De Gruyter, 2009.
- [2] Katok, S. *p -adic Analysis*. American Mathematical Society, 2007.
- [3] Gouvea, F. *p -adic Numbers: An Introduction*. Springer-Verlag, 1997.
- [4] Koblitz, N. *p -adic Numbers, p -adic Analysis, and Zeta-Functions*. Springer-Verlag, 1984.
- [5] ALBEVERIO, S., KHRENNIKOV, A. & Shelkovich, V. M. *Theory of p -Adic Distributions: Linear and Nonlinear Models*. Cambridge University Press, 2010.
- [6] RODRÍGUEZ, D. A. *Sistemas dinámicos sobre cuerpos no arquimedianos*. Tesis de Maestría, UPTC, 2024.
- [7] PINZÓN, L. Y. *Introducción a la dinámica p -ádica*. Tesis de Maestría, UPTC, 2022.
- [8] VLADIMIROV, V. S., VOLOVICH, I. V. & ZELENOV, E. I. *p -Adic Analysis and Mathematical Physics*. World Scientific, 1994.
- [9] KHRENNIKOV, A. *Non-Archimedean Analysis: Quantum Paradoxes, Dynamical Systems and Biological Models*. Springer, 1997.
- [10] SCHIKHOF, W. H. *Ultrametric Calculus: An Introduction to p -adic Analysis*. Cambridge University Press, 2000.
- [11] ROBERT, A. M. *A Course in p -adic Analysis*. Springer, 2000.
- [12] BAKER, A. J. *Introduction to p -adic Numbers and p -adic Analysis*. University of Glasgow, 2002.
- [13] MUNKRES, J. R. *Topology*. Prentice Hall, 2000.

2.10 Some ideals associated to sequences in Banach spaces

Michael Alexander Rincón Villamizar¹

Resumen

We introduce a class of ideals associated to a sequence in a Banach space X , and we study their connection with the structural properties of X .

Palabras & frases claves: Banach spaces, ideals, sequences.

1. Introduction

Drewnowski and Labuda have characterized the presence of c_0 in a Banach space by using ideals on $\mathbb{N}$. To state their result, we introduce the following families on $\mathbb{N}$: If X is a Banach space and $\mathbf{x} = (x_n)$ is an element of $X^{\mathbb{N}}$, that is, a sequence in X , we set

$$C(\mathbf{x}) = \{A \subseteq \mathbb{N} : \sum_{n \in A} x_n \text{ is unconditional convergent in } X\}, \quad \text{and}$$

$$\mathcal{B}(\mathbf{x}) = \{A \subseteq \mathbb{N} : \sum_{n \in A} x_n \text{ is perfectly bounded}\}.$$

It is not difficult to see that $C(\mathbf{x})$ and $\mathcal{B}(\mathbf{x})$ are ideals on $\mathbb{N}$. In [3], Drewnowski and Labuda proved the following characterization for Banach spaces containing no copy of c_0 :

Teorema 1. *Let X be a Banach space. The following assertions are equivalent:*

1. X contains no copy of c_0 ;
2. $C(\mathbf{x}) = \mathcal{B}(\mathbf{x})$ for all $\mathbf{x} \in X^{\mathbb{N}}$;
3. $C(\mathbf{x})$ is F_σ in the Cantor space $2^{\mathbb{N}}$ for all $\mathbf{x} \in X^{\mathbb{N}}$.

This is the starting point for our research. The standard terminology and notation of Banach spaces will be used. The notation and terminology used can be found in [1].

If X is a Banach space, we say that a sequence $(x_n) \in X^{\mathbb{N}}$ is *weakly p -summable* whenever $(x^*(x_n)) \in \ell_p$ for all $x^* \in X^*$. A sequence $(x_n) \in X^{\mathbb{N}}$ is called *unconditional p -summable* if

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x^* \in B_{X^*}} \sum_{m \geq n} |x^*(x_m)|^p = 0.$$

A purpose here is to study the following families on $\mathbb{N}$:

$$C_p(\mathbf{x}) := \{A \in 2^{\mathbb{N}} : (x_n)_{n \in A} \text{ is weakly } p\text{-summable}\},$$

$$\mathcal{B}_p(\mathbf{x}) := \{A \in 2^{\mathbb{N}} : (x_n)_{n \in A} \text{ is unconditionally } p\text{-summable}\}.$$

¹Universidad Industrial de Santander. Correo: marinvil@uis.edu.co

2. The result

All Banach lattices considered here will be real. If X is a Banach space, B_X and S_X stand for the unit ball and the sphere of X , respectively. If $1 \leq p < \infty$, the conjugate exponent of p is denoted by p^* . We set

$$\begin{aligned}\ell_p^w(X) &= \{(x_n) \in X^{\mathbb{N}} : (x_n) \text{ is weakly } p\text{-summable}\} \\ &= \left\{ (x_n) \in X^{\mathbb{N}} : \sup_{x^* \in B_{X^*}} \sum_{n \in \mathbb{N}} |x^*(x_n)|^p < \infty \right\}.\end{aligned}$$

It is known that $\ell_p^w(X)$ with its natural norm is a Banach space [2, p. 32]. Moreover, the correspondence

$$\mathcal{L}(\ell_{p^*}, X) \longrightarrow \ell_p^w(X) : T \longmapsto T(e_n)$$

is an isometric isomorphism [2, Proposition 2.2, p. 36]. The set of all unconditional p -summable sequences in X is denoted by $\ell_p^u(X)$. It is known that $\ell_p^u(X)$ is a closed subspace of $\ell_p^w(X)$. Moreover, the map $\mathcal{K}(\ell_{p^*}, X) \longrightarrow \ell_p^u(X) : T \longmapsto T(e_n)$ is an isometric isomorphism [4, Theorem 1.4 (b)], where $\mathcal{K}$ denotes the space of compact operators.

The aim is to discuss the following theorem:

Teorema 2. *Let $1 \leq p < \infty$. The following statements are equivalent for a Banach space X :*

1. $C_p(\mathbf{x})$ is F_σ set in $2^{\mathbb{N}}$ for all $\mathbf{x} \in X^{\mathbb{N}}$;
2. $C_p(\mathbf{x}) = \mathcal{B}_p(\mathbf{x})$ for all $\mathbf{x} \in X^{\mathbb{N}}$;
3. $\ell_p^w(X) = \ell_p^u(X)$;
4. $\mathcal{K}(\ell_{p^*}, X) = \mathcal{L}(\ell_{p^*}, X)$.

This research is in collaboration with Carlos Uzcátegui.

Referencias

- [1] F. Albiac, N.J. Kalton, *Topics in Banach space theory*. Second edition. With a foreword by Gilles Godefroy. Graduate Texts in Mathematics, Vol. 233. Springer, Cham, 2016.
- [2] Diestel, J., Jarchow, H., Tonge, A. *Absolutely Summing Operators*. Cambridge Stud. Adv. Math. Vol. 43. Cambridge University Press, Cambridge, 1995.
- [3] L. Drewnowski and I. Labuda. *Ideals of subseries convergence and F -spaces*. Arch. Math. (Basel). **108**(1) (2017):55–64.
- [4] Fourie, J.H., Swart, J. *Banach ideals of p -compact operators*. Manuscr. Math. **26**(1979):349–362.

2.11 Una aproximación al Forcing

Pierre Á. Gómez C.¹, Adrián C. Mora L.²

Resumen

En la teoría de conjuntos moderna (ZFC), se siguen las ideas originales de Cantor, y en particular, la de cómo ordenar cardinales transfinitos, i.e., poder enlistar $\aleph_0, \aleph_1, \aleph_2, \dots$. En la hipótesis del continuo (CH) se establece una idea de “orden”, pues al considerar que $|\mathbb{N}| = \aleph_0$, se quiere que $\aleph_1 = |\mathbb{R}| = 2^{\aleph_0} = |\wp(\mathbb{N})|$. El presente trabajo, tiene como objetivo hacer una presentación basada en los conceptos de *forcing* y de funciones características a partir de un esbozo de los resultados de Gödel y Cohen, para así poder establecer la independencia de CH y ZFC. Es decir, como en la geometría, al considerar la veracidad del quinto postulado, es posible generar modelos euclidianos, mientras que al examinar su falsedad surgen modelos no euclidianos. Para nuestro caso, la consistencia de ZFC garantiza la posibilidad de hacer matemáticas en $ZFC + CH$ o en $ZFC + (\neg CH)$.

Palabras & frases claves: Cardinal, forcing, hipótesis del continuo.

1. Introducción

La teoría de conjuntos (ZFC) es el marco axiomático fundamental de las matemáticas modernas. Dentro de este sistema, la Hipótesis del Continuo (CH) plantea una de las preguntas más intrigantes: ¿existe un conjunto con una cardinalidad estrictamente mayor que la de los números naturales, pero estrictamente menor que la de los números reales? Matemáticamente, la CH se enuncia como: no existe un cardinal κ tal que $\aleph_0 < \kappa < 2^{\aleph_0}$. A diferencia de otras conjeturas, la CH demostró ser independiente de los axiomas de ZFC, lo que significa que no puede ser ni probada ni refutada dentro del sistema. Esta independencia revela que ZFC no determina la cardinalidad de los números reales, dejando abierta la posibilidad de múltiples “universos” matemáticos. Este trabajo tiene como objetivo explorar la independencia de la Hipótesis del Continuo a través de un proceso constructivo. En particular, nos enfocaremos en la técnica del *forcing*, un método que permite extender un modelo de la teoría de conjuntos para crear uno nuevo con propiedades específicas.

2. Sobre la Hipótesis del Continuo (CH)

A Cantor el problema del infinito le permitió sentar las bases de la teoría de números transfinitos y preguntarse por su organización, de ahí que CH pueda ser enunciada de múltiples maneras equivalentes al enunciado: “no existe un cardinal entre el de los números naturales y los números reales”. Por ejemplo, si $|\mathbb{N}| = \aleph_0$, por medio de algunas propiedades de ZFC, se tiene que $|\wp(\mathbb{N})| = 2^{\aleph_0}$, y además que $\aleph_0 < 2^{\aleph_0}$. Así, no existe un número cardinal κ , tal que $\aleph_0 < \kappa < 2^{\aleph_0}$. Llamaremos a $2^{\aleph_0}$ el cardinal del continuo.

Observación. Se ha mencionado a $|\mathbb{R}|$ y; sin embargo, de éste no se han esbozado resultados con

¹Universidad Sergio Arboleda. Correo: pierre.gomez01@usa.edu.co

²Universidad Sergio Arboleda. Correo: adrian.mora01@usa.edu.co

algún $\aleph$. Para esto, consideraremos los siguientes pasos:

$$\wp(\mathbb{N}) \sim \{0, 1\}^{\mathbb{N}} \longrightarrow \{0, 1\}^{\mathbb{N}} \sim \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \longrightarrow \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \sim \mathbb{Q}^{\mathbb{N}} \longrightarrow \mathbb{Q}^{\mathbb{N}} \sim \mathbb{R}$$

y como “ $\sim$ ” es una relación de equivalencia, se sigue que: $\wp(\mathbb{N}) \sim \mathbb{R}$. A lo largo de la exposición veremos la utilidad de trabajar con $\wp(\mathbb{N})$ y no con $\mathbb{R}$.

3. Un concepto importante

A lo largo del presente documento, resultará fundamental comprender el concepto de **inferencia**, dado un conjunto A y χ_A ,³ según la forma de la sucesión dada por χ_A es posible inferir propiedades del conjunto A . Denotaremos esto por $\chi_A \models \mathcal{P}(A)$. Por ejemplo, la función χ_G le asigna al conjunto G la sucesión:

$$\langle 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, \dots \rangle \quad (1)$$

De donde:

$$(1) \models 0, 2, 4, 6, 8, 10 \in G \quad \text{y} \quad (1) \models 1, 3, 5, 7, 9, 11 \notin G$$

Además, si después del término 12 la sucesión mantiene su patrón, entonces $(1) \models G = 2\mathbb{N}$; pero, si después del término 12 la sucesión no mantiene su forma, a lo más es posible asegurar que $(1) \models G = \{2n : n = 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$.

4. Una aproximación al Forcing

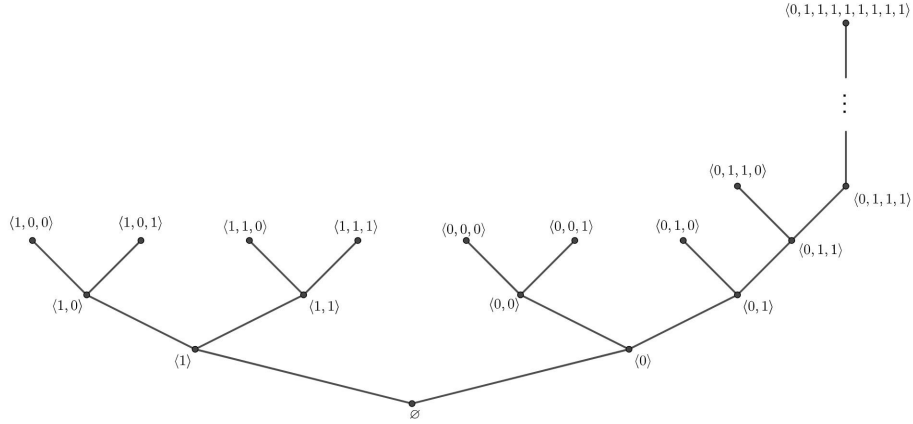
Si sólo tenemos una descripción parcial del conjunto M ; por ejemplo,

$$\langle 1, 0, 1, 1, 1, 1, 0 \rangle = \mathcal{P} \quad (2)$$

Llamaremos a $\mathcal{P}$ una condición que fuerza una propiedad $\mathbb{P}$ del conjunto M . Notaremos este hecho por $\mathcal{P} \Vdash \mathbb{P}(M)$. De la condición $\mathcal{P}$ dada en (2) se tiene que $\mathcal{P} \Vdash 0, 2, 3, 4, 5 \in M$, $\mathcal{P} \Vdash 1, 6 \notin M$, $\mathcal{P} \Vdash (5, 3) \in \mathbb{N} \times M$ ya que $\mathcal{P} \Vdash 3 \in M$ y $5 \in \mathbb{N}$, y $\mathcal{P} \Vdash \{1, 2\} \notin \wp(M)$.

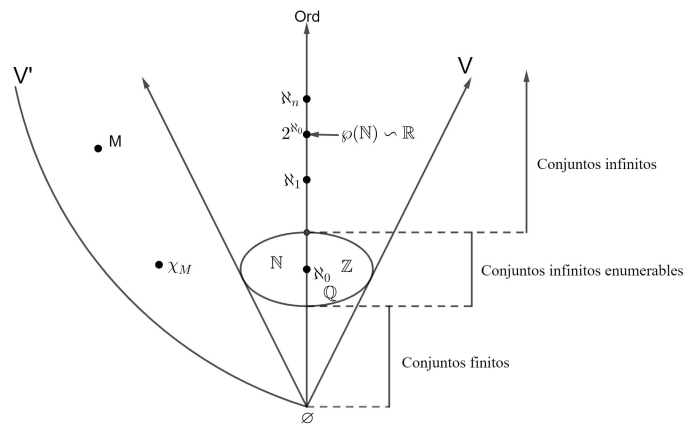
Al seguir un camino del “árbol de condiciones” específico, se construye un conjunto cuyas propiedades quedan definidas por la secuencia de unos y ceros elegida, demostrando cómo una serie de elecciones secuenciales pueden delimitar y especificar un subconjunto dentro de un universo más amplio. Este árbol, por lo tanto, no es solo una representación visual, sino un mapa de cómo se pueden formar conjuntos al asignar de manera sistemática propiedades a sus elementos.

³ χ_A representa la función característica asignada al conjunto A .



5. Algunos resultados

Es posible entonces inferir que **sin importar la condición $\mathcal{P}$ considerada se tiene que $\mathcal{P} \Vdash M$ es infinito**, en efecto, al suponer que M es finito, deben existir una condición $\mathcal{P}$ y un número $k \in \mathbb{N}$ tales que $\mathcal{P} \Vdash |M| = k$. Si consideramos la condición $\mathcal{P} = \langle 0, 1, 1, 1 \rangle$ y $k = 6$, de modo que $\mathcal{P} \Vdash |M| = 6$, debemos ver que esto no es posible. Si en el árbol de las condiciones consideramos $\mathcal{Q} = \langle 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1 \rangle$ como una expansión de $\mathcal{P}$ que caracteriza a M , entonces se tendría que $\mathcal{Q} \Vdash 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 \in M$, de donde $\mathcal{Q} \Vdash M$ tiene al menos 10 elementos, absurdo, puesto que $6 = |M| \geq 10$ y $6 \not\geq 10$. Así, M debe ser infinito. Es posible entonces observar que en general al tomar una condición $\mathcal{P}$, existe una condición $\mathcal{Q}$ que es expansión de $\mathcal{P}$ que hace que M tenga más de k elementos. También, **Para toda condición $\mathcal{P}$ se tiene que $\mathcal{P} \Vdash M$ es un conjunto nuevo**, en otras palabras, queremos ver que si tomamos un conjunto conocido A , la condición $\mathcal{P}$ fuerza que $M \neq A$. En efecto, sea A un conjunto conocido, y supongamos que χ_A está dada por $\chi_A(x) = \langle 0, 1, 1, 0, 1, 0, 0, 1, \dots \rangle$ y además, supongamos que existe $\mathcal{P}_M$ tal que $\mathcal{P}_M \Vdash M = A$; considerando $\mathcal{P}_M = \langle 0, 1, 1, 0, 1 \rangle$ y de ésta, dos expansiones $\mathcal{P}_{M_1} = \langle 0, 1, 1, 0, 1, 0 \rangle$ y $\mathcal{P}_{M_2} = \langle 0, 1, 1, 0, 1, 1 \rangle$. Es claro que $\mathcal{P}_M \Vdash 1, 2, 4 \in M$. Veamos ahora que sucede con el 5, si $5 \in A$, como $\mathcal{P}_{M_1}$ es una expansión de $\mathcal{P}_M$, ésta debería forzar las mismas propiedades que $\mathcal{P}_M$, pero $\mathcal{P}_{M_1} \Vdash 5 \notin M$, absurdo. Y si $5 \notin A$, como $\mathcal{P}_{M_2}$ es una expansión de $\mathcal{P}_M$ debería forzar las mismas propiedades que $\mathcal{P}_M$, pero $\mathcal{P}_{M_2} \Vdash 5 \in M$, absurdo. En general, para cualquier condición $\mathcal{P}$ se tienen las expansiones $\mathcal{P}_1$ y $\mathcal{P}_2$ para las que ningún elemento de M es elemento de A . Hemos logrado construir entonces un conjunto M que es nuevo y que no pertenece al Universo original, este hecho; sin embargo, no altera el cardinal del continuo, pero si iteramos el proceso $\aleph_{15}$ veces, tendríamos que $|\wp(\mathbb{N})| = 2^{\aleph_0} = \aleph_{15}$.



En el modelo del forcing, CH es falsa. Cohen, como hemos visto, demostró la existencia de una extensión genérica de V que contiene a V y al nuevo conjunto M que es un modelo de ZFC, es decir, es posible hacer matemáticas consistentes en $ZFC + (\neg CH)$, y como lo demostró Gödel, también es posible hacer matemáticas consistentes en $ZFC + CH$. Por lo tanto, **CH es independiente de ZFC, con o sin esta es posible hacer teorías de conjuntos no clásicas.**

Referencias

- [1] ZALAMEA, F. *Fundamentos de Matemáticas*, primera edición en español. Universidad Nacional de Colombia, 2007.
- [2] MUÑOZ, J.M. *Introducción a la Teoría de Conjuntos*, cuarta edición. Facultad de Ciencias Universidad Nacional de Colombia, 2002.
- [3] HRBACEK, K. & JECH, T. *Introduction to Set Theory*, third edition. CRC, 1999.
- [4] HERNANDEZ, F. *Teoría de Conjuntos*, segunda edición. Sociedad Matemática Mexicana, 2003.
- [5] BENAVIDES, J. *La Independencia de la Hipótesis del Continuo sobre un Modelo Fibrado para la Teoría de Conjuntos*, Tesis de Pregrado, Universidad de los Andes, 2004.
- [6] VERA, F. *Científicos Griegos*. Aguilar, S.A. de Ediciones, 1970.

2.12 Fractales y autómatas celulares: Exploración computacional

Edisson Andres Joja Mejia¹, Catalina M. Rúa-Alvarez²

Resumen

Los fractales y los autómatas celulares son dos áreas fundamentales de las matemáticas y la computación que han sido exploradas de manera independiente en varios estudios. Sin embargo, la intersección entre estos dos campos ofrece una oportunidad para investigar la generación de patrones fractales a partir de reglas simples en autómatas celulares. La necesidad del estudio de estas dos áreas es importante tanto desde el punto de vista teórico, como también desde sus aplicaciones prácticas en diversas áreas como el modelado de sistemas naturales y físicos e incluso en la generación de arte algorítmico, entre otros. Este trabajo presenta una exploración computacional, mediante Python, de fractales generados por métodos numéricos y autómatas celulares. Además, se mostrarán visualizaciones resultantes de esta investigación que llevan a explorar los fractales y cómo algunos de estos patrones pueden ser generados a partir de autómatas celulares, y se discutirá su aplicabilidad en contextos como la modelación de epidemias. Trabajo en conjunto con Juneth Andrea Terán (CESMAG).

Palabras & frases claves: Autómatas celulares, Fractales, Triángulo de Sierpiński, Visualización computacional.

1. Introducción

Los fractales son estructuras geométricas que se caracterizan por la autosimilitud y por su complejidad infinita a distintas escalas. El concepto de fractal, derivado del latín fractus que se traduce como fragmentado e irregular[1], fue introducido por el matemático Benoit Mandelbrot en 1975 que se considera el padre de la geometría fractal. Aunque la idea de formas irregulares y auto semejanza ha estado presente en las matemáticas desde hace siglos, según [2] la mención explícita quizá más remota en la historia sobre el fenómeno de auto semejanza se remonta al siglo V a.C., al examinar las ideas del filósofo jonio Anaxágoras de Clazomene. Según Anaxágoras, el universo fue un caos de innumerables semillas al cual la mente mediante un movimiento de rotación dio orden y forma, lo que lleva a una descripción fractal.

A finales del siglo XIX y principio del XX surgieron ejemplos más formales, como el conjunto de cantor, la curva de Von Koch, el triángulo de Sierpinski y las curvas de Peano, los cuales sentaron las bases para el estudio moderno de los fractales. Posteriormente con el trabajo de Hausdorff sobre el método de medida y dimensión el cual es fundamental en el estudio de este tipo de conjuntos y fenómenos, y más tarde con los aportes de Julia y Fatou en sistemas dinámicos, se consolidaron herramientas fundamentales para caracterizar la auto similitud y la irregularidad.

¹Estudiante de la Licenciatura en matemáticas, Universidad de Nariño. Correo: eajojoa22B@udenar.edu.co

²Docente del Departamento de Matemáticas y Estadística de la Universidad de Nariño. Correo: catalina.rua@udenar.edu.co

El trabajo de Mandelbrot supuso un antes y un después para el estudio de los fractales ya que retomó esos trabajos y apoyándose en el uso de computadores logró detectar ciertas características comunes de auto similitud e irregulares en objetos, situaciones y fenómenos de la naturaleza ver [2]. De este modo los fractales pasaron de ser construcciones teóricas a convertirse en un lenguaje matemático capaz de describir estructuras complejas que están presentes en la naturaleza. En la actualidad se conocen dos grandes categorías: fractales lineales, que son los que se generan a través de la repetición de procesos infinitos a partir de una figura geométrica; y los no lineales, que se desarrollan a partir de una secuencia de operaciones que pueden incluir números reales o complejos [8].

Es así como en [3], se empleaba el método de Newton para la generación de fractales no lineales relacionados con el cálculo numérico de raíces complejas. Este trabajo generó un interés por profundizar en el estudio de los fractales, analizando sus principales categorías y explorando su generación mediante herramientas computacionales como lo es Python. Obteniendo como resultado figuras fractales asociadas con la convergencia a las raíces de polinomios complejos como en [3], generando adicionalmente el fractal relacionado con la cantidad de iteraciones del método numérico y extendiéndolo al cálculo de las raíces de otras funciones se obtienen figuras que generan una atracción artística [4]. De forma respectiva, en la Figura 1 se presentan algunos resultados obtenidos en este sentido, los cuales serán explicados con mayor detalle durante la presentación.

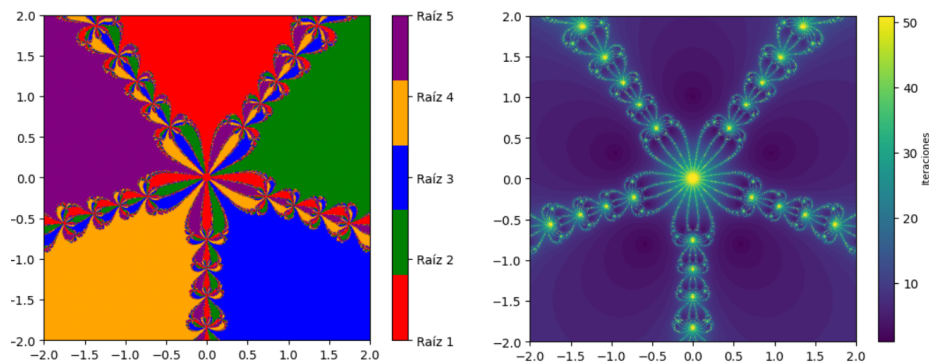


Figura 1: Fractal de convergencia y cantidad de iteraciones para $z^5 - 1 = 0$.

Por otra parte, los autómatas celulares introducidos formalmente por John Von Neumann y popularizados por Stephen Wolfram se consideran útiles para modelar comportamientos complejos a partir de reglas simples. Según Stephen Wolfram, una de las características principales que tiene los autómatas celulares es que su comportamiento se puede representar de manera visual, ya que un autómata celular consiste en una línea de celdas donde cada una es coloreada de blanco o negro dependiendo las reglas establecidas. Ver [5].

Un aspecto importante de los autómatas celulares es que se pueden clasificar en un total de 256 reglas numeradas del 0 al 255. Dentro de este conjunto se hallan ejemplos como la Regla 90, y su particular similitud con el fractal lineal conocido como triángulo de Sierpiński[5]. La Regla 90 es un autómata celular unidimensional que opera sobre una fila de celdas, cada una con un estado binario: 0 (blanco) o 1 (negro). En cada paso de iteración de esta regla, el estado de una celda se actualiza según el estado de sus dos vecinos inmediatos (izquierda y derecha), ignorando su propio estado.

La regla establece que una celda será 1 en el siguiente paso si exactamente uno de sus vecinos es 1; en caso contrario, será 0. En la Figura 2, se tiene la representación gráfica de la matriz binaria resultante de la evolución de un autómata celular unidimensional bajo la Regla 90, aplicada durante 9 pasos a un vector inicial de 19 elementos, donde únicamente la celda central tiene el valor 1 y todas las demás son 0. Cada fila representa el estado del sistema en un paso de tiempo y entre mayor sea la cantidad de elementos del vector inicial y la cantidad de pasos, se observará más claramente la relación con el triángulo de Sierpiński. En el póster se presentarán simulaciones realizadas en Python que ilustran esta relación, destacando el potencial de los autómatas celulares como generadores de estructuras autosimilares.

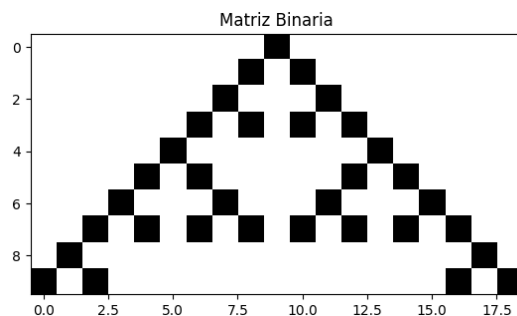


Figura 2: Regla 90 aplicada a $[0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0]$.

Actualmente los autómatas celulares se utilizan como herramienta de modelación biológica, ya que permite simular procesos como lo es la propagación de enfermedades como por ejemplo en [6]. Estas aplicaciones son posibles al extender la aplicación de autómatas celulares a casos bidimensionales, en los cuales las reglas se pueden generalizar del caso binario a más de dos estados, lo que permite relacionarlos con modelos de epidemiología como el modelo SIR (Susceptibles, Infectados y Recuperados, ver [7]). Se presentará una introducción de esta aplicación de autómatas celulares y se discutirán trabajos futuros para esta investigación. Las figuras generadas se obtienen con implementación en Python de autoría propia.

Referencias

- [1] UREÑA, JUAN NAVAS & TERUEL, JOSÉ MARÍA QUESADA, *Fractales: la frontera entre el arte y las matemáticas*. Universidad de Jaén, 2013.
- [2] SABOGAL, SONIA & ARENAS, GILBERTO, *Una introducción a la geometría fractal*. Universidad Industrial de Santander, Ediciones UIS, 2011.
- [3] TERÁN TARAPUÉS, JUNETH ANDREA & RÚA-ÁLVAREZ, CATALINA MARÍA, *EL MÉTODO DE NEWTON PARA RAÍCES COMPLEJAS. FRACTALES EN EL PROBLEMA DE CAYLEY*. Revista EIA. **15**(29) (2018):97–108.
- [4] TALANQUER, VICENTE A., *Fractus, fracta, fractal: fractales, de laberintos y espejos*. Fondo de Cultura Económica, 1996.

- [5] WOLFRAM, STEPHEN, *A New Kind of Science*. Wolfram Media, 2002.
- [6] PEDRO GUIMARÃES CANINAS, PRISCILA CARDOSO CALEGARI & ÁLVARO JUNIO PEREIRA FRANCO, *Um estudo sobre árvores geradoras como alternativas conexas para o controle de doença em um grafo de infecção*. Anais do LV Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional. **55** (2023):1–12.
- [7] DIAZ, ANA C., RÚA-ALVAREZ, CATALINA M. & RODRIGUEZ, PABLO M., *On a general model of rumor transmission*. Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics. **8**(1) (2021):1–2.
- [8] GUERRERO, DIEGO J., RÚA-ALVAREZ, CATALINA M. & CASTILLO, JOHN H., *Fractales, Matemáticas y Algoritmos*. Informe final, Universidad de Nariño, 2023.

ANÁLISIS Y ECUACIONES DIFERENCIALES



Grupo EDAD

El grupo Ecuaciones Diferenciales y Análisis Difuso (EDAD) de la UIS se interesa por las áreas de Ecuaciones Diferenciales Parciales, el Análisis Numérico, la Teoría de Control Óptimo, Problemas Inversos, el Análisis y la Lógica Fuzzy, y Espacios de Funciones. Está conformado por profesores de la Escuela de matemáticas, y estudiantes de pregrado y posgrado de la Escuela de Matemáticas. El grupo mantiene proyectos de investigación de manera permanente sobre las temáticas de investigación que aborda, así como también, dirige estudiantes de pregrado y de posgrado interesados en desarrollar sus trabajos y tesis de grado en alguna de las líneas de investigación. Estudiantes interesados en las temáticas del grupo así como profesores que deseen visitar la universidad y buscar interacción académica con los integrantes del grupo, son bienvenidos. Para ver detalles de los artículos de investigación publicados por los integrantes del grupo, consultar directamente en el enlace de cada profesor.

3.1 Advances in Riemann problems for pressureless gas dynamics: damping effects and generalized models

Richard De la cruz¹, Wladimir Neves²

Resumen

The pressureless gas dynamics system arises as a fundamental model in the study of the formation of singularities, delta shocks, and concentration phenomena in hyperbolic conservation laws. Its mathematical structure exhibits rich and challenging behaviors, including non-uniqueness of weak solutions and the emergence of measures as natural descriptions of evolving mass concentrations. In this talk, we review significant developments in the analysis of pressureless gas dynamics. The Riemann problem is characterized by the occurrence of delta shocks and vacuum states. We present recent results concerning generalized models. Specifically, we describe the existence and uniqueness for the Riemann problem to the generalized pressureless gas dynamics system. Finally, we discuss the existence and uniqueness of Riemann solutions for pressureless systems with time-variable and time-gradually vanishing damping terms. These results reveal new mechanisms by which damping can regulate singularity formation and affect the long-time dynamics.

Keywords: pressureless gas dynamics, delta shocks, balance laws, time-dependent damping.

1. The classical pressureless gas dynamics system

The classical pressureless gas dynamics system is

$$\begin{cases} \rho_t + (\rho u)_x = 0, \\ (\rho u)_t + (\rho u^2)_x = 0, \end{cases} \quad (1)$$

where ρ denotes a density field and u the velocity field. This system appears in contexts where the pressure term is negligible, for instance, in highly compressible flows or in dilute gases, yet it exhibits surprisingly intricate behavior. Characteristics may collapse in finite time, leading to the formation of vacuum zones and to concentration of mass. In many situations, weak solutions take the form of Radon measures rather than classical functions. The first study for the usual pressureless gas dynamics system is due to Bouchut [1] in 1994. Bouchut studied the existence of solutions to the Riemann problem for the pressureless gas dynamics system (1), introducing a notion of measure solution and delta shock waves were obtained. However, uniqueness was not studied. The existence of a weak solution to the Cauchy problem was first obtained independently by E, Rikov, Sinai [6] in 1996, and Brenier, Grenier [3] in 1998. In particular, the authors in [6] show that, the standard entropy condition $(\rho\Phi(\rho))_t + (\rho u\Phi(\rho))_x \leq 0$ in the sense of distributions, where Φ is a convex function, is not enough to express a uniqueness criterion for weak solutions to the Cauchy problem. In 1997, Wang and Ding [11] proved that the pressureless gas dynamics system has a unique weak

¹School of Mathematics and Statistics, Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia. Correo: richard.delacruz@uptc.edu.co

²Instituto de Matemática, Universidade Federal do Rio de Janeiro. Correo: wladimir@im.ufrj.br

solution using the Oleinik entropy condition when the initial data ρ_0 and u_0 are both bounded measurable functions. However, the solution for the Cauchy problem for the pressureless gas dynamics system is in general a Radon measure [6]. In 2001, Huang and Wang [7] studied the Cauchy problem for the system (1), when initial data ρ_0 and u_0 are a Radon measure and a bounded measurable function, respectively. Then, they showed the uniqueness of weak solutions under the Oleinik entropy condition together with an energy condition in the sense that, ρu^2 weakly converges to $\rho_0 u_0^2$ as $t \rightarrow 0+$. A central phenomenon in system (1) is the emergence of *delta shock waves*: concentrated measures traveling along a curve, representing aggregation of mass. Actually, on physical grounds, delta shock solutions typically display concentration occurrence in a complex system [2, 9]. These structures naturally arise in models of sticky particle dynamics, where inelastic collisions produce clusters of particles that move with a common velocity. For Riemann initial data, two regimes dominate [10, 12]: if $u_- < u_+$, a vacuum region develops between two contact discontinuities; if $u_- > u_+$, a delta shock forms, whose propagation must be determined through an over-compressive entropy condition.

2. Generalized models and damping effects

In 2016, Keita and Bourgault [8] solved the Riemann problem for the pressureless system with linear damping,

$$\begin{cases} \rho_t + (\rho u)_x = 0, \\ (\rho u)_t + (\rho u^2)_x = -\sigma \rho u. \end{cases}$$

where σ is a constant strictly positive. In this case, the Riemann solutions showing vacuum states and delta shock solution. In 2021, De la cruz and Juajibioy [4] obtained delta shock solutions for a generalized pressureless system with linear damping,

$$\begin{cases} \rho_t + (\rho u^k)_x = 0, \\ (\rho u)_t + (\rho u^{k+1})_x = -\sigma \rho u. \end{cases}$$

where k is an odd natural number and σ is a constant strictly positive. Recently, De la cruz and Neves [5] has been extended the system (1) to the following class of nonautonomous quasilinear systems with time-variable coefficients and time-dependent (linear) damping represented by the following systems:

$$\begin{cases} \rho_t + \alpha(t)(\rho u)_x = 0, \\ (\rho u)_t + \alpha(t)(\rho u^2)_x = -\sigma(t)\rho u, \end{cases}$$

where the time-dependent coefficient $\alpha(t)$ modifies the speed of propagation, and the damping $\sigma(t)$ may vanish gradually, here $0 < \alpha \in C([0, \infty))$ and $0 \leq \sigma \in L^1_{loc}([0, \infty))$. Both effects substantially enrich the dynamics. These models display modified rarefaction fans determined by effective time-dependent characteristic speeds, non-stationary contact discontinuities, and delta shocks whose speed incorporates the cumulative influence of $\alpha(t)$ and $\sigma(t)$.

3. Comments and perspectives

The study of pressureless systems with time-dependent coefficients and damping mechanisms opens several natural and challenging research directions. One central question concerns the stability of

delta shock waves when the propagation coefficient $\alpha(t)$ exhibits temporal fluctuations. Another important direction involves the analysis of wave interactions in models where the damping term depends not only on time but also on the spatial variable, a setting in which resonance phenomena and new types of nonclassical structures may emerge. A further perspective lies in extending the present methods to more general triangular or weakly coupled systems of balance laws, where the interplay between characteristic fields is significantly more delicate. Overall, the recent advances provide a unified viewpoint for understanding how damping, variable propagation speeds, and generalized fluxes shape the dynamics of concentration phenomena. Beyond their intrinsic interest, these developments offer new tools for the analysis of nonautonomous hyperbolic systems and deepen our understanding of the formation and evolution of singular structures in complex media.

Referencias

- [1] F. BOUCHUT, *On zero pressure gas dynamics*. En: Advances in Kinetic Theory and Computing, Series on Advances in Mathematics for Applied Sciences, Vol. 22, pp. 171–190. World Scientific, Singapore, 1994.
- [2] Y. BRENIER, *Solutions with concentration to the Riemann problem for one-dimensional Chaplygin gas dynamics*. J. Math. Fluid Mech. **7** (2005): S326-S331.
- [3] Y. BRENIER and E. GRENIER, *Sticky particles and scalar conservation laws*. SIAM J. Numer. Anal. **35**(6) (1998): 2317-2328.
- [4] R. DE LA CRUZ and J.C. JUJIBIOY, *Delta shock solution for generalized zero-pressure gas dynamics system with linear damping*, Acta Appl. Math. **177**(1) (2021): 1-25.
- [5] R. DE LA CRUZ and W. NEVES, *On a class of nonautonomous quasilinear systems with general time-gradually-degenerate damping*. J. Differ. Equ. **416** (2025): 52-81.
- [6] W. E, Y-G. RYKOV and Y-G. SINAI, *Generalized variational principles, global weak solutions and behavior with random initial data for systems of conservation laws arising in adhesion particle dynamics*. Commun. Math. Phys. **177** (1996): 349-380.
- [7] F. HUANG and Z. WANG, *Well posedness for pressureless flow*. Commun. Math. Phys. **222** (2001): 117-146.
- [8] S. KEITA and Y. BOURGAULT, *Eulerian droplet model: delta-shock waves and solution of the Riemann problem*. J. Math. Anal. Appl. **472** (2019): 1001-1027.
- [9] D.J. KORCHINSKI, *Solution of a Riemann problem for a 2×2 system of conservation laws possessing no classical weak solution*, Thesis, Adelphi University, 1977.
- [10] W.C. SHENG and T. ZHANG, *The Riemann Problem for the Transportation Equations in Gas Dynamics*, Memoirs of the American Mathematical Society, Vol. 137, Am. Math. Soc., Providence, 1999.
- [11] Z. WANG and X. DING, *Uniqueness of Cauchy problem for transportation equation*. Acta Math. Sci. **17**(3) (1997): 341-352.

- [12] H. YANG, *Riemann problems for a class of coupled hyperbolic systems of conservation laws*, J. Differ. Equ. **159** (1999): 447-484.

3.2 Navier-Stokes equations and the sixth millennium problem (an expository talk)

Lucas C. F. Ferreira¹

Resumen

The purpose of this lecture is to present some of the main ideas and mathematical approaches that have been developed to address one of the most fundamental and challenging open problems in fluid mechanics:

(P) Does a smooth solution of the three-dimensional Navier–Stokes equations remain smooth for all time ($t > 0$), or can it develop a finite-time singularity?

This question is the sixth of the seven Millennium Prize Problems established by the Clay Mathematics Institute (see [1]), which offers a prize of one million US dollars for its complete resolution. Despite significant advances over the past decades, the problem remains open and continues to stimulate research in partial differential equations, mathematical analysis, and fluid dynamics.

The lecture is intended for a broad mathematical audience and will provide an accessible overview of the problem, highlighting some of the principal techniques, partial results, and current research directions without assuming specialized background knowledge. This is an expository talk.

Keywords: Navier-Stokes; The sixth millennium problem; Global smoothness; Finite-time singularity; Clay Mathematics Institute

Referencias

- [1] C. L. FEFFERMAN, *Existence and Smoothness of the Navier-Stokes Equation, Official Problem Description*. Clay Mathematics Institute homepage: www.claymath.org/millennium/navier-stokes-equation

¹State University of Campinas. Correo: lcff@ime.unicamp.br

3.3 El método del disparo para ecuaciones de Euler-Bernoulli en modelos de nanovigas

Arturo Sanjuán¹

Resumen

En este trabajo estudiamos la ecuación diferencial adimensional

$$u''''(x) = f(u(x)) \quad (1)$$

para $x \in (0, 1)$, donde $f \in C([0, 1])$ es una no-linealidad singular que satisface $f(s) \rightarrow +\infty$ cuando $s \uparrow 1$. Se consideran distintas condiciones de frontera en $\{0, 1\}$, buscando soluciones clásicas positivas que satisfagan $u < 1$. Esta ecuación semilineal modela la deflexión en sistemas micro/nanoelectromecánicos (MEMS/NEMS), con aplicaciones en activadores, sensores y puentes a escala submicrométrica.

Partiendo de la deducción física del modelo, resolvemos el problema aplicando el método de *shooting* bidimensional a no linealidades truncadas f_n . Para esto utilizamos la teoría del grado de Brouwer. Este enfoque permite transformar el problema de valores en la frontera en un problema de valores iniciales y posibilita su implementación numérica, la cual realizamos en Python. Finalmente contrastamos los resultados numéricos obtenidos, con los estudios teóricos reportados en la literatura.

Palabras & frases claves: ecuaciones semilineales de cuarto orden, problemas con valores en la frontera, método de *shooting*, modelos de dispositivos micro/nanoelectromecánicos, problemas singulares.

1. Introducción

Los sistemas MEMS/NEMS son dispositivos a escala micrométrica o nanométrica que integran elementos mecánicos y electrónicos, donde un componente mecánico puede activar una señal eléctrica, o viceversa. Estas tecnologías permiten la fabricación de sistemas extremadamente pequeños, eficientes y de bajo costo, con aplicaciones que van desde sensores de presión, micrófonos, giroscopios y acelerómetros en teléfonos celulares, hasta actuadores para microespejos y biosensores [4, cap. 1].

Nos centraremos en dispositivos modelables en una dimensión como activadores, pinzas o sensores que funcionan como vigas. Para deducir el modelo, consideramos elementos de la teoría de elasticidad que justifican el término u'''' . También consideramos las fuerzas relevantes a escalas submicrométricas, como el efecto de borde, la fuerza de van der Waals y el efecto Casimir. Tras el reescalamiento, la suma adimensional de estas fuerzas adopta la forma

$$f(u) = \sum_{i=1}^4 \frac{\lambda_i}{(1-u)^i},$$

lo que da lugar precisamente a la ecuación no lineal (1). Usualmente, la viga está sujeta a alguna de las condiciones de frontera que se muestran en la Tabla 1.

¹Profesor Titular Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Correo: aasanjuanc@udistrital.edu.co

Cuadro 1: Tipos de condiciones de frontera para la ecuación (1)

Simplemente soportada (SS)	$u(0) = u(1) = u''(0) = u''(1) = 0$
Totalmente empotrada (TE)	$u(0) = u(1) = u'(0) = u'(1) = 0$
Voladizo (V)	$u(0) = u'(0) = u''(1) = u'''(1) = 0$

2. Antecedentes

Dada la complejidad de la ecuación (1) sujeta a cualquiera de estas condiciones, los resultados teóricos existentes son más bien limitados. Por ello, suelen emplearse diversos métodos semi-analíticos como la descomposición de Adomian, perturbación homotópica o Galerkin [4, cap. 2]. También se emplean diversos métodos numéricos como el método de diferencias finitas, elementos finitos y cuadratura generalizada [4, cap. 3].

Desde el punto de vista teórico, se cuenta con algunos resultados en bolas para el caso particular $f(u) = \lambda/(1-u)^2$ con condiciones de placas totalmente empotradas. Por ejemplo, en [2] se establece la existencia de un voltaje crítico λ_* tal que, para $\lambda \in (0, \lambda_*)$ existen soluciones clásicas. En este caso, usan el método de sub y super-soluciones. Por su parte, en [3] se demuestra la existencia de una solución mínima y otra de tipo paso de montaña, mostrando además que toda solución es regular, incluida la única solución extrema u^* . Finalmente, en [5] se encuentra que para $n \geq 13$ la única solución débil extrema u^* es singular y que para $\lambda > \lambda_*$ no existen soluciones.

3. Método empleado

Para abordar el problema mediante el método de *shooting*, similar al empleado en [1], truncamos la no-linealidad en $x_n = 1 - 1/n$ definiendo $f(x) = f(x_n)$ para $x \in (x_n, 1)$. Para cada condición de frontera de la Tabla 1, formulamos el problema de valores iniciales asociado en $x = 0$. Mediante la teoría del grado de Brouwer estudiamos la existencia de soluciones para el problema truncado. Finalmente, implementamos el método de Runge-Kutta en un bucle anidado que varía los parámetros iniciales del disparo, permitiendo encontrar soluciones numéricas al problema.

4. Resultados y discusión

El método de *shooting* permitió encontrar soluciones numéricas para el problema unidimensional con no-linealidades truncadas. Si bien el estudio se restringe al caso $n = 1$ y utiliza truncamientos, este enfoque puede adaptarse para tratar no-linealidades más generales y diversos tipos de condiciones de frontera, superando algunas limitaciones presentes en la literatura teórica. Aunque existen métodos numéricos más robustos para este tipo de problemas, el método de *shooting* proporciona perspectivas valiosas para una posible demostración teórica en dimensión $n = 1$. Como validación, comprobamos que nuestros resultados coinciden con los obtenidos en [2] mediante técnicas completamente diferentes.

Agradecimientos: Este trabajo cuenta con financiamiento parcial de la Oficina de Investigaciones de la Universidad Distrital Francisco José de Caldas (proyecto PIS-2025-2063) y es realizado por el Semillero de Investigación en Análisis Matemático SAMAT dirigido por el autor y conformado por

los estudiantes Valeria Montaña (líderesa), Juan Pablo Guerrero, José Miguel Niño Suárez, Andrés Felipe Rodríguez y Julian Vera.

Referencias

- [1] P. AMSTER AND P. P. CÁRDENAS ALZATE, *A shooting method for a nonlinear beam equation*, Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications. **68** (2008):2072–2078.
- [2] D. CASSANI, J. M. DO Ó, AND N. GHOUSSOUB, *On a Fourth Order Elliptic Problem with a Singular Nonlinearity*. Advanced Nonlinear Studies. **9** (2009):177–197.
- [3] Z. GUO, B. LAI, AND Y. DONG, *Revisiting the biharmonic equation modelling electrostatic actuation in lower dimensions*. En: Proceedings of the American Mathematical Society. **142** (2014):2027–2034.
- [4] A. KOOCHI AND M. ABADYAN, *Nonlinear Differential Equations in Micro/Nano Mechanics: Application in Micro/Nanostructures and Electromechanical Systems*. Elsevier, 2020.
- [5] B. LAI AND Z. DU, *Properties of the extremal solution for a fourth-order elliptic problem* En: Proceedings of the Royal Society of Edinburgh **14A** (2012):1051–1069.

3.4 Modelado de un problema de control de temperatura con fluidos

Élder J. Villamizar-Roa¹

Resumen

En esta charla se presentará un modelo matemático para describir un problema real en donde ocurre una interacción de la propagación del calor en una estructura sólida sometida a cargas térmicas y enfriada por la acción de un fluido viscoso incompresible. El modelo consiste en un sistema acoplado de EDP, entre el sistema de Navier-Stokes y dos ecuaciones para la temperatura, una describiendo la temperatura de la estructura y otra, describiendo la temperatura del fluido. Planteamos un problema de control óptimo para controlar la distribución de temperatura en la estructura sólida, considerando como variable de control la temperatura del fluido en una parte de la frontera del dominio. Algunos problemas de control óptimo con estados envolviendo la interacción entre las ecuaciones de los fluidos y del calor, y con condiciones de frontera de tipo mixto, han sido considerados en [1]. Analizaremos la existencia, unicidad y regularidad de soluciones débiles para el sistema de estado y luego demostramos la existencia de una solución óptima para el problema de control. Derivaremos un sistema de optimalidad y presentamos un esquema numérico para aproximar el problema de control vía un algoritmo de tipo gradiente. Finalmente mostraremos algunas ideas sobre generalizaciones del problema en el marco de la optimización de formas. El contenido de esta charla se basa en resultados obtenidos en [2].

Palabras & frases claves: Navier-Stokes, ecuación del calor, control óptimo, sistema de optimalidad

Referencias

- [1] D. A. RUEDA-GÓMEZ; E. J. VILLAMIZAR-ROA, *On the Rayleigh-Bénard-Marangoni system and a related optimal control problem*. Comput. Math. Appl. **74**(12) (2017):2969–2991.
- [2] R. LECAROS; J. LÓPEZ-RÍOS, G. MONTECINOS, E.J. VILLAMIZAR-ROA, *A control problem in a thermal-Stokes system*. Preprint (2025).

¹Universidad Industrial de Santander. Correo: jvillami@uis.edu.co

3.5 Multiple positive solutions for a Schrödinger p -Laplacian problem

Sigifredo Herrón¹, Emer Lopera², Diana Sánchez³

Resumen

We prove the existence of three positive solutions for the problem

$$\begin{aligned} -\Delta_p u + V(x)\varphi_p(u) &= \lambda f(u), \quad x \in \Omega, \\ u(x) &= 0, \quad x \in \partial\Omega, \end{aligned}$$

where $\lambda > 0$, Δ_p is the p -Laplacian operator, $N > p > 1$, Ω is a bounded domain in $\mathbb{R}^N$ with connected and smooth boundary, and $\varphi_p(s) := |s|^{p-2}s$, $s \in \mathbb{R}$. In our study, $V \in L^\infty(\Omega)$ and $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ is a C^1 function. The reaction term, f , is increasing and p -sublinear at infinity. Our method relies on sub-super solution techniques and the use of a theorem on the existence of multiple fixed points. We extend some results known in the literature.

Palabras & frases claves: Subsolution; supersolution; Schrödinger type operator

1. Introducción

The purpose of this talk is to prove the existence of three positive solutions for the problem

$$\begin{aligned} -\Delta_p u + V(x)\varphi_p(u) &= \lambda f(u), \quad x \in \Omega, \\ u(x) &= 0, \quad x \in \partial\Omega, \end{aligned} \tag{1}$$

where Δ_p stands for the p -Laplacian operator, $N > p > 1$, $\varphi_p(s) := |s|^{p-2}s$, $s \in \mathbb{R}$, Ω is a bounded domain in $\mathbb{R}^N$ with connected and smooth boundary. Furthermore, we assume that $V \in L^\infty(\Omega)$, $\lambda > 0$ and $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ is a C^1 function.

$W_0^{1,p}(\Omega)$ denotes the Sobolev space with the norm

$$\|u\| := \left(\int_{\Omega} |\nabla u|^p dx \right)^{1/p}.$$

Also, $\|u\|_q$ will denote the usual norm in $L^q(\Omega)$, for $1 \leq q \leq \infty$.

Let $R > 0$ be the largest number such that $B_R \subseteq \Omega$, where B_R is the ball with radius R centered at the origin in $\mathbb{R}^N$. Consider the positive number

$$M_1 := \inf_{0 < \varepsilon < R} \frac{NR^{N-1}}{\varepsilon^N(R - \varepsilon)^{p-1}}$$

and $B > 0$ such that

$$0 < \frac{1 - B\|V\|_\infty}{B} < M_1. \tag{2}$$

We shall use the following assumptions:

¹Universidad Nacional de Colombia Sede Medellín. Correo: sherron@unal.edu.co

²Universidad Nacional de Colombia Sede Manizales. Correo: edloperar@unal.edu.co

³Universidad Nacional de Colombia Sede Manizales. Correo: dmsanchezm@unal.edu.co

(A1) $f \in C^1([0, \infty))$ is increasing and $f(0) > 0$.

(A2) $\lim_{u \rightarrow \infty} f(u)/u^{p-1} = 0$.

(A3) There exists $0 < c_V < \lambda_1$ such that $-c_V < V(x)$ a.e. $x \in \Omega$, where

$$\lambda_1 := \inf \left\{ \int_{\Omega} |\nabla u|^p dx : u \in W_0^{1,p}(\Omega), \|u\|_p = 1 \right\},$$

i.e., λ_1 is the principal eigenvalue of $(-\Delta_p, W_0^{1,p}(\Omega))$.

Let us observe that under hypothesis (A3),

$$\mu_1 := \inf \left\{ \int_{\Omega} (|\nabla u|^p + V(x)|u|^p) dx : u \in W_0^{1,p}(\Omega), \|u\|_p = 1 \right\} > 0,$$

which is the first eigenvalue of the problem $-\Delta_p u + V(x)\varphi_p(u) = \mu\varphi_p(u)$ with homogeneous boundary condition. This fact is fundamental to our approach.

For our analysis we shall use the properties of the solution of the e -problem

$$\begin{aligned} -\Delta_p e + V(x)\varphi_p(e) &= 1, \quad \text{in } \Omega, \\ e &= 0, \quad \text{on } \partial\Omega. \end{aligned} \tag{3}$$

Indeed, since $\mu_1 > 0$, there exists $e \in W_0^{1,p}(\Omega)$ such that $e(x) > 0$ a.e. $x \in \Omega$, it satisfies (3). Moreover, $e \in L^\infty(\Omega)$ and by [5, Theorem 6.2.7] there exists $0 < \beta < 1$ such that $e \in C_0^{1,\beta}(\overline{\Omega})$. Furthermore, $\frac{\partial e}{\partial \eta} < 0$ on $\partial\Omega$, where for $x_0 \in \partial\Omega$, $\eta := \eta(x_0)$ denotes the outward unit normal to $\partial\Omega$ at x_0 [5, Theorem 6.2.8]. Also, we assume that

(A4) There exist positive numbers $a < b < d$ such that

$$Q(a, b) := \frac{\varphi_p(a)f(b)}{f(a)\varphi_p(b)} > \frac{M_1\|e\|_\infty^{p-1}}{1 - B\|V\|_\infty}, \tag{4}$$

$$d^{p-1} > \frac{R^p(1 - B\|V\|_\infty)f(b)}{(p')^{p-1}\|e\|_\infty^{p-1}f(a)} a^{p-1} \tag{5}$$

and the function $\tilde{f}(s) := f(s) - \frac{f(b)}{b^{p-1}}B\|V\|_\infty s^{p-1}$ is positive for all $s \in [0, d]$ and is increasing over $[a, d]$. Our main theorems read as follows.

Teorema 1. *Let f be a continuous, non-negative and non-decreasing function and $\lambda > 0$. Assume also that problem (1) admits a subsolution $\underline{w}_1$, a strict supersolution $\overline{w}_1$, a strict subsolution $\underline{w}_2$ and a supersolution $\overline{w}_2$, such that $\underline{w}_1 < \overline{w}_1 < \overline{w}_2$, $\underline{w}_1 < \underline{w}_2 < \overline{w}_2$ and $\underline{w}_2 \not\leq \overline{w}_1$. Then problem (1) has at least three distinct solutions u_i , $i = 1, 2, 3$ such that $\underline{w}_1 \leq u_1 < u_2 < u_3 \leq \overline{w}_2$.*

As applications of this theorem we obtain the following results.

Teorema 2. *Let $\Omega := B_R$ the ball of radius R centered at the origin in $\mathbb{R}^N$. Assume that hypotheses (A1)–(A4) hold. Then, for each $\lambda \in [\lambda_*, \lambda^*]$, problem (1) admits at least three positive solutions, where*

$$\lambda_* := M_1 \frac{\varphi_p(b)}{\tilde{f}(b)} \quad \text{and} \quad \lambda^* := \frac{\varphi_p(a)}{f(a)\|e\|_\infty^{p-1}}.$$

Observe that (4) implies that $\lambda_* < \lambda^*$.

Teorema 3. *Let Ω be a bounded domain in $\mathbb{R}^N$ containing the origin with connected boundary of class C^2 . Assume that the hypotheses (A1)–(A4) hold. Then, for each $\lambda \in [\lambda_*, \lambda^*]$, problem (1) admits at least three positive solutions.*

The solutions of problem (1) will be understood in the weak sense.

2. General ideas (outline)

To describe the proof of our results we will first present some relevant facts on sub and super solutions in the context of problem (1), which are necessary for the proofs of Theorems 2 and 3. To prove Theorem 1 we use some results related to completely continuous maps defined on retracting Banach spaces, as well as strong comparison principles and maximum principles. Further we construct a strict subsolution to problem (1) and then, applying Theorem 1, we prove Theorem 2. Finally, we describe the main ideas to prove Theorem 3.

Referencias

- [1] H. AMANN, *Fixed point equations and nonlinear eigenvalue problems in ordered Banach spaces*. SIAM review. **18**(4) (1976):620–709.
- [2] A. CASTRO, J. COSSIO, S. HERRÓN & C. VÉLEZ, *Infinitely many radial solutions for a p -Laplacian problem with indefinite weight*. Discrete Contin. Dyn. Syst. **41**(10) (2021):4805–4821. DOI: 10.3934/dcds.2021058
- [3] A. CASTRO, J. COSSIO, S. HERRÓN & C. VÉLEZ, *Infinitely many radial solutions for a p -Laplacian problem with negative weight at the origin*. Electron. J. Differential Equations, Special Issue **01** (2021):101–114. DOI:10.58997/ejde.sp.01.c2
- [4] R. DHANYA, E. KO & R. SHIVAJI, *A three solution theorem for singular nonlinear elliptic boundary value problems*. Journal of Mathematical Analysis and Applications **424**(1) (2015):598–612.
- [5] L. GASINSKI & N. PAPAGEORGIOU, *Nonlinear analysis (mathematical analysis and applications)* Vol. 9. CRC Press, 2005.
- [6] S. HERRÓN, E. LOPERA & D. SÁNCHEZ, *Existence of three positive solutions for a p -sublinear problem involving a Schrödinger p -Laplacian type operator*. Electron. J. Differential Equations. **2025**(47) (2025):1–13.
- [7] E. KO, E. K. LEE & R. SHIVAJI, *Multiplicity of positive solutions to a class of schrödinger-type singular problems*. Discrete and Continuous Dynamical Systems-S. **17**(5–6) (2024):2224–2233.

3.6 On the solvability for Schrödinger-Boussinesq-type systems

Carlos Banquet¹, Élder Villamizar², Lucas Ferreira³

Resumen

This presentation focuses on the analysis of nonlinear Schrödinger–Boussinesq systems within the setting of weak- L^p spaces, emphasizing the influence of time-fractional dynamics and Lévy-type trajectories in the model. We establish both local and global well-posedness results for mild solutions, together with asymptotic stability, under polynomial-type nonlinearities and initial data belonging to weak- L^p spaces. In addition, within the same functional framework, we prove the well-posedness of solutions for the associated dispersive Boussinesq model.

Palabras & frases claves: Schrödinger-Boussinesq system; Fractional operators; Local and global solutions.

1. Introduction

In this talk, we propose a theoretical analysis of the space-time fractional version of the Schrödinger-Boussinesq system. The time-fractional aspect can be formulated using various types of fractional derivatives; however, we adopt the Caputo derivative, as it is generally more suitable for initial value problems compared to, for instance, the Riemann-Liouville derivative. The spatial fractional component is described using the fractional Laplacian. Specifically, we consider the following system of partial differential equations:

$$\begin{cases} i^c D_t^\alpha u - (-\Delta)^{\beta/2} u = u|u|^{\lambda-1}v|v|^{m-1}, & x \in \mathbb{R}^n, t > 0, \\ {}^c D_t^\delta v + \kappa(-\Delta)^{\mu/2} v + (-\Delta)^\mu v = \gamma(-\Delta)^{\frac{\theta}{2}}|u|^\rho, & x \in \mathbb{R}^n, t > 0, \\ u(x, 0) = u_0(x), \quad v(x, 0) = v_0(x), & x \in \mathbb{R}^n, \\ v_t(x, 0) = v_1(x), & x \in \mathbb{R}^n, \end{cases} \quad (1)$$

where the parameters satisfy $0 < \alpha < 1$, $0 < \delta < 2$, $\beta, \mu > 0$, $\lambda, \rho, m \geq 1$, $\kappa \geq 0$, and $\gamma \in \mathbb{R}$. The unknowns are the functions $u : \mathbb{R}^n \times (0, \infty) \rightarrow \mathbb{C}$ and $v : \mathbb{R}^n \times (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, with the spatial dimension $n \geq 1$. The functions u_0, v_0, v_1 represent the prescribed initial data.

In system (1), the operator $(-\Delta)^{\theta/2}$, for $\theta > 0$, denotes the fractional Laplacian of order $\theta/2$, which is defined via the Fourier transform as

$$(-\Delta)^{\theta/2} f(x) = \mathcal{F}^{-1} \left(|\xi|^\theta \widehat{f}(\xi) \right) (x),$$

where $\widehat{f}(\xi) = \mathcal{F}(f)(\xi)$ and $\mathcal{F}^{-1}(f)(\xi)$ denote the Fourier and inverse Fourier transforms, respectively. Additionally, ${}^c D_t^\alpha$ stands for the Caputo fractional derivative of order $\alpha > 0$, which is defined in terms of the Riemann–Liouville fractional integral. Specifically, for a locally integrable function

¹Universidad de Córdoba, Colombia. Correo: cbanquet@correo.unicordoba.edu.co

²Universidad Industrial de Santander, Colombia. Correo: jvillami@uis.edu.co

³Universidade Estadual de Campinas, Brasil.

$f : [0, \infty) \rightarrow X$, where X is a Banach space, the Riemann–Liouville fractional integral of order $\alpha \in (0, 1)$ is given by

$$I_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t - \tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau.$$

If $f \in C([0, \infty); X)$ and $I_t^{1-\alpha} f \in C^1((0, \infty); X)$, then the Caputo fractional derivative of order $\alpha \in (0, 1)$ is defined as:

$$D_t^\alpha f(t) := \frac{d}{dt} \left\{ I_t^{1-\alpha} [f(t) - f(0)] \right\} = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \left\{ \int_0^t (t - \tau)^{-\alpha} [f(\tau) - f(0)] d\tau \right\}.$$

Considering $\alpha = 1, \delta = 2$ and $\beta = \mu = 2$ in (1), formally we get the classical Schrödinger–Boussinesq system. Since $0 < \delta < 2$, defining $\sigma = \frac{\delta}{2}$ it holds $0 < \sigma < 1$; thus, (1) is formally equivalent to the fractional system

$$\begin{cases} i^c D_t^\alpha u - (-\Delta)^{\frac{\beta}{2}} u = u|u|^{4-1} v|v|^{m-1}, \\ {}^c D_t^\sigma v = (-\Delta)^{\frac{\mu}{2}} w, \\ {}^c D_t^\sigma w = -\kappa v - (-\Delta)^{\frac{\mu}{2}} v + \gamma|u|^p, \\ u(0) = u_0, v(0) = v_0, w(0) = v_1 = (-\Delta)^{\frac{\mu}{2}} w_0, \end{cases} \quad (2)$$

for some w_0 .

2. Methods

As usual in some partial differential equations we start by establishing the mild formulation of (2) in the fractional setting. When working with high order in time fractional differential equations, a natural option to solve them, is to transform the original equation in a system of fractional ordinary differential equations, as it happens in the second order case. However, the theory of fractional ordinary differential systems is even incomplete. In our case, we divided ${}^c D_t^\delta v$ by half ${}^c D_t^{\delta/2}$ and then, taking into account a result in Kilbas, Srivastava and Trujillo [4], p. 231, we derive a mild formulation for (2).

Next, using the properties of the Mittag-Leffler functions we obtained some time decay estimates for some operators appearing on the integro-differential (mild) formulation of system (2).

Later, we derive classes of initial data based on weak- L^p spaces for which we obtain the existence of local-in-time mild solutions, as well the existence of global-in-time mild solutions under suitable smallness condition. Our findings rely on time-decay estimates for the operators defining the linear Schrödinger–Boussinesq system, along with suitable nonlinear estimates for the terms of the mild formulation, combined with a contraction mapping argument.

For system (2) we obtained some results about the existence of solutions, that we present in the next section.

3. Main results

The main contributions of this talk are summarized in the following theorems:

Theorem (Local-in-time solution). Let $\lambda, m \geq 1, m\rho - \lambda - 1 = p(m-1), \beta, \mu > n, \rho a_0 < 1$ and $\lambda a_0 + a_1 m < 1$. Suppose that $\| [u_0, v_0, w_0] \|_{\mathcal{L}_0^r}$ is finite. Then, there exists $0 < T < \infty$, such that system

(2) has a unique local solution $[u, v, w] \in \mathcal{L}^T$. Furthermore, the data-solution mapping is Lipschitz continuous from $\mathcal{L}_0^T$ into $\mathcal{L}^T$.

Theorem (Global-in-time solution). Let $\lambda, m > 1, \rho \geq 2, a_0, a_1, \rho b_0, \lambda b_0 + b_1 m < 1$ and $\beta, \mu > n$. Suppose that there exists $\delta > 0$ such that

$$\| [u_0, v_0, w_0] \|_{\mathcal{L}_0^\infty} \leq \frac{\delta}{2},$$

then, system (2) has a unique global solution $[u, v, w] \in \mathcal{L}^\infty$ satisfying $\| [u, v, w] \|_{\mathcal{L}^\infty} \leq \delta$. Furthermore, the data-solution mapping is Lipschitz continuous from $\mathcal{L}_0^\infty$ into $\mathcal{L}^\infty$.

4. Conclusions

In this work we use the theory of fractional ordinary differential to obtain a mild formulation for problem (2), then by means of the properties of the Mittag Leffler functions we obtained some time decay estimates for some operators that appeared on the mild formulation. Finally, by an fixed point argument we get results of local a global well-posedness on suitable Banach spaces based on the weak- L^p spaces.

Referencias

- [1] C. BANQUET, L.C.F. FERREIRA, E.J. VILLAMIZAR-ROA, *On the existence and scattering theory for the Klein-Gordon-Schrödinger system in an infinite L^2 -norm setting*, Ann. Mat. Pura Appl. **194** (2015):81–804.
- [2] L. FARAH, *Local and global solutions for the nonlinear Schrödinger-Boussinesq system*. Differential Integral Equations. **21** (2008):743–770.
- [3] L. FARAH, A. PASTOR, *On the periodic Schrödinger-Boussinesq system*. J. Math. Anal. Appl. **368** (2010):330–349.
- [4] A. KILBAS, H. SRIVASTAVA, J. TRUJILLO, *Theory and applications of fractional differential equations*. First edition, Elsevier, 2006.
- [5] F. LINARES, A. NAVAS, *On Schrödinger-Bousinesq equations*. Adv. Differential Equations. **9** (2004):159–176.
- [6] V. MAKHANKOV, *On stationary solutions of Schrödinger equation with a self-consistence potential satisfying Boussinesq's equations*. Phys. Lett. A. **50** (1974):42–44.
- [7] I. MATYCHYN, *Analytical Solution of Linear Fractional Systems with Variable Coefficients Involving Riemann-Liouville and Caputo Derivatives*. Symmetry. **11** (2019):1366–1378.

3.7 Solución de ecuaciones diferenciales mediante métodos de discretización miméticos: uso de la librería MOLE

Giovanni Calderon¹

Resumen

Los métodos de discretización miméticos (MDM) constituyen una alternativa a los esquemas clásicos de diferencias finitas para la solución numérica de ecuaciones diferenciales. Su principal característica consiste en preservar propiedades fundamentales de los operadores diferenciales continuos, particularmente aquellas asociadas a leyes de conservación. En este trabajo se presentan los fundamentos básicos de los MDM y su implementación mediante la librería de código abierto MOLE. El contenido fue desarrollado en el curso “Solución de ecuaciones diferenciales mediante métodos de discretización miméticos: uso de la librería MOLE”, realizado durante el XIII Simposio Nororiental de Matemáticas.

Palabras & frases claves: Métodos de Discretización Miméticos; librería MOLE; Ecuaciones Diferenciales; Modelado numérico.

1. Introducción

Las ecuaciones diferenciales ordinarias y parciales constituyen la base matemática de numerosos modelos utilizados en ingeniería, física y otras áreas de las ciencias aplicadas. Debido a que la solución analítica de estos modelos rara vez puede obtenerse de forma explícita, resulta necesario recurrir a métodos numéricos que permitan aproximar sus soluciones con un adecuado balance entre precisión, estabilidad y costo computacional.

Entre las técnicas más utilizadas para la discretización espacial se encuentran los métodos de diferencias finitas, elementos finitos y volúmenes finitos. Sin embargo, en numerosos problemas físicos resulta deseable que la discretización preserve propiedades estructurales del problema continuo, particularmente aquellas relacionadas con principios de conservación. En este contexto surgen los métodos de discretización miméticos (MDM), desarrollados inicialmente por Castillo y Grone [1] y posteriormente ampliados por Castillo y Yasuda [2]. Estos métodos buscan construir versiones discretas de los operadores diferenciales que reproduzcan propiedades fundamentales del cálculo vectorial y satisfagan versiones discretas de identidades asociadas al teorema de Green–Stokes–Gauss.

La principal característica de los MDM es la construcción de operadores discretos de gradiente, divergencia y rotacional sobre mallas escalonadas, de forma que se preserven leyes de conservación en el nivel discreto [3]. Esta propiedad ha permitido su aplicación en problemas de difusión, propagación de ondas, dinámica de fluidos y electromagnetismo. Asimismo, los desarrollos recientes han ampliado el alcance de los MDM mediante operadores de alto orden y estudios teóricos de estabilidad y dispersión [4, 5, 6].

¹Escuela de Matemáticas, Facultad de Ciencias, Universidad Industrial de Santander. Correo: gecalder@correo.uis.edu.co

2. Fundamentos de los MDM

Los métodos de discretización miméticos buscan reproducir en el nivel discreto propiedades fundamentales de los operadores diferenciales continuos [1, 2]. Para ello emplean operadores de gradiente y divergencia definidos sobre mallas escalonadas. La construcción de estos operadores permite preservar una versión discreta del teorema de Green–Stokes–Gauss,

$$\int_{\Omega} (\nabla \cdot \mathbf{v}) f \, d\Omega + \int_{\Omega} \mathbf{v} \cdot \nabla f \, d\Omega = \int_{\partial\Omega} f(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) \, dS. \quad (1)$$

el cual establece un balance entre las contribuciones interiores y de frontera del dominio [3]. Como consecuencia, los esquemas miméticos conservan cantidades físicas relevantes y proporcionan aproximaciones robustas para una amplia variedad de ecuaciones diferenciales. Los desarrollos recientes incluyen operadores de alto orden y estudios teóricos de estabilidad y dispersión [4, 5, 6].

3. Implementación mediante la librería MOLE

La implementación práctica de los métodos de discretización miméticos se ve facilitada por la librería de código abierto MOLE [7], desarrollada para MATLAB y Octave. Esta biblioteca proporciona implementaciones de operadores miméticos de gradiente, divergencia, Laplaciano, interpolación y frontera para problemas unidimensionales, bidimensionales y tridimensionales.

Los operadores disponibles en MOLE incorporan las formulaciones modernas propuestas por Corbino y Castillo [4] y permiten trabajar con órdenes de aproximación 2, 4, 6 y 8. Adicionalmente, la librería incluye rutinas para el tratamiento de condiciones de frontera de tipo Dirichlet, Neumann y Robin, así como herramientas para la generación de mallas uniformes y no uniformes.

Desde el punto de vista computacional, la construcción de un esquema mimético consiste en generar los operadores discretos correspondientes y ensamblar el sistema algebraico asociado al problema diferencial. Esta aproximación permite concentrar el esfuerzo en la formulación matemática y el análisis de resultados, evitando la implementación explícita de los operadores diferenciales.

La disponibilidad de MOLE ha contribuido significativamente a la difusión de los MDM tanto en actividades de docencia como en aplicaciones de investigación, facilitando el acceso a técnicas numéricas conservativas de alto orden.

4. Problema modelo

Con el fin de ilustrar el uso de los operadores miméticos implementados en MOLE, se consideró la ecuación de convección–difusión–reacción:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \nabla \cdot (k \nabla u) + \mathbf{v} \cdot \nabla u + \sigma u = f, \quad (x, t) \in \Omega \times (0, T]. \quad (2)$$

acompañada de condiciones de frontera de Robin

$$\alpha u + \beta \frac{\partial u}{\partial n} = g, \quad (x, t) \in \partial\Omega \times (0, T], \quad (3)$$

y una condición inicial apropiada.

La elección de este modelo obedece a que numerosas ecuaciones diferenciales de interés en ingeniería, física y ciencias aplicadas pueden obtenerse como casos particulares de (2). Por ejemplo, al anular los términos convectivo y reactivo se obtiene la ecuación de difusión; si además se considera el régimen estacionario, se recuperan la ecuación de Poisson y otros modelos elípticos clásicos. De manera similar, distintas elecciones de los parámetros permiten representar fenómenos de transporte, transferencia de calor y propagación de contaminantes.

La discretización espacial se construye mediante operadores miméticos de gradiente y divergencia, sustituyendo los operadores diferenciales continuos por sus correspondientes aproximaciones discretas. Esta formulación mantiene una estructura algebraica consistente con las propiedades de conservación del problema original y facilita la incorporación de las condiciones de frontera.

Las condiciones de frontera de Robin resultan particularmente relevantes debido a su frecuente aparición en problemas de transferencia de calor, transporte de masa y flujo en medios porosos. Los operadores de frontera disponibles en MOLE permiten incorporarlas directamente dentro de la formulación mimética, preservando la consistencia del esquema numérico en las cercanías de la frontera.

Durante el cursillo se desarrollaron ejemplos en una y dos dimensiones obtenidos mediante distintas elecciones de los parámetros k , v y σ . Esto permitió recuperar ecuaciones de difusión, problemas tipo Poisson y modelos de convección–difusión, mostrando cómo una misma estructura de operadores miméticos puede utilizarse para resolver diferentes clases de ecuaciones diferenciales.

En todos los casos se destacó la capacidad de los operadores miméticos para preservar balances discretos compatibles con las leyes de conservación del problema continuo. Esta característica constituye una de las principales diferencias respecto a aproximaciones tradicionales basadas exclusivamente en diferencias finitas y representa una de las principales ventajas de los MDM en aplicaciones científicas e ingenieriles.

5. Conclusiones

Los métodos de discretización miméticos constituyen una alternativa eficaz para la solución numérica de ecuaciones diferenciales debido a su capacidad para preservar propiedades de conservación en el nivel discreto. La librería MOLE facilita su implementación mediante operadores de alto orden y herramientas para el tratamiento de condiciones de frontera generales. Los ejemplos desarrollados durante el cursillo evidenciaron que estos métodos proporcionan aproximaciones consistentes y constituyen una herramienta útil tanto para la investigación como para la enseñanza de métodos numéricos.

Referencias

- [1] J. CASTILLO AND R. D. GRONE, *A matrix analysis approach to higher-order approximations for divergence and gradients satisfying a global conservation law*. SIAM J. Matrix Anal. Appl. **25** (2003):128–142.
- [2] J. CASTILLO AND M. YASUDA, *Linear Systems Arising for Second-Order Mimetic Divergence and Gradient Discretizations*. Journal of Mathematical Modelling and Algorithms. **4** (2005):67–82.
- [3] J. CASTILLO AND G. MIRANDA, *Mimetic Discretization Methods*. 5th ed., CRC Press, Boca Raton, Florida, 2013.
- [4] J. CORBINO AND J. E. CASTILLO, *High-order mimetic finite-difference operators satisfying the extended Gauss divergence theorem*. Journal of Computational and Applied Mathematics. **364** (2020):112326.
- [5] J. VILLAMIZAR ET AL., *High order mimetic differences applied to the convection–diffusion equation: a matrix stability analysis*. Int. J. Geomath. **14** (2023):26.
- [6] O. ROJAS ET AL., *A dispersion analysis of uniformly high order, interior and boundaries, mimetic finite difference solutions of wave propagation problems*. Int. J. Geomath. **15** (2024):3.
- [7] J. CORBINO, M. A. DUMETT AND J. E. CASTILLO, *MOLE: Mimetic Operators Library Enhanced*. Journal of Open Source Software. **9** (2024):6288.

3.8 Análisis teórico y numérico de un problema de control óptimo asociado a un sistema de reacción-difusión tipo Schnakenberg

Andrés Felipe Ortiz Flórez¹, Juan Carlos López Ríos²

Resumen

En esta charla se presenta el estudio de un problema de control óptimo bilineal asociado a un sistema acoplado de ecuaciones de reacción-difusión de tipo Schnakenberg con difusión cruzada. En primer lugar, se analiza el sistema sin términos de control mediante un esquema numérico basado en el método de los elementos finitos con *mass lumping*, demostrando su buen planteamiento y la preservación de la positividad de las soluciones discretas. Desde el punto de vista teórico, se establecen resultados de existencia y unicidad de soluciones fuertes en dimensiones dos y tres. Posteriormente, se formula un problema de control óptimo en el cual el control actúa sobre una de las especies químicas, se presenta un esquema numérico para el sistema adjunto y simulaciones que ilustran la influencia del control sobre la dinámica del modelo.

Palabras & frases claves: Difusión cruzada, elementos finitos, control óptimo, sistema adjunto.

1. Introducción

Los sistemas de reacción-difusión constituyen una clase fundamental de modelos matemáticos que desempeñan un papel central en la descripción de fenómenos biológicos y químicos ([5]). En particular, el modelo de Schnakenberg ha sido propuesto para estudiar la formación de patrones espaciales ([1]). En [2], se analizó una variante con difusión cruzada en tres dimensiones, descrita por

$$\begin{cases} u_t = D_u \Delta u + D_{uv} \Delta v + \gamma(k_1 a_1 - k_2 u + k_3 u^2 v), \\ v_t = D_v \Delta v + D_{vu} \Delta u + \gamma(k_4 b_1 - k_3 u^2 v), \end{cases}$$

donde u, v representan las concentraciones de dos sustancias químicas, D_u, D_v son los coeficientes de difusión, D_{uv}, D_{vu} son los coeficientes de difusión cruzada, y $\gamma > 0$ mide la intensidad de la reacción. La inclusión de los términos de difusión cruzada desestabiliza el equilibrio homogéneo y favorece la formación de patrones de tipo Turing ([4]).

En este trabajo se considera un sistema parabólico similar al modelo de Schnakenberg con difusión

¹Universidad Industrial de Santander. Correo: andres2238023@correo.uis.edu.co

²Universidad Industrial de Santander. Correo: jclopezr@uis.edu.co

cruzada parcial, dado por

$$\begin{cases} u_t - D_u \Delta u = D_{uv} \Delta v + \gamma(a - u + v|u|^p), & x \in \Omega, t > 0, \\ v_t - D_v \Delta v = \gamma(b - v|u|^p), & x \in \Omega, t > 0, \\ u(0, x) = u_0(x), \quad v(0, x) = v_0(x) \geq 0, & x \in \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = \frac{\partial v}{\partial \nu} = 0, & x \in \partial\Omega, t \in (0, T), \end{cases} \quad (1)$$

donde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ es un dominio regular con $N = 2, 3$ y ν denota el vector normal unitario exterior. Aquí $a, b > 0$ son parámetros de fuente, el término $-u$ representa la degradación de u , y los términos $v|u|^p$ describen la producción autocatalítica de u en presencia de v y el consumo de v en presencia de u . Este modelo generaliza el modelo de Schnakenberg, y para $p = 2$ se recupera el caso particular. El primer objetivo es proponer un esquema numérico totalmente discreto, basado en una discretización semiimplícita de Euler en el tiempo y en el método de los elementos finitos con *mass lumping* en el espacio, para aproximar las soluciones del modelo anterior. Se busca demostrar su buen planteamiento y propiedades cualitativas como la preservación de la positividad, además de validar numéricamente su capacidad para capturar patrones de Turing. El segundo objetivo es analizar un problema de control óptimo que consiste en minimizar un funcional de costo sujeto al sistema anterior como restricción de estado. Para ello se considera el sistema controlado

$$\begin{cases} \partial_t u - D_u \Delta u = D_{uv} \Delta v + \gamma(a - u + v|u|^p) & \text{en } (0, T) \times \Omega, \\ \partial_t v - D_v \Delta v = \gamma(b - v|u|^p) + f 1_{\Omega_c} v & \text{en } (0, T) \times \Omega, \\ u(0) = u_0, \quad v(0) = v_0 & \text{en } \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = \frac{\partial v}{\partial \nu} = 0 & \text{en } (0, T) \times \partial\Omega, \end{cases} \quad (2)$$

donde f es un control que actúa sobre la sustancia inhibidora v en un subdominio $\Omega_c \subset \Omega$. El término $f 1_{\Omega_c} v$ representa un mecanismo de proliferación o degradación de v , dependiendo del signo de f , y 1_{Ω_c} denota la función característica de Ω_c .

Así, el objetivo es analizar un problema de control óptimo tal que todo estado admisible sea una solución fuerte de (2). En particular, el problema de control bilineal que se estudia está dado por

$$\begin{cases} \text{Encontrar } [u, v, f] \in \mathcal{A} \times \mathcal{F} \text{ que minimice el funcional objetivo} \\ J([u, v, f]) = \frac{\gamma_u}{2} \int_0^T \|u - u_d\|_{L^2(\Omega)}^2 dt + \frac{\gamma_v}{2} \int_0^T \|v - v_d\|_{L^2(\Omega)}^2 dt \\ + \frac{\gamma_f}{q} \int_0^T \|f\|_{L^q(\Omega_c)}^q dt + \frac{\beta_1}{2} \int_\Omega |u(T) - u_T|^2 d\mathbf{x} + \frac{\beta_2}{2} \int_\Omega |v(T) - v_T|^2 d\mathbf{x}, \\ \text{sujeto a la restricción de que } [u, v] \text{ es una solución fuerte del sistema (2) con dato } f. \end{cases} \quad (3)$$

En (3), se denota por $\mathcal{A}$ el espacio de estados admisibles y por $\mathcal{F} \subset L^q(Q)$ el espacio de controles admisibles, con $q = 3$ si $N = 3$ y $q = 2+$ si $N = 2$, donde se asume que es un conjunto cerrado, convexo y no vacío. Se especifican los estados deseados $u_d, v_d \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$, $u_T, v_T \in L^2(\Omega)$, y se emplean los parámetros no negativos $\gamma_u, \gamma_v, \beta_1, \beta_2$ y γ_f para ponderar el costo de los estados

y del control. El funcional J mide la desviación de u, v respecto a u_d, v_d , añade el costo del control en $L^q(Q)$ y, en los dos últimos términos, evalúa la distancia en L^2 entre $u(T), v(T)$ y u_T, v_T , lo que penaliza desviaciones al final del proceso.

2. Contenido de la charla

- **Introducción, investigaciones previas relacionadas y objetivos.** Se revisan los principales resultados sobre sistemas tipo Schnakenberg con difusión cruzada y se establecen los objetivos de la investigación: (i) construir un esquema numérico estable para el sistema sin control; (ii) demostrar la existencia y unicidad de soluciones fuertes; (iii) formular y analizar un problema de control óptimo bilineal; (iv) validar los resultados mediante simulaciones numéricas.
- **Esquema numérico sin control.** Para el sistema sin control se propone un esquema de primer orden en tiempo, lineal y desacoplado, basado en elementos finitos con *mass lumping*. Se demuestra que el método está bien planteado y preserva la positividad de las soluciones discretas. Las simulaciones realizadas en FreeFem++ muestran la formación de patrones de Turing característicos, lo que confirma la estabilidad y precisión del esquema.
- **Existencia y unicidad de soluciones fuertes.** Se formula una definición de solución fuerte adecuada y se aplica el teorema de punto fijo de Leray-Schauder para demostrar la existencia en los casos $N = 2$ y $N = 3$. La demostración se basa en estimaciones de energía y resultados de regularidad parabólica, garantizando además la unicidad de la solución. Estos resultados constituyen el fundamento teórico para el análisis posterior del problema de control.
- **Problema de control óptimo y simulaciones.** Finalmente, se analiza el problema de control óptimo (3) y se presentan simulaciones numéricas que validan los resultados teóricos.

Referencias

- [1] GAFFNEY, E., YI, F., Y LEE, S., *The bifurcation analysis of Turing pattern formation induced by delay and diffusion in the Schnakenberg system*. Discrete and Continuous Dynamical Systems - Series B, **22**(2) (2016)647–668.
- [2] GAMBINO, G., LOMBARDO, M.C., LUPO, S., Y SAMMARTINO, M., *Super-critical and sub-critical bifurcations in a reaction-diffusion Schnakenberg model with linear cross-diffusion*. Ricerche di Matematica, **65** (2016):449–467.
- [3] GUILLÉN-GONZÁLEZ, F., MALLEA-ZEPEDA, E., Y RODRÍGUEZ-BELLIDO, M.A., *Optimal bilinear control problem related to a chemo-repulsion system in 2D domains*. ESAIM: Control Optim. Calc. Var., **26**(29) (2020):21.
- [4] MADZVAMUSE, A., NDAKWO, H.S., Y BARREIRA, R., *Cross-diffusion-driven instability for reaction-diffusion systems: analysis and simulations*. Journal of Mathematical Biology, **70**(4) (2015):709–743.
- [5] MURRAY, J.D., *Parameter space for Turing instability in reaction-diffusion mechanisms: a comparison of models*. Journal of Theoretical Biology, **98**(1) (1982):143–163.

3.9 Ciclos Límite Bifurcando de un Toro Isócrono en $\mathbb{R}^3$

Valeria Montaña Moreno¹, Oscar A. Ramírez C.²

Resumen

En este trabajo estudiamos los ciclos límite que bifurcan de la perturbación de sistemas diferenciales autónomos suaves en $\mathbb{R}^3$ con un toro isócrono de revolución foliado por soluciones periódicas. Más exactamente, consideramos sistemas de la forma

$$\begin{cases} \dot{x} = (\sqrt{x^2 + y^2} - 2)f(x, y, z) - z\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \varepsilon P(x, y, z) \\ \dot{y} = (\sqrt{x^2 + y^2} - 2)f(x, y, z) - z\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \varepsilon Q(x, y, z) \\ \dot{z} = zf(x, y, z) + (\sqrt{x^2 + y^2} - 2) + \varepsilon R(x, y, z) \end{cases} \quad (1)$$

definidos en $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, z) \mid z \in \mathbb{R}\}$, donde $f(x, y, z) = 1 - (\sqrt{x^2 + y^2} - 2)^2 - z^2$, $\varepsilon \approx 0$, y $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$ y $R(x, y, z)$ son polinomios reales. Como es habitual, el punto denota diferenciación con respecto a la variable t .

Para ello, empleamos la teoría de *averaging* de primer orden y la teoría de Chebyshev para estudiar el número de ciclos límite que emergen cuando el sistema inicial es perturbado dentro de la clase de sistemas polinomiales. En particular, mostramos que, a lo sumo, 6 ciclos límite pueden bifurcar desde dicho toro cuando la perturbación es cuadrática. Actualmente, estamos investigando la relación entre el orden de la perturbación polinomial y el número de ciclos límite que puede identificar el método.

Palabras & frases claves: Bifurcación, ciclos límite, método del promedio.

1. Introducción

Un problema clásico al estudiar sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias en $\mathbb{R}^n$ es calcular el número de ciclos límite que bifurcan de una variedad integral foliada por órbitas periódicas. En particular, analizaremos el sistema tridimensional (1) en el que para $\varepsilon = 0$, el sistema presenta un toro invariante foliado por órbitas periódicas isócronas (con el mismo período). Nuestro interés principal es determinar cuántas de estas órbitas persisten para $0 < |\varepsilon| \ll 1$.

2. Preliminares

2.1. Sistemas de ecuaciones diferenciales lineales en $\mathbb{R}^n$

Antes de comenzar el estudio formal del sistema de ecuaciones de interés, es necesario introducir algunas definiciones y resultados previos. A continuación, se precisan los conceptos de **campo vectorial**, **sistema de ecuaciones diferenciales** y **solución** de dicho sistema.

¹Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Correo: vmontanom@udistrital.edu.co

²Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Correo: osaramirez@udistrital.edu.co

Definición 1 (Campo vectorial). *Un campo vectorial en un subconjunto abierto $U \subseteq \mathbb{R}^n$ es una función $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ que asigna a cada punto $\mathbf{x} \in U$ un vector $f(\mathbf{x})$. Si f es continuamente diferenciable en U , decimos que $f \in C^1(U)$.*

Definición 2 (Sistema de ecuaciones diferenciales autónomo). *Un sistema autónomo de ecuaciones diferenciales ordinarias en U es una ecuación de la forma*

$$\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}),$$

donde $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ es un campo vectorial.

Definición 3 (Solución). *Una solución del sistema $\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x})$ en un intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$ es una función diferenciable $\mathbf{x} : I \rightarrow U$ tal que:*

$$\mathbf{x}'(t) = f(\mathbf{x}(t)) \quad \text{para todo } t \in I.$$

Dado $\mathbf{x}_0 \in U$, decimos que $\mathbf{x}(t)$ es una solución del problema de valor inicial

$$\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$$

en I si $t_0 \in I$, $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ y $\mathbf{x}(t)$ es una solución del sistema en I .

Por otro lado, una pregunta natural que surge es ¿Bajo qué condiciones podemos garantizar la existencia y unicidad de la solución de un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias? El siguiente teorema fundamental proporciona una respuesta rigurosa a esta pregunta.

Teorema 4 (Teorema Fundamental de Existencia y Unicidad). *Sea U un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$ que contiene a x_0 y supongamos que $f \in C^1(U)$. Entonces existe $a > 0$ tal que el problema de valor inicial*

$$\dot{x} = f(x), \quad x(0) = x_0$$

tiene una única solución $x(t)$ definida en el intervalo $[-a, a]$.

2.2. Órbitas periódicas y ciclos límite

Definición 5 (Órbita). *Dado el sistema autónomo $\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x})$ y una solución $\mathbf{x}(t)$ definida en el mayor intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$ donde la solución existe, la **órbita** asociada a $\mathbf{x}(t)$ es el conjunto de puntos en $\mathbb{R}^n$ recorridos por la solución, es decir,*

$$\gamma = \{\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n : t \in I\}.$$

Un tipo particular de órbita ampliamente estudiado en sistemas dinámicos es el de **órbita periódica**, que básicamente es una curva cerrada simple que es una órbita del sistema. Formalmente,

Definición 6 (Órbita periódica). *Una órbita γ del sistema $\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x})$ se dice **periódica** si existe $T > 0$ tal que para todo punto $\mathbf{x}_0 \in \gamma$, la solución $\mathbf{x}(t)$ con $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$ satisface $\mathbf{x}(t + T) = \mathbf{x}(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$. El menor $T > 0$ que cumple esta condición se llama **período** de la órbita.*

Es importante destacar que las órbitas periódicas pueden presentarse de dos formas fundamentalmente diferentes: pueden hacer parte de un *continuum* de órbitas periódicas (como en el caso de centros Hamiltonianos donde existe una familia continua de órbitas periódicas o pueden ser **aisladas**, es decir, existir una vecindad alrededor de la órbita que no contiene otras órbitas periódicas. Este último caso es de especial interés y recibe el nombre de **ciclo límite**.

Definición 7 (Ciclo límite). *Un **ciclo límite** es una órbita periódica γ del sistema $\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x})$ que es aislada, es decir, existe una vecindad abierta $U \subseteq \mathbb{R}^n$ de γ que no contiene otras órbitas periódicas.*

3. Perturbación y Teoría del promedio

Un método clásico para estudiar la existencia de **ciclos límite** en sistemas de ecuaciones diferenciales consiste en perturbar un sistema que admite un **continuo de órbitas periódicas** e identificar cuáles de esas órbitas periódicas persisten. Más exactamente, se asume que un sistema de la forma

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = F_0(t, \mathbf{x}) \quad (2)$$

admite un continuo **de órbitas periódicas**, y su **perturbación** es el sistema

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = F_0(t, \mathbf{x}) + \varepsilon F_1(t, \mathbf{x}) + \varepsilon^2 F_2(t, \mathbf{x}, \varepsilon), \quad (3)$$

denominado **sistema perturbado**. Entre las técnicas más utilizadas en la teoría de perturbaciones se encuentra la **teoría de promedios** (averaging method), la cual permite asociar al sistema perturbado una función $f(\mathbf{x}, \varepsilon)$ cuyos ceros guardan una relación biunívoca con las órbitas periódicas que persisten.

Veremos que el número de ciclos límite del sistema (1) que bifurcan de las órbitas periódicas del toro invariante $\mathbb{T}$ de (1) cuando $\varepsilon = 0$ están controlados, hasta primer orden en ε , por el número de ceros simples de una función $\mathcal{F}(\phi)$ definida como,

$$\mathcal{F}(\phi) = \int_0^{2\pi} \frac{\tilde{Q}(\theta, \phi, 1) \cos \phi - \tilde{P}(\theta, \phi, 1) \sin \phi}{2 + \cos \theta} d\theta \quad (4)$$

donde $\phi \in S^1 := \mathbb{R}/(2\pi\mathbb{Z})$, y $\tilde{P}(\theta, \phi, 1)$ y $\tilde{Q}(\theta, \phi, 1)$ son las expresiones en las nuevas coordenadas de los polinomios $P(x, y, z)$ y $Q(x, y, z)$ de (1) restringidos al toro $\mathbb{T}$ de (1) con $\varepsilon = 0$, respectivamente. Por lo tanto, como veremos, nuestro problema se reduce a estudiar cuántos ceros simples tiene esta función $\mathcal{F}(\phi)$.

De este modo, nuestro resultado principal es el siguiente:

Teorema 8. *Considere el sistema (1). Supongamos que los grados de los polinomios $P(x, y, z)$ y $Q(x, y, z)$ son 2, y que $\mathcal{F}(\phi)$, dada por la ecuación (4), no es idénticamente nula. Entonces, para ε suficientemente pequeño, bifurcan al menos 6 ciclos límite a partir del toro del sistema no perturbado, es decir, del sistema (1) cuando $\varepsilon = 0$.*

Referencias

- [1] ARTUR OSCAR LOPES E CLAUS IVO DOERING, *Equações Diferenciais Ordinárias* 6ta ed. IMPA, 2016.
- [2] JAMES MURDOCK, JAN A. SANDERS, FERDINAND VERHULST., *Averaging Methods in Nonlinear Dynamical Systems* 2° ed. Springer New York, NY, 2007.
- [3] JAUME LLIBRE, SALOMÓN REBOLLO-PERDOMO, JOAN TORREGROSA, *Limit cycles bifurcating from a 2-dimensional isochronous torus in $\mathbb{R}^3$* . Advanced Nonlinear Studies. **11** (2011):377–389.
- [1] STEVEN H. STROGATZ, *Nonlinear dynamics and chaos: With Applications to Physics, Biology, Chemistry, and Engineering* 2° ed. CRC Press Taylor & Francis Group, 2018.

3.10 Clasificación completa de las simetrías de Lie para una generalización del sistema Drinfeld-Sokolov

Oscar L.¹, Germán E.², Lizeth M.³, Xiomara C.⁴

Resumen

Esta presentación aborda el análisis de una generalización del sistema no lineal de ecuaciones diferenciales parciales (EDP) de Drinfeld–Sokolov, un modelo fundamental en la teoría de sistemas integrables y la física matemática. El objetivo principal es obtener la clasificación completa del grupo de simetrías de Lie asociado a dicha generalización debido a que no ha sido publicada.

Palabras & frases claves: Drinfeld–Sokolov, simetrías de Lie, ecuaciones diferenciales parciales no lineales.

1. Introducción

La teoría de simetrías de Lie, desarrollada por Sophus Lie a finales del siglo XIX [4], constituye un marco poderoso para el estudio de ecuaciones diferenciales. Su esencia radica en identificar grupos de transformaciones continuas que preservan la forma de un sistema de ecuaciones. Esta metodología ha demostrado ser especialmente eficaz en el análisis de ecuaciones diferenciales parciales (EDP) no lineales, ya que permite reducir su complejidad mediante la obtención de soluciones invariantes y leyes de conservación [5, 9].

El sistema de Drinfeld–Sokolov, introducido en el contexto de álgebras de Kac–Moody y teoría de solitones [1, 6], es un ejemplo paradigmático de sistema integrable de tercer orden. Su relevancia se extiende a la mecánica cuántica de campos, la teoría de dispersión inversa y el modelado de fenómenos no lineales como la propagación de ondas y la difusión [2, 7].

En este trabajo consideramos la siguiente generalización del sistema Drinfeld–Sokolov:

$$\begin{cases} u_t + (g(v)^2)_x = 0, \\ v_t - av_{xxx} + 3bu_xv + 3f(u)v_x = 0, \end{cases} \quad (1)$$

donde $f(u)$ y $g(v)$ son funciones arbitrarias, al menos dos veces diferenciables, y $a, b \in \mathbb{R}$ son parámetros constantes. Esta formulación extiende el modelo clásico al permitir una mayor flexibilidad funcional en la dinámica del sistema.

El sistema (1) puede expresarse en forma compacta como:

$$\begin{cases} F^1(t, x, u, v, u_t, u_x, v_x) = 0, \\ F^2(t, x, u, v, u_x, v_t, v_x, v_{xx}) = 0, \end{cases} \quad (2)$$

¹Universidad Surcolombiana. Correo: oscar.londono@usco.edu.co

²Universidad Surcolombiana. Correo: german.escobar@usco.edu.co

³Universidad Surcolombiana. Correo: Les.maguth.edu.28@gmail.com

⁴Universidad Surcolombiana. Correo: castanedaxiomara43@gmail.com

lo que permite aplicar sistemáticamente el formalismo de simetrías de Lie. Investigaciones recientes han explorado variantes fraccionarias del modelo, como el sistema Drinfeld–Sokolov–Wilson con memoria exponencial [10] y su dinámica mediante soluciones analíticas [11], lo que subraya el interés actual en su estudio y generalización. El análisis de las simetrías de Lie del sistema (1) constituye un paso fundamental para la obtención de soluciones exactas, la derivación de leyes de conservación y el estudio cualitativo de sus reducciones.

2. Clasificación completa del grupo de simetrías de Lie

Consideramos el sistema (2) con variables independientes t (tiempo) y x (espacio), y variables dependientes $u = u(t, x)$, $v = v(t, x)$. Siguiendo el enfoque clásico [8, 9], un grupo uniparamétrico de transformaciones de Lie actúa sobre el espacio de variables (t, x, u, v) como:

$$T_\varepsilon : (t, x, u, v) \mapsto (\tilde{t}, \tilde{x}, \tilde{u}, \tilde{v}),$$

donde ε es el parámetro del grupo. El generador infinitesimal asociado a este grupo tiene la forma [5]:

$$X = \xi^t(t, x, u, v) \frac{\partial}{\partial t} + \xi^x(t, x, u, v) \frac{\partial}{\partial x} + \eta^u(t, x, u, v) \frac{\partial}{\partial u} + \eta^v(t, x, u, v) \frac{\partial}{\partial v}. \quad (3)$$

Para determinar las simetrías del sistema (2), se requiere imponer la condición de invariancia mediante la prolongación de tercer orden del operador (3), ya que la ecuación para v involucra derivadas hasta tercer orden. Esta condición se expresa como [9]:

$$\text{pr}^{(3)}X[F^\alpha] = 0 \quad \text{siempre que } F^1 = F^2 = 0, \quad \alpha = 1, 2. \quad (4)$$

La prolongación $\text{pr}^{(3)}X$ actúa sobre las funciones F^α mediante:

$$\begin{aligned} \text{pr}^{(3)}X[F^\alpha] = & \xi^t \frac{\partial F^\alpha}{\partial t} + \xi^x \frac{\partial F^\alpha}{\partial x} + \eta^u \frac{\partial F^\alpha}{\partial u} + \eta^v \frac{\partial F^\alpha}{\partial v} \\ & + \eta_t^u \frac{\partial F^\alpha}{\partial u_t} + \eta_x^u \frac{\partial F^\alpha}{\partial u_x} + \eta_t^v \frac{\partial F^\alpha}{\partial v_t} + \eta_x^v \frac{\partial F^\alpha}{\partial v_x} + \eta_{xxx}^v \frac{\partial F^\alpha}{\partial v_{xxx}}, \end{aligned} \quad (5)$$

donde los coeficientes $\eta_t^u, \eta_x^u, \eta_t^v, \eta_x^v, \eta_{xxx}^v$ se obtienen recursivamente a partir de las fórmulas estándar de prolongación [5, 8].

$$\eta_{i_1 i_2 \dots i_k}^{\alpha(k)} = D_{i_k} \eta_{i_1 i_2 \dots i_{k-1}}^{\alpha(k-1)} - u_{i_1 i_2 \dots i_{k-1} j}^\alpha D_{i_k} \xi^j \quad (6)$$

donde $i_1, i_2, \dots, i_k \in \{t, x\}$ y $j \in \{t, x\}$. Al sustituir las expresiones explícitas de F^1 y F^2 en (5) y exigir que la condición (4) se satisfaga idénticamente sobre la variedad de soluciones, se obtiene un sistema sobredeterminado de ecuaciones diferenciales para las funciones $\xi^t, \xi^x, \eta^u, \eta^v$. La resolución de este sistema, bajo distintas hipótesis sobre las funciones arbitrarias $f(u)$ y $g(v)$, conduce a una clasificación exhaustiva de las simetrías de Lie del sistema (1). Los resultados de la clasificación se detallarán en la exposición, cubriendo casos genéricos y especiales donde formas particulares de $f(u)$ y $g(v)$ amplían el álgebra de simetrías. Esta clasificación también es fundamental para construir invariantes diferenciales y reducir el sistema original a EDOs integrables, siguiendo los métodos descritos en [3].

3. Resultados

La sustitución de las expresiones (1) y (6) en (5) permite determinar las soluciones de (3), lo cual culmina en la clasificación exhaustiva del grupo de simetrías de Lie definido en (1). A continuación, se presenta un resumen de dicho resultado:

Teorema 1. *El sistema Drinfeld–Sokolov (1) con funciones arbitrarias $f(u)$ y $g(v)$ con constantes k_i , posee un grupo de simetría puntual de Lie Γ_1, Γ_2 . Los casos complementarios se presentan en el Cuadro 1.*

Cuadro 1: Grupo de simetrías de Lie del sistema generalizado de Drinfeld-Sokolov.

Casos	a	b	$f(u)$	$g(v)$	Γ
1	$\neq 0$	$\neq 0$	$2k_9u - k_{10}$	$\pm \sqrt{\frac{2}{\alpha} \left(\frac{k_{11}}{\alpha} v^\alpha + k_{12} \right)}$; $\alpha = \frac{-4k_1}{k_6}$	$\Gamma_1; \Gamma_2; \Gamma_3; \Gamma_5; \Gamma_7$
2	$\neq 0$	$\neq 0$	$2k_9u - k_{10}$	$\pm \sqrt{2k_{13}}$	$\Gamma_1; \Gamma_2; \Gamma_5$
3	$\neq 0$	$\neq 0$	$2k_9u - k_{10}$	arbitrario	$\Gamma_1; \Gamma_2$
4	$\neq 0$	$\neq 0$	$2k_9u - k_{10}$	$\pm \sqrt{2(\ln v ^{k_{14}} + k_{15})}$	$\Gamma_1; \Gamma_2; \Gamma_5$
5	$\neq 0$	$\neq 0$	k_{16}	$\pm \sqrt{2(\ln v ^{k_{17}} + k_{18})}$	$\Gamma_1; \Gamma_2; \Gamma_3; \Gamma_4; \Gamma_6$
6	$\neq 0$	$\neq 0$	k_{16}	arbitraria	$\Gamma_1; \Gamma_2; \Gamma_3$

Nota. Tabla creada por los autores.

Donde las Γ_i son las siguientes:

$$\begin{aligned} \Gamma_1 &= \partial_t; \quad \Gamma_2 = \partial_x; \quad \Gamma_3 = \partial_u; \quad \Gamma_4 = \partial_v; \quad \Gamma_5 = v\partial_v; \quad \Gamma_6 = x\partial_u - 3bvt\partial_v \\ \Gamma_7 &= 3t\partial_t + x\partial_x - 2u\partial_u \end{aligned}$$

Al considerar el Caso 1 con los parámetros $\alpha = -2, k_5 = 0, k_{10} = 0, k_{12} = 0$ y $2k_9 = K$, los resultados obtenidos coinciden con los presentados en [12].

Referencias

- [1] DRINFELD, V. G. AND SOKOLOV, V. V., *Lie algebras and equations of Korteweg-de Vries type*. Journal of Soviet Mathematics. **30** (1985):1975–2036.
- [2] MARIN, M. AND BALEANU, D., *On vibrations in thermoelasticity without energy dissipation for micropolar bodies*. Boundary Value Problems. **2016** (2016):111.
- [3] BEKIR, A., *Applications of the extended TANH method for coupled nonlinear evolution equations*. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. **13**(9) (2008):1748–1757.
- [4] LIE, S., *On integration of a class of linear partial differential equations by means of definite integrals*. Archiv for Mathematik. **3** (1881):328–368.
- [5] OLVER, P. J., *Applications of Lie Groups to Differential Equations*. Springer-Verlag. New York, 1986.

- [6] KOREPIN, V. E., BOGOLIUBOV, N. M. AND IZERGIN, A. G., *Quantum Inverse Scattering Method and Correlation Functions*. Cambridge University Press, 1993.
- [7] STRAUSS, W. A., *Partial differential equations: An introduction*. John Wiley & Sons, 2007.
- [8] HYDON, P. E., *Symmetry Methods for Differential Equations: A Beginner's Guide*. Cambridge University Press, 2000.
- [9] BLUMAN, G. W. AND COLE, J. D., *Similarity Methods for Differential Equations*. Springer-Verlag. New York, 1974.
- [10] MITRA, S., GHOSE-CHOUDHURY, A. AND GARAI, S., *General solutions and applications of the coupled Drinfeld–Sokolov–Wilson equation*. Examples and Counterexamples. **3** (2023):100108.
- [11] NOOR, S., ALSHEHRY, A. S., DUTT, H. M., NAZIR, R., KHAN, A. AND SHAH, R., *Investigating the Dynamics of Time–Fractional Drinfeld–Sokolov–Wilson System through Analytical Solutions*. Symmetry. **15** (2023):703.
- [12] ZHANG, YUFENG AND ZHAO, ZHONGLONG, *Lie symmetry analysis, Lie–Bäcklund symmetries, explicit solutions, and conservation laws of Drinfeld–Sokolov–Wilson system*. Boundary Value Problems. **2017** (2017):154.

3.11 Construcción de un sistema de coordenadas ortogonales ovoidales

Juan Andrés Guarín Rojas¹, Antonio Calixto Gutiérrez Piñeres², Rafael Ángel Torres Amaris³

Resumen

Los óvalos de Descartes constituyen una familia de curvas cuárticas con propiedades geométricas interesantes. Se encuentran mediante una generalización de la ecuación bipolar de la elipse. Los óvalos fueron utilizados inicialmente en óptica para la construcción de lentes y tienen potenciales aplicaciones en mecánica cuántica y en relatividad general. En este trabajo se construyen unas de las posibles coordenadas ortogonales que se pueden obtener a partir de óvalos de Descartes, con el objetivo de aplicarlas a problemas en física, especialmente al estudio de objetos físicos con forma ovoidal. Para construirlas, se define un nuevo tipo de curvas, las sinécdolas, que se intersectan ortogonalmente a una familia de óvalos. Con los óvalos y sinécdolas se encuentran y caracterizan las relaciones de coordenadas ovoidales a cartesianas. A partir de estas, se calculan los factores de escala, con los que es posible plantear la ecuación de Laplace en las nuevas coordenadas.

Palabras & frases claves: óvalos de Descartes, sinécdolas, coordenadas ortogonales ovoidales.

1. Introducción

Los óvalos de Descartes son curvas algebraicas de cuarto grado que tienen como caso particular a las cónicas y a las caracolas de Pascal. Fueron estudiadas por Descartes [2] y Huygens [1] para aplicaciones en óptica, pero tienen también diversas propiedades geométricas. Los óvalos pueden describirse en relación a tres focos [3], pueden obtenerse a partir de la intersección entre dos conos [4] y a partir de la envolvente de un cierto conjunto de circunferencias cuyos centros viven sobre un círculo [5, 6]. Se sabe además que la evoluta de un óvalo es una diacáustica del círculo [4] y que la inversión de un óvalo en un círculo centrado en uno de sus focos es también un óvalo [7].

Por su parte, la formulación de problemas en física se hace más simple al elegir un sistema de coordenadas ortogonales adaptado a la simetría del problema. En las coordenadas apropiadas, la condición de contorno de un problema se puede simplificar y, en algunos casos, es posible reducir el problema a la solución de un conjunto de ecuaciones diferenciales ordinarias, una por cada coordenada. Varios autores han formulado problemas en distintas coordenadas ortogonales, en particular problemas que involucran solucionar la ecuación de Laplace o la ecuación de Helmholtz [8, 10, 11, 13]. Se suelen emplear sistemas de coordenadas que utilizan curvas de segundo y cuarto grado como los presentados en [8, 14, 12, 13]. No obstante, hasta donde los autores de este trabajo conocen, no se han usado coordenadas asociadas a óvalos de Descartes en ningún trabajo.

En este trabajo se plantea la pregunta de si el uso de óvalos de Descartes para construir coordenadas ortogonales conduce a resultados interesantes. Con estas coordenadas el estudio de objetos con

¹Universidad Industrial de Santander. Correo: juan2201870@correo.uis.edu.co

²Universidad Industrial de Santander. Correo: acgutuer@uis.edu.co

³Universidad Industrial de Santander. Correo: rafael.torres@saber.uis.edu.co

forma ovoidal sería más simple. Esto tiene potenciales aplicaciones en mecánica cuántica para el estudio de núcleos atómicos [9, 15] o en relatividad general para el estudio de estrellas o discos de acreción con forma ovoidal. En particular, por su forma geométrica, los ovóides son útiles para el estudio de objetos con multipolos de masa.

2. Óvalos de Descartes

El óvalo de Descartes se define como el lugar geométrico de puntos M sobre un plano para los que las distancias $MF \equiv r$ y $MF' \equiv r'$ a dos puntos fijos satisfacen una relación de la forma [2, 16]

$$r + ar' = u, \quad (1)$$

con a y u constantes reales. Los puntos fijos F y F' son llamados focos. En un sistema de coordenadas cartesianas con origen en F y con el eje x igual a la recta FF' , la ecuación del óvalo es

$$\sqrt{x^2 + y^2} + a \sqrt{(x - \tau)^2 + y^2} = u, \quad (2)$$

con τ constante. Esta ecuación, a su vez, puede reescribirse como una ecuación cuártica de la forma $c_0 G x^2 - 2(1 + b_1 r^2)x + (c_0 + c_1 r^2)r^2 + a_0 = 0$ con $r^2 = x^2 + y^2$. En esta ecuación c_0 es la curvatura en el vértice y G es una generalización de la constante de Schwarzschild para las cónicas [17]. Esta ecuación cuártica parece conveniente en la aplicación de los óvalos de Descartes a la óptica [18, 19, 20, 21, 22]. Sin embargo, en este trabajo se considera solamente la ecuación (2).

3. Familia de curvas ortogonales a la familia de óvalos confocales: las sinécdolas

Considere la familia de óvalos dados por las curvas de nivel de la función $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} + a \sqrt{(x - \tau)^2 + y^2}$, con valores de a y τ fijos. Para construir unas coordenadas ortogonales a partir de estos óvalos, se deben buscar unas curvas que se intersequen ortogonalmente con estos. Considere que estas curvas ortogonales están descritas por una ecuación paramétrica de la forma $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$, con $\mathbf{r}$ el vector posición y t un parámetro. Como ∇f es un campo de vectores ortogonales a las curvas de nivel de f , entonces se debe cumplir que $d\mathbf{r}/dt = \alpha \nabla f$, con $\alpha = \alpha(x, y)$ un factor de proporcionalidad. Por simplicidad, al parametrizar la curva con respecto a x , de la ecuación anterior, se obtiene

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f_y}{f_x}, \quad (3)$$

donde los subíndices en f indican derivada parcial. La solución implícita de esta ecuación es

$$g(x, y) \equiv \operatorname{arcsenh}\left(\frac{x}{y}\right) + a \operatorname{arcsenh}\left(\frac{x - \tau}{y}\right) = v, \quad (4)$$

con v una constante. El conjunto de curvas dado por esta ecuación, con valores de a y τ constantes, es la familia de curvas ortogonales que se estaban buscando. éstas son llamadas *sinécdolas*, en relación con la figura literaria sinécdoque, y son un nuevo tipo de curvas que, hasta donde se sabe, no han sido reportadas antes en la literatura.

4. Coordenadas ortogonales ovaladas y ovoidales

Para construir las coordenadas ovaladas se definen a las sinécdolas y a los óvalos de la sección anterior como curvas coordenadas. Así, a cada punto $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ se le asocian unas coordenadas (u, v) dadas por las ecuaciones (2) y (4). El hecho de que los óvalos y sinécdolas se intersequen ortogonalmente implica que este sistema de coordenadas es ortogonal.

Para terminar de definir las coordenadas, se deben despejar a x y y de las ecuaciones (2) y (4) en términos de u y v . Para esto, se parte de hacer las substitutiones

$$x = \frac{\tau \sinh t}{\sinh t - \sinh\left(\frac{v-t}{a}\right)}. \quad (5)$$

$$y = \frac{\tau}{\sinh t - \sinh\left(\frac{v-t}{a}\right)}, \quad (6)$$

Estas ecuaciones son en realidad ecuaciones paramétricas de la sinécdola. Así, al sustituirlas en la ecuación (4), se obtiene la identidad $v = v$. Con lo cual, solo hace falta resolver la ecuación

$$\frac{|\tau| \left(\cosh t + a \cosh\left(\frac{v-t}{a}\right) \right)}{\left| \sinh t - \sinh\left(\frac{v-t}{a}\right) \right|} = u, \quad (7)$$

que se obtiene a partir de la ecuación (2). Luego de una serie de consideraciones, esta ecuación queda como

$$(a\tau - u)s^{\frac{2}{a}} + e^{\frac{v}{a}}(\tau - u)s^{\frac{1}{a}+1} + e^{\frac{v}{a}}(\tau + u)s^{\frac{1}{a}-1} + e^{\frac{2v}{a}}(a\tau + u) = 0, \quad (8)$$

donde $s = e^t$. En el caso $a \in \mathbb{Q}$, esta ecuación se convierte en una ecuación algebraica en alguna potencia de s . Ésta, a su vez, es de grado menor o igual que 4 cuando $|a| = 1, 2, 3, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}$. En estos casos, es posible resolver la ecuación (8) en términos de radicales. Por consistencia, se demuestra que la ecuación (8) siempre tiene al menos una solución real positiva de s cuando $a \in \mathbb{Q} \cap \mathbb{R}_{\setminus(-1,0]}$. Por notación, a las relaciones $x(u, v)$ y $y(u, v)$ que se obtienen al reemplazar la solución de la ecuación (8) en las ecuaciones (5) y (6) se les denota por $\Lambda(u, v)$ y $\Upsilon(u, v)$, respectivamente.

Referencias

- [1] HUYGENS, C., *Traité de la lumière. Chapitre VI: Des figures des corps diaphanes qui servent à la réfraction et à la réflexion*. En: *Traité de la lumière*, pp. 126–153. Gauthier-Villars et Cie, Paris, 1920.
- [2] DESCARTES, R., *Explication de quatre nouveaux genres d'ovales qui servent à l'optique*. En: *La Géométrie*, pp. 352–357, 1637.
- [3] CHASLES, M., *Sur les ovales de Descartes, ou lignes aplanétiques*. En: *Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie*, Note XXI, pp. 350–353. M. Hayez, Imprimeur de l'Académie Royale, Bruxelles, 1837.
- [4] QUETELET, A., *Sur les lignes dirimantes à deux foyers conjugués*. En: *Correspondance mathématique et physique*, Vol. 5, pp. 109–116. M. Hayez, Imprimeur de l'Académie Royale, Bruxelles, 1829.

- [5] FERRÉOL, R., *Encyclopedia of Remarkable Mathematical Forms: Cartesian Oval*. Website, 2023. Disponible en: <https://mathcurve.com/courbes2d.gb/descartes/descartes.shtml>.
- [6] TEIXEIRA, F. G., *Les ovales de Descartes*. En: *Traité des courbes spéciales remarquables planes et gauches*, Vol. I, pp. 218–233. Chelsea Publishing Company, 1971.
- [7] WOOLSEY, J. M., *Bipolar Equations-Cartesian Ovals*. *The Analyst*. (1875):106–115.
- [8] MOON, P. H. & SPENCER, D. E., *Field Theory Handbook: Including Coordinate Systems, Differential Equations, and Their Solutions*. John T. Zubal, 1988.
- [9] CAO, Y., AGBEMAVA, S. E., AFANASJEV, A. V., NAZAREWICZ, W. & OLSEN, E., *Landscape of pear-shaped even-even nuclei*. *Physical Review C*. **102**(2) (2020):024311.
- [10] EISENHART, L. P., *Separable systems of Stackel*. *Annals of Mathematics*. **35**(2) (1934):284–305.
- [11] WRINCH, D. M., *Some problems concerned with inverted prolate spheroids*. *Philosophical Magazine*. **14**(95) (1932):1061–1070.
- [12] DARBOUX, G., *Sur une classe remarquable de courbes et de surfaces algébriques, 2e édition*. Hermann, Paris, 1899.
- [13] DARBOUX, G., *Recherche des systèmes isothermes et d'autres systèmes qui se présentent dans la théorie de la chaleur*. En: *Leçons sur les systèmes orthogonaux et les coordonnées curvilignes*, p. 277. Gauthier-Villars, Paris, 1910.
- [14] LAMÉ, G., *Leçons sur les coordonnées curvilignes et leurs diverses applications*. Mallet-Bachelier, 1859.
- [15] ALBERTINI, G., BASSANI, D. & CARDONE, F., *Two questions about a non-flat nuclear space-time*. *The European Physical Journal Plus*. **133**(2) (2018):39.
- [16] WILLIAMSON, B., *On the Cartesian Oval*. En: *An Elementary Treatise on the Differential Calculus: Containing the Theory of Plane Curves, with Numerous Examples*, Chapter XX, pp. 375–384. Longmans, Green and Co., London, 1912.
- [17] SILVA-LORA, A. & TORRES, R., *Explicit Cartesian oval as a superconic surface for stigmatic imaging optical systems with real or virtual source or image*. *Proceedings of the Royal Society A*. **476**(2235) (2020):20190894.
- [18] VILLARINO, M. B., *Descartes' Perfect Lens*. arXiv:0704.1059 (2007).
- [19] CHO, S., *Explicit superconic curves*. *J. Opt. Soc. Am. A*. **33**(9) (2016):1822–1830.
- [20] SILVA-LORA, A. & TORRES, R., *Superconical aplanatic ovoid singlet lenses*. *J. Opt. Soc. Am. A*. **37**(7) (2020):1155–1165.
- [21] SILVA-LORA, A. & TORRES, R., *Rigorously aplanatic Descartes ovoids*. *J. Opt. Soc. Am. A*. **38**(8) (2021):1160–1169.
- [22] SILVA-LORA, A. & TORRES, R., *Achromatic stigmatism: achromatic Cartesian ovoid*. *J. Opt. Soc. Am. A*. **39**(9) (2022):1524–1532.

3.12 Control óptimo de un sistema de quimioatracción que modela el crecimiento de células gliales

Juan J. Forero Hernández¹, Élder J. Villamizar Roa²

Resumen

Se analiza un problema de control óptimo asociado a un sistema de tipo Keller-Segel para quimioatracción, en un dominio acotado bidimensional, que describe el crecimiento de células gliales. El modelo considera la proliferación celular, la difusión aleatoria de las variables, la difusión por quimiotaxis, los efectos de la hipoxia y los términos de reacción que describen las intervenciones terapéuticas. Se muestra la existencia de un control óptimo global en el marco de solución fuerte para los estados. Se derivan condiciones necesarias de optimalidad de primer orden y finalmente, se presenta un experimento numérico que resuelve el problema de control óptimo mediante el método del gradiente de descenso, visualizando las incógnitas controladas con respecto a los estados deseados correspondientes.

Palabras & frases claves: Keller-Segel, quimioatracción, control óptimo.

1. Introducción

En la charla se presentan algunos resultados relativos a un problema de control óptimo para un sistema parabólico acoplado de tipo Keller-Segel, propuesto por [1], que describe la evolución temporal de gliomas cerebrales. Los gliomas son tumores cerebrales de carácter altamente invasivo cuya dinámica está fuertemente influenciada por la proliferación celular y la migración dirigida por gradientes de oxígeno. Explícitamente, considerando $Q := \Omega \times (0, T)$ y $\Sigma := \partial\Omega \times (0, T)$, con $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ siendo un dominio acotado y $(0, T)$, $T > 0$, un intervalo de tiempo, consideramos el siguiente sistema:

$$\begin{cases} \partial_t u = D_u \Delta u + (\rho(\sigma) - \mathbf{c})u(\alpha - u) - \chi \nabla \cdot (u \nabla \sigma), & \text{en } Q, \\ \partial_t \sigma = D_\sigma \Delta \sigma - \frac{u}{\alpha} \frac{A_{ox}\sigma}{k_{ox} + \sigma} + P_{er} S_v \left(\beta - \frac{A_{ox}\sigma}{k_{ox} + \sigma} \right) + (S_c - \mathbf{s})u, & \text{en } Q, \\ \partial_n u = \partial_n \sigma = 0, & \text{sobre } \Sigma, \\ u(0) = u_0, \sigma(0) = \sigma_0, & \text{en } \Omega, \end{cases} \quad (1)$$

donde $u(x, t)$ representa la densidad de células tumorales mientras que $\sigma(x, t)$ corresponde a la concentración de oxígeno. Además, $\rho(\sigma)$ caracteriza la tasa de proliferación celular dependiente de la disponibilidad de oxígeno y $u(\alpha - u)$ introduce un efecto de proliferación. La expresión $\frac{A_{ox}\sigma}{k_{ox} + \sigma}$ refleja el efecto producido por la cinética de Michaelis-Menten, mientras que el término quimioatractivo $-\chi \nabla \cdot (u \nabla \sigma)$ describe la tendencia de las células a desplazarse hacia regiones más oxigenadas. Finalmente, los controles $\mathbf{c}(x, t)$ y $\mathbf{s}(x, t)$ se interpretan como los efectos producidos por terapias citotóxicas y antiangiogénicas, respectivamente, con $\mathbf{s} \leq S_c$ siendo S_c la tasa variable de suministro de nutrientes por el tejido canceroso.

Definición 1. Considere $\mathbf{c} \in L^\infty(Q)$, $\mathbf{s} \in L^\infty(Q)$, $u_0 \in L^2(\Omega)$, $\sigma_0 \in W^{1+,2+}(\Omega)$ con $u_0 \geq 0$ y $\sigma_0 \geq 0$ c.t.p. en Ω . Un par (u, σ) es llamado solución débil-fuerte del problema (1) en $(0, T)$, si

¹Universidad Industrial de Santander. Correo: juan2258036@correo.uis.edu.co

²Universidad Industrial de Santander. Correo: jvillami@uis.edu.co

$u \geq 0, \quad \sigma \geq 0 \quad \text{c.t.p. en } Q,$

$$u \in W_2 := \{u \in C([0, T]; L^2(\Omega)) \cap L^2(0, T; H^1(\Omega)), \partial_t u \in L^2(0, T; H^1(\Omega)')\},$$

$$\sigma \in X_{2+} := \{\sigma \in C([0, T]; W^{1+,2+}(\Omega)) \cap L^{2+}(0, T; W^{2,2+}(\Omega)), \partial_t \sigma \in L^{2+}(Q)\},$$

la ecuación (1)₁ y la condición de contorno para u se cumplen en sentido variacional, la ecuación (1)₂ y la condición de contorno para σ , c.t.p. en Q , y las condiciones iniciales (1)₃ y (1)₄ en el sentido $L^2(\Omega)$ y $W^{1+,2+}(\Omega)$, respectivamente.

Teorema 2. Sean $u_0 \in L^2(\Omega)$, $\sigma_0 \in W^{1+,2+}(\Omega)$ con $u_0 \geq 0$ y $\sigma_0 \geq 0$ en Ω , y $\mathbf{c} \in L^\infty(\Omega)$, $\mathbf{s} \in L^\infty(Q)$. Entonces existe una única solución débil-fuerte (u, σ) del sistema (1) en el sentido de la definición 1.

2. Problema de control óptimo

El problema de control a discutir es el siguiente

$$\begin{cases} \text{mín } J([u, \sigma, \mathbf{c}, \mathbf{s}]), \\ \text{sujeto a } [u, \sigma, \mathbf{c}, \mathbf{s}] \in \mathcal{S}_{ad}, \end{cases} \quad (2)$$

donde $J : W_2 \times X_{2+} \times L^\infty(Q) \times L^\infty(Q) \rightarrow \mathbb{R}$ es el funcional de costo definido por

$$\begin{aligned} J([u, \sigma, \mathbf{c}, \mathbf{s}]) &= \int_Q \left[k_1 u + \frac{1}{2} k_2 [\sigma - \sigma_Q]^2 + k_3 \mathbf{c} + k_4 \mathbf{s} \right] (x, t) dx dt \\ &\quad + \int_\Omega \left[l_1 u + \frac{1}{2} l_2 [\sigma - \sigma_\Omega]^2 \right] (x, T) dx, \end{aligned}$$

donde $k_i(x, t) \in L^\infty(Q)$ para $i = 1, 2, 3, 4$ y $l_j(x) \in L^\infty(\Omega)$ para $j = 1, 2$ son pesos positivos y acotados, y $\sigma_Q \in L^\infty(Q)$, $\sigma_\Omega \in L^\infty(\Omega)$ representan los estados deseados para el oxígeno en Q y en Ω al tiempo final T , respectivamente.

Adicionalmente, se define

$$\mathcal{S}_{ad} = \{[u, \sigma, \mathbf{c}, \mathbf{s}] : [u, \sigma] \text{ es solución débil-fuerte de (1) asociado a } [\mathbf{c}, \mathbf{s}] \in \mathcal{U}_{ad}\},$$

con

$$\mathcal{U}_{ad} = \{[\mathbf{c}, \mathbf{s}] \in L^\infty(Q) \times L^\infty(Q) \text{ tal que } 0 \leq \mathbf{c} \leq C_{max} \text{ y } 0 \leq \mathbf{s} \leq S_c\}.$$

Además, presentamos un resultado de existencia de solución óptima global y las siguientes condiciones de optimalidad de primer orden que caracterizan dicha solución mediante un sistema adjunto.

Teorema 3 (Condiciones necesarias de primer orden). Sean $[\mathbf{c}^*, \mathbf{s}^*] \in \mathcal{U}_{ad}$ un control óptimo para (2) con su correspondiente estado $[u^*, \sigma^*]$ y variables adjuntas p_1, p_2 las cuales satisfacen el siguiente sistema

$$\begin{cases} -\partial_t p_1 - \Delta p_1 - \alpha(\rho(\sigma^*) - \mathbf{c}^*) p_1 + 2u^*(\rho(\sigma^*) - \mathbf{c}^*) p_1 \\ \quad - \nabla \sigma^* \cdot \nabla p_1 + \frac{\sigma^* p_2}{1+\sigma^*} - (S_c - \mathbf{s}^*) p_2 = k_1, & \text{en } Q, \\ -\partial_t p_2 - \Delta p_2 - \alpha u^* \rho'(\sigma^*) p_1 + (u^*)^2 \rho'(\sigma^*) p_1 + \nabla \cdot (u^* \nabla p_1) \\ \quad + \frac{u^* p_2}{(1+\sigma^*)^2} + \frac{\gamma \alpha p_2}{(1+\sigma^*)^2} = k_2(\sigma^* - \beta), & \text{en } Q, \\ \partial_n p_1 = \partial_n p_2 = 0, & \text{sobre } \Sigma, \\ p_1(x, T) = l_1(x), \quad p_2(x, T) = l_2(x)(\sigma^*(T) - \beta), & \text{en } \Omega. \end{cases}$$

Entonces, se cumple la siguiente desigualdad variacional

$$\int_0^T \int_{\Omega} [(k_3 - u^*(\alpha - u^*)p_1)(\bar{\mathbf{c}} - \mathbf{c}^*) + (k_4 - u^*p_2)(\bar{\mathbf{s}} - \mathbf{s}^*)](x, t) dx dt \geq 0,$$

para todo $[\bar{\mathbf{c}}, \bar{\mathbf{s}}] \in \mathcal{U}_{ad}$. Una vez establecidos los resultados teóricos, se implementa un esquema numérico basado en el método de elementos finitos, y un algoritmo de descenso por gradiente, con el cual se resuelve el problema de control óptimo. Los experimentos computacionales permiten visualizar la evolución del glioma bajo distintos escenarios de control, comparando la dinámica sin intervención, bajo terapia citotóxica y bajo terapia antiangiogénica.

Referencias

- [1] LÓPEZ-AGREDO, J.L., RUEDA-GÓMEZ, D.A., & VILLAMIZAR-ROA, É.J., *Theoretical and numerical analysis of a parabolic system with chemoattraction modeling the growth of glioma cells*. Applied Numerical Mathematics. **186** (2023):143–163.
- [2] LÓPEZ-AGREDO, J.L., RUEDA-GÓMEZ, D.A., & VILLAMIZAR-ROA, É.J., *Numerical analysis of a mathematical model describing the evolution of hypoxic glioma cells*. Applied Numerical Mathematics. **131** (2023):138–157.

3.13 Ecuación estocástica de Ginzburg-Landau con Laplaciano fraccionario y ruido No-Gaussiano en condiciones tipo Robin

Jesús Fernando Carreño Díaz¹, Elena Kaikina²

Resumen

Esta charla presenta una clase de ecuaciones diferenciales parciales fraccionarias estocásticas no lineales de tipo Ginzburg–Landau compleja (GLC) planteadas en el octante multidimensional positivo. El modelo incorpora tanto ruido multiplicativo interior como forzamiento estocástico de tipo Robin en la frontera, actuando independientemente a lo largo de cada hiperplano coordinado. La ecuación incluye un Laplaciano fraccionario vectorial de tipo Caputo de orden $\beta \in (\frac{3}{2}, 2)$, un término no lineal y ruido no-Gaussiano introducido vía módulos de movimientos Brownianos convolucionados con núcleos deterministas.

Nos enfocamos en la formulación y análisis de soluciones suaves bajo supuestos de suavidad mínima. Los principales desafíos analíticos surgen de la naturaleza no local de la difusión fraccionaria, la pérdida de estructura de martingala debido al ruido no centrado en la frontera, y el acoplamiento complejo inducido por condiciones Robin en múltiples dimensiones. Desarrollamos un marco novedoso que combina cálculo de Itô en dimensión infinita, métodos de transformada de Laplace y estimaciones en espacios de Sobolev fraccionarios ponderados.

Palabras & frases claves: Laplaciano fraccionario, Ruido no-Gaussiano, Condiciones de frontera Robin.

1. Introducción

Esta plática abordará el análisis de una clase de ecuaciones diferenciales parciales fraccionarias estocásticas no lineales de tipo Ginzburg-Landau compleja (GLC), sujetas a ruido en la frontera sobre el octante multidimensional positivo. Específicamente, estudiamos el siguiente sistema estocástico fraccionario no lineal de GLC planteado en el dominio hiperoctante:

$$D^n = \{x = (x_j)_{j=1}^n : x_j > 0\}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad n \geq 3,$$

que involucra tanto ruido multiplicativo interior como forzamiento fronterizo estocástico de tipo Robin. El problema toma la forma:

$$\begin{cases} du - (\nabla^\beta u - |u|^\sigma u) dt = f(u) * dW, & x \in D^n, \quad t > 0, \\ u(0, x) = u_0(x), & x \in D^n, \\ (1 + \eta_j \partial_{x_j}) u|_{x_j=0} = V_j(t, x_{\neq j}), & j = 1, \dots, n; \quad x_{\neq j} \in D^{n-1}, \quad t > 0. \end{cases} \quad (1)$$

Aquí, $u = u(t, x)$, $\beta \in (\frac{3}{2}, 2)$, $\sigma > 0$, $\text{Re } \eta_j > 0$ y $x_{\neq j} = (x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_n)$.

¹PCCM UNAM-UMSNH. Correo: jefecadi@matmor.unam.mx

²CCM UNAM. Correo: ekaikina@matmor.unam.mx

El operador ∇^β denota un Laplaciano fraccionario vectorial dado por la derivada fraccionaria de tipo Caputo de orden β , definido como:

$$\nabla^\beta u = \sum_{j=1}^n D_{x_j}^\beta u(x) = \frac{1}{\Gamma(2-\beta)} \int_0^{x_j} \frac{\partial_{y_j}^2 u(y)}{(x_j - y_j)^{\beta-1}} dy_j.$$

La función desconocida $u(t, x)$ es un proceso estocástico valuado en complejos definido en el espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ con una filtración normal $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$. El ruido multiplicativo interior es impulsado por el proceso:

$$W(t, x) = \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{\beta}_j^{(k)}(t, \omega) \tilde{\Phi} \tilde{e}_k(x)$$

y los datos fronterizos $V_j(t, x_{\neq j})$ modelan forzamiento estocástico y están dados por:

$$V_j(t, x_{\neq j}) = h_j(t, x_{\neq j}) * \sum_{k=1}^{\infty} |\beta_j^{(k)}(t, \omega)| \Phi e_k(x_{\neq j}), \quad \omega \in \Omega, \quad x_{\neq j} \in D^{n-1},$$

donde $\{\tilde{\beta}_j^{(k)}\}_{k \in \mathbb{N}}$, $\{\beta_j^{(k)}\}_{k \in \mathbb{N}}$ son movimientos Brownianos estándar independientes y $\tilde{\Phi}, \Phi \in L_0^2$ son operadores de Hilbert–Schmidt actuando sobre una base ortonormal en $L^2(D^n)$ hacia $L^2(D^n), L^2(D^{n-1})$ hacia $L^2(D^{n-1})$ con norma

$$\|\tilde{\Phi}\|_{L_0^2}^2 := \sum_{k=1}^{\infty} \|\tilde{\Phi} \tilde{e}_k\|_{L^2(D^n)}^2 < \infty, \quad \|\Phi\|_{L_0^2}^2 := \sum_{k=1}^{\infty} \|\Phi e_k\|_{L^2(D^{n-1})}^2 < \infty$$

y $h_j(t, x_{\neq j}) \in L^\infty([0, \infty) \times D^{n-1})$ es un núcleo determinista. El símbolo $*$ denota el operador de convolución en la variable espacial x .

2. Resultados principales

La primera parte de la charla será mostrar el siguiente resultado de existencia local para el sistema (1), incluyendo brevemente las definiciones y conceptos que están allí presentes.

Teorema 1. *Sea $\sigma > 0$. Supongamos que los datos iniciales $u_0 \in W^{\frac{1}{2}+\gamma}$ son un proceso aleatorio $\mathcal{F}_0$ -medible y $u_0(0) = 0$ casi seguramente. También, supongamos que $\Phi \in L_0^2$, $h \in H_T$ y $f \in F_T$. Además, que se tengan las siguientes condiciones de compatibilidad:*

$$\int_0^\infty h_j(x_k) dx_k = 0$$

para $x_{\neq k} \in D^{n-2}$, $t > 0$, $k = 1, 2, \dots, j-1, j+1, \dots, n$. Entonces existe una única solución suave local u para (1) con trayectorias continuas valuadas en $W^{\frac{1}{2}+\gamma}$, tal que

$$\lim_{t \rightarrow 0} u(t, x) = u_0(x) \quad \text{c.s.},$$

$$\lim_{x_j \rightarrow 0} (1 + \eta_j \partial_{x_j}) u(t, x) = V_j(t, x_{\neq j}), \quad \text{c.s.}, \quad j = 1, 2, \dots, n;$$

para $t > 0$, $x_{\neq j} \in D^{n-1}$. Esta solución está definida en un intervalo aleatorio $(0, T^*(u_0, h, f, \Phi, \omega))$; donde $T^*(u_0, h, f, \Phi, \omega) > 0$ es un tiempo de paro tal que la alternativa de explosión:

$$T^*(u_0, \omega) = +\infty \quad o \quad \lim_{t \rightarrow T^*} \|u\|_{W^{\frac{1}{2}+\gamma}} = +\infty$$

se cumple de manera casi segura ($\mathbb{P}(\omega)$ -c.s.).

También demostramos el siguiente teorema de existencia global. Para ello definimos los espacios:

$$H_\theta = \left\{ h \in C^1([0, \infty); W^{\frac{3}{2}}(D^{n-1}) \cap L^{1,1}(D^{n-1})) \right\},$$

$$F_\delta = \left\{ f \in C([0, \infty); W^{\frac{1}{2}+\gamma}(D^n)) \right\}$$

con normas para $\theta > 0$ y $\delta > 0$

$$\|h\|_{H_\theta} = \sup_t \langle t \rangle^\theta \left[\|(1 + |t\partial_t|)h(t)\|_{W^{\frac{3}{2}}(D^{n-1})} + \|(1 + |t\partial_t|)h(t)\|_{L^{1,1}(D^{n-1})} \right],$$

$$\|f\|_{F_\delta} = \sup_t \langle t \rangle^\delta \|f\|_{W^{\frac{1}{2}+\gamma}(D^n)}.$$

Teorema 2. Sea $\sigma > 1$. Supongamos que el dato inicial $u_0 \in W^{\frac{1}{2}+\gamma}$ es un proceso aleatorio $\mathcal{F}_0$ -medible y $u_0(0) = 0$ casi seguramente, y también supongamos que $\Phi \in L_0^2$, $h \in H_\theta$ y $f \in F_\delta$; con $\theta > \max\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{\sigma-1}\right\}$ y $\delta > 0$ con

$$\|u_0\|_{W^{\frac{1}{2}+\gamma}} + \|h\|_{H_\theta} + \|f\|_{F_\delta} + \|\Phi\|_{L_0^2} < \varepsilon,$$

donde $\varepsilon > 0$ es suficientemente pequeño. Entonces la solución de (1) dada por el Teorema 1 es global en el tiempo. Además, si $\max\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{\sigma-1}\right\} < \theta < \frac{n}{\beta} - \frac{1}{2}$, entonces es válida la siguiente estimación asintótica

$$\mathbb{E} \sup_t \left\| u - t^{-\theta} \sum_j T_{\left(\frac{p}{\beta-1}\right)}^j \mathcal{L}^n(V_{\text{asymp}}^j(p_{\neq j}))K(p) \right\|_{L^\infty(D^n)}^2 \leq C\varepsilon^{\sigma+1} t^{-2(\theta-\frac{1}{2})+\gamma},$$

donde

$$V_{\text{asymp}}^j(x) = h_{\text{as}}^j(x_{\neq j}) * \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{\infty} |\beta_k(t, \omega)| \Phi e_k(x_{\neq j}), \quad \omega \in \Omega, \quad x_{\neq j} \in D^{n-1},$$

con $h_{\text{as}}^j(x_{\neq j}) = \lim_{t \rightarrow \infty} t^\theta h_j(t, x_{\neq j})$, $\gamma > 0$ suficientemente pequeño y $j = 1, \dots, n$.

Referencias

- [1] M. BARTON-SMITH, *Global solution for a stochastic Ginzburg–Landau equation with multiplicative noise*. Stoch. Anal. Appl. **22**(1) (2004):1–18.
- [2] CARREÑO-DÍAZ, J. F.; KAIKINA, E. I., *Ginzburg-Landau equation with fractional Laplacian in right quarter plane*. Nonlinearity **37**(7) (2024):075014

- [3] CARREÑO-DÍAZ, J. F.; KAIKINA, E. I., *Neumann problem for Ginzburg-Landau equation with fractional Laplacian in right quarter plane*. Journal Differential equation, **418** (2025):258–304.
- [4] DA PRATO, G., & ZABCZYK, J., *Stochastic Equations in Infinite Dimensions*. Cambridge University Press, 2014.
- [5] KAIKINA, ELENA I., *Stochastic Landau-Ginzburg equation with white-noise boundary conditions of Robin type*. Nonlinearity, **32**(12) (2019):4967–4995.

3.14 Ecuaciones Diferenciales en Economía. Enfoque de Dinámica de Sistemas

Giampaolo Orlandoni-Merli¹, Josefa Ramoni-Perazzi²

Resumen

El estudio de la ciencia económica requiere una formación socio-humanística, complementada con herramientas de tipo cualitativo y cuantitativo. Las matemáticas resultan fundamentales para su cabal comprensión y aplicación. Las ecuaciones diferenciales y en diferencias tienen una importancia particular, por ser la matemática del cambio, del crecimiento y de la dinámica de los procesos. En este trabajo se resalta la importancia del uso de las ecuaciones diferenciales en el análisis de los procesos económicos, bajo el enfoque de la dinámica de sistemas. Se presentan diversos modelos, iniciando con el modelo ecológico depredador-presa, que muestra la interrelación economía-ecología, y ayuda a comprender el modelo de crecimiento de Goodwin. Luego se estudia el modelo de crecimiento de Solow, finalizando con un modelo simplificado de ciclo económico. El objetivo es ilustrar la importancia de las ecuaciones diferenciales y de la dinámica de sistemas en la descripción y explicación de la evolución temporal de los sistemas económicos.

Palabras & frases claves: dinámica de sistemas, modelos de crecimiento económico, ecuaciones diferenciales, sistemas dinámicos.

1. Introducción

Los procesos económicos se caracterizan por ser sistemas dinámicos que evolucionan en el tiempo, hecho que requiere enfoques que permitan capturar la complejidad de esos procesos, además de la estructura de retroalimentación que caracteriza a la dinámica económica. El análisis de las trayectorias de estos sistemas dinámicos utiliza herramientas matemáticas basadas en ecuaciones diferenciales y en diferencias finitas, siendo el soporte para diseñar y evaluar políticas socio económicas, al facilitar la simulación de escenarios y el diseño de estrategias de políticas alternativas. El objetivo de este trabajo es mostrar la importancia del uso de las ecuaciones diferenciales en el estudio de los procesos económicos, bajo el enfoque de la dinámica de sistemas (DS), como herramienta que facilita la interpretación de dichas ecuaciones, permitiendo incorporar mecanismos para simular variaciones en parámetros, y analizar el impacto de políticas públicas relacionadas con el crecimiento y desarrollo económico. Se presentan las ecuaciones diferenciales de algunos modelos de crecimiento económico [1, 5, 3, 10].

2. Métodos. Ecuaciones Diferenciales y Dinámica de Sistemas

La DS es una metodología de análisis que estudia el comportamiento dinámico de los sistemas y su estructura de retroalimentación. El proceso de modelaje se centra en la visión global del problema, cuya esencia es la estructura de retroalimentación del sistema (*feedback structure*), que tiende a eliminar las discrepancias observadas con relación al estado de equilibrio (*goal-seeking*). Los procesos económicos se modelan mediante variables de acumulación y variables de flujo; la solución de las ecuaciones se hace según los métodos numéricos tradicionales (Euler, Runge-Kutta).

¹Universidad Industrial de Santander, Bucaramanga - Colombia. Correo: giaorlan@correo.uis.edu.co

²Universidad Industrial de Santander, Bucaramanga - Colombia. Correo: jramonip@uis.edu.co

Los modelos de DS se componen básicamente de variables y ecuaciones de nivel y de flujo y sus respectivas variables. Las variables de nivel o de estado representan la acumulación de recursos en el sistema a lo largo del tiempo, como resultado de la diferencia acumulada entre los flujos de entrada y los de salida para dicho nivel. Las variables de flujo representan el flujo de material o energía desde o hacia un cierto nivel, determinando los cambios en dichas variables por unidad de tiempo.

Las Ecuaciones de Nivel y de Flujo. Las ecuaciones de nivel son las ecuaciones integrales del sistema; relacionan una magnitud en el tiempo t con su valor en el periodo anterior ($t-1$), y con su tasa de variación, en el intervalo de cálculo dt . La expresión general en tiempo discreto es $\text{Niv}_t = \text{Niv}_{t-1} + dt \text{Tasa}_{(t-1;t)}$. Las ecuaciones de flujo determinan el comportamiento del sistema; indican la tasa de variación de las variables nivel en cada unidad de tiempo. El crecimiento poblacional puede expresarse con la ecuación en diferencias finitas siguiente: $\text{Pob}_t = \text{Pob}_{t-1} + dt (\text{Nat} - \text{Mrt})_{(t-1;t)}$. Representación de una ecuación diferencial en notación de DS. La ecuación diferencial que relaciona el nivel de agua de un tanque con sus flujos de entrada y de salida es: $dV/dt = (E - S)$. Si el flujo de salida es proporcional al nivel de agua en el tanque $S = sV$, y el flujo de entrada es $E = eV(1 - V/K)$, la ecuación en notación de DS, se puede representar gráficamente [1, 4, 9, 11, 3, 7, 8].

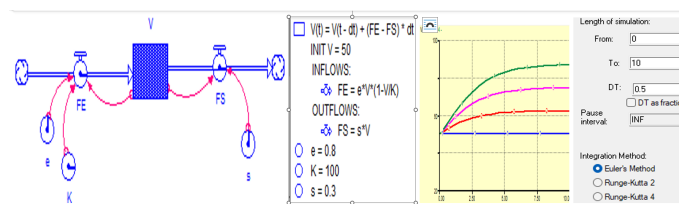


Figura 1: Representación de Ecuación Diferencial Ordinaria en Dinámica de Sistemas. Fuente. Elaboración por autores. Software Stella_v.9.2007. Isee Systems.

3. Aplicaciones de las Ecuaciones Diferenciales. Modelos Económicos y Dinámica de Sistemas

3.1. Modelo Depredador-Presa. Este modelo de la economía ambiental y recursos naturales, se compone de dos ecuaciones diferenciales ordinarias no lineales que intenta modelar y explicar la interacción entre ciertas especies de peces en el mar Adriático. Fueron propuestas por Alfred Lotka y Vito Volterra (LV) en 1925 (EDO_LV); el sistema describe la dinámica de interacción de dos especies, presa y depredador. La EDO1: $dS/dt = f_{n1}S(1 - S/K) - (f_{m1}S + f_{is}SD)$, explica el crecimiento exponencial de la población de presas ante la ausencia de depredadores, y disminuye a medida que son cazadas. La EDO2: $dD/dt = f_{n2}D + f_{is}SD - f_{m2}D$ explica que la población de depredadores depende de la disponibilidad de presas, y decrece si estas escasean. Se genera un comportamiento cíclico en la dinámica de evolución de las dos poblaciones [3, 8, 11].

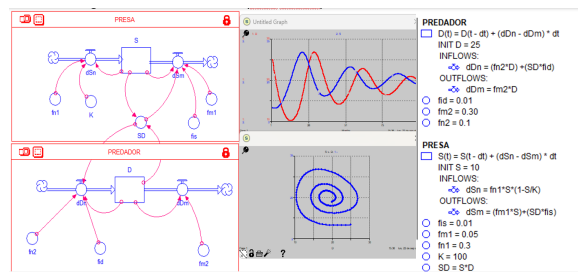


Figura 2: Modelo Predador Presa (Lotka Volterra). Fuente. Elaboración por autores. Software Stella_v.9.2007. Isee Systems.

3.2. Modelo Empleo-Salarios de Goodwin. La interacción entre empleo y salarios y su efecto sobre el crecimiento económico es el tema del modelo que Goodwin escribió en 1967 para explicar las fluctuaciones económicas que se generan en el mercado laboral, combinando elementos del modelo de crecimiento Harrod-Domar con el modelo de la curva de Phillips. Basándose en la estructura del modelo LV, propuso que el empleo y los salarios evolucionan cíclicamente, al igual que en un ecosistema, siguiendo un modelo predador-presa, definiendo la tasa de empleo como la presa, mientras que el salario es el depredador. Cuando los salarios son bajos, el empleo crece, pero disminuye cuando los salarios suben, afectando a la tasa de empleo y generando así un ciclo continuo. Este enfoque permitió analizar los ciclos económicos como fenómenos endógenos, causados por el propio sistema económico sin necesidad de recurrir a factores externos. El modelo utiliza un sistema de ecuaciones diferenciales no lineales para describir la dinámica de la interacción entre la participación salarial (W) y la tasa de empleo (E) en la economía. Las dos ecuaciones son $dS/dt = S \cdot f_1 \cdot E - (f_2 + a)$ y $dE/dt = S(g \cdot S - (a + b + d))$. Los parámetros de las ecuaciones se definen como g : tasa de incremento de capital; a : tasa de crecimiento de la productividad laboral; b : tasa de crecimiento de población; d : tasa de depreciación del capital; los parámetros de la curva de Phillips, f_1 y f_2 , representan la relación entre la inflación salarial y el desempleo. La solución y representación del modelo es similar al caso del modelo LV, como se muestra en la Figura 2 [3, 6].

3.3. Modelo de Crecimiento Económico de Solow. Es un modelo de crecimiento económico expresado por una ecuación diferencial no lineal, donde se analiza la relación entre el crecimiento económico y la inversión en capital. La EDO:

$$dk/dt = k'(t) = sf(k(t)) - (n + d)k(t)$$

[3, 5].

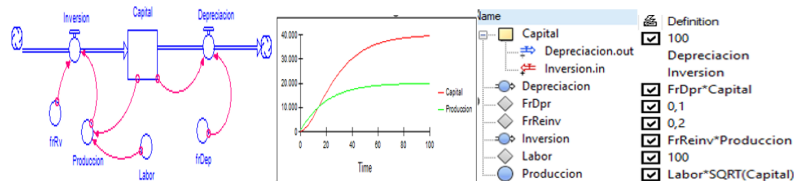


Figura 3: Modelo de Crecimiento Robert Solow. Fuente. Elaboración por autores. Software Stella_v.9.2007. Isee Systems.

Referencias

- [1] FORRESTER, I. *Principle of Systems*. Lexington. Massachusetts. USA, 1961.
- [2] MAY, R. *Simple Mathematical Models with very Complicated Dynamics*. Nature, **261** (1976):459–467.
- [3] STERMAN, J. *Business Dynamics: Systems Thinking and Modeling for a Complex World*. McGraw Hill, 2000.
- [4] ZILL, D. *A first course in Differential Equations, with modeling applications*. Cengage, 2013.
- [5] SOLOW, R. *A Contribution to the Theory of Economic Growth*. Quarterly Journal of Economics, **70**(1) (1956):65–94.
- [6] GOODWIN, R. M., *A Growth Cycle*. En: Feinstein, C. H. (Ed.), *Socialism, Capitalism and Economic Growth*, pp. 165–170. Cambridge University Press, 1967.
- [7] POWERSIM SOFTWARE AS, *Powersim Studio v10*. Software, 2017.
- [8] ISEE SYSTEMS, *Stella v9*. Software, 2007.
- [9] ORLANDONI, G. *Análisis Dinámico de Poblaciones Biológicas mediante Dinámica de Sistemas*. Economía, **13** (1997):115–146.
- [10] ORLANDONI, G. Y RAMONI-PERAZZI, J. *Ecuaciones Diferenciales de la Física Clásica. Interpretación y Solución mediante Dinámica de Sistemas*. Revista UIS Ingenierías, **17**(1) (2018).
- [11] ORLANDONI, G., RAMONI-PERAZZI, J., *Análisis y Simulación de Modelos Económicos Complejos mediante el Enfoque de Dinámica de Sistemas*. En: Memorias CICIC, **1** (2018):72–77.
- [12] ORLANDONI, G., RAMONI-PERAZZI, J., *Modelos económicos y sistemas caóticos: Estudio mediante dinámica de sistemas*. En: Métodos Numéricos y sus Aplicaciones. XI CCMN, Universidad Industrial de Santander, Bucaramanga, 2018.
- [13] RAMONI-PERAZZI, J. Y ORLANDONI, G. *Dinámica de sistemas y crecimiento económico*. Revista de Economía Institucional, **24**(46) (2022).

3.15 Estimaciones de error para problemas mixtos degenerados

Beatriz Rojas G.¹, Christian C. Gómez M.²

Resumen

En la presentación se analiza la estructura matemática asociada a una familia de ecuaciones mixtas lineales degeneradas, las cuales han sido objeto de un estudio considerable. Entre los trabajos recientes pueden citarse [1, 2]. La existencia y unicidad de la solución al problema continuo está establecida en [3]. No obstante, hasta la fecha no se dispone de un análisis numérico completamente discreto. Para investigaciones de naturaleza similar, se puede consultar [4].

Palabras & frases claves: Estimaciones de error; Problemas degenerados; Ecuaciones mixtas lineales degeneradas. .

1. Introducción

Sean X y Q espacios de Hilbert reales, provistos de las normas $\|\cdot\|_X$ y $\|\cdot\|_Q$, respectivamente, y sean X' , Q' sus espacios duales correspondientes. Además, $\langle \cdot, \cdot \rangle_X$ y $\langle \cdot, \cdot \rangle_Q$ denotan los productos de dualidad en X y Q . Asimismo, considérense Y y M espacios de Hilbert reales tales que $X \subset Y$ y $Q \subset M$; $R : Y \rightarrow Y'$, $S : M \rightarrow M'$ y $B : X \rightarrow Q'$ (con $B' : Q \rightarrow X'$ su operador adjunto) operadores lineales y continuos. Además, los operadores $A : X \rightarrow X'$ y $C : Q \rightarrow Q'$ no se suponen necesariamente lineales. Sea $T > 0$, $f \in L^2(0, T; X')$, $g \in L^2(0, T; Q')$, $u_0 \in X$ y $p_0 \in Q$, entonces una familia de ecuaciones mixtas degeneradas queda definida por:

Problema 1. Encontrar $u \in L^2(0, T; X)$ y $p \in L^2(0, T; Q)$ tal que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle Ru(t), v \rangle + \langle Au(t), v \rangle + \langle B'p(t), v \rangle &= \langle f(t), v \rangle \quad \forall v \in X, \\ \frac{d}{dt} \langle Sp(t), q \rangle - \langle Bu(t), q \rangle + \langle Cp(t), q \rangle &= \langle g(t), q \rangle \quad \forall q \in Q, \\ Ru(0) &= Ru_0, \quad \text{en } Y' \\ Sp(0) &= Sp_0, \quad \text{en } M'. \end{aligned}$$

2. Existencia y Unicidad del Problema

Las siguientes hipótesis que permitirán establecer condiciones necesarias y suficientes para demostrar la existencia y unicidad del Problema 1.

H1. Existe $\alpha > 0$ tal que $\langle Rv, v \rangle + \langle Av, v \rangle + \|Bv\|_{Q'}^2 \geq \alpha \|v\|_X^2 \quad \forall v \in X$.

H2. B satisface la condición inf-sup.

H3. Existe $\alpha_* > 0$ tal que $\langle Sq, q \rangle + \langle Cq, q \rangle \geq \alpha_* \|q\|_Q^2 \quad \forall q \in Q$

¹Universidad de los Llanos. Correo: brojasg@unillanos.edu.co

²Universidad de los Llanos. Correo: chgomez@unillanos.edu.co

H4. Existe $K > 0$ tal que para cada $h \in Q'$ y $\epsilon > 0$, la condición

$$p \in \text{Ker} B' : \langle (\epsilon R_2 + S)p, q \rangle = \langle h, q \rangle \quad \forall q \in \text{Ker} B'$$

implica que $\|p\|_Q \leq K\|h\|_{Q'}$.

H5. $R + A$ y $S + C$ son operadores estrictamente monótonos.

Para continuar se enunciará la versión lineal de existencia y unicidad.

Teorema 2. Sean $R : X \rightarrow X'$, $S : Q \rightarrow Q'$ y $B : X \rightarrow Q'$ ($B' : Q \rightarrow X'$ su operador adjunto respectivo) lineales. Asuma que R y S son continuos, simétricos y monótonos, B continuo, $A : X \rightarrow X'$ y $C : Q \rightarrow Q'$ son lineales simétricos, monótonos y continuos. Además, las hipótesis H1.-H4. se cumplen. Entonces existe una solución $u \in L^2(0, T; X)$ y $p \in L^2(0, T; Q)$ del Problema 1. Más aún, si se cumple H5. la solución es única.

Demostración. Ver Teorema 3.4 [3]. □

Una de las contribuciones esenciales e innovadoras de este trabajo consiste en la presentación de una aproximación totalmente discreta para la ecuación evolutiva degenerada mixta. Para ello, se consideran válidas todas las hipótesis establecidas en el Teorema 2. En la discretización temporal se empleará el método de Euler. Sea $\Delta t = \frac{T}{N}$ el paso de tiempo y $t_n = n\Delta t$, para $n = 0, \dots, N$, una partición del intervalo $[0, T]$. Se define la derivada discreta de primer orden en el tiempo como

$$d_t \theta^n = (\Delta t)^{-1}(\theta^n - \theta^{n-1}),$$

donde $\theta^n = \theta(t_n)$.

Asimismo, considérense X_h y Q_h subespacios de dimensión finita de X y Q , respectivamente. Sean $u_{0,h} \in X_h$, $p_{0,h} \in Q_h$, $f \in C([0, T], X')$ y $g \in C([0, T], Q')$. Bajo estas condiciones, la formulación totalmente discreta del problema 1 se establece de la siguiente manera:

Problema 3. Encontrar $u_h^n \in X_h$ y $p_h^n \in Q_h$, $n = 1, \dots, N$, tal que

$$\begin{aligned} \langle R d_t u_h^n, v \rangle + \langle A u_h^n, v \rangle + \langle B' p_h^n, v \rangle &= \langle f(t_n), v \rangle \quad \forall v \in X_h, \\ \langle S d_t p_h^n, q \rangle - \langle B u_h^n, q \rangle + \langle C p_h^n, q \rangle &= \langle g(t_n), q \rangle \quad \forall q \in Q_h, \\ u_h^0 &= u_{0,h} \\ p_h^0 &= p_{0,h}. \end{aligned}$$

Para la existencia y unicidad del problema anterior se tiene:

Teorema 4. Suponga que los operadores R , S , A , B y C satisfacen las condiciones del Teorema 2. Entonces la aproximación por discretización del Problema 3 tiene única solución $u_h^n \in X_h$ y $p_h^n \in Q_h$.

Introduciendo los términos estándar para el estudio del error es necesario considerar u y u_h^n ($n = 1, \dots, N$); p y p_h^n ($n = 1, \dots, N$) las soluciones para el Problema 1 y el Problema 3, respectivamente. Se

define la partición del error como $e_u := u(t_n) - u_h^n = \rho_h^n + \sigma_h^n$, $n = 0, \dots, N$ y $e_p := p(t_n) - p_h^n = \widehat{\rho}_h^n + \widehat{\sigma}_h^n$ donde

$$\rho_h(t) := u(t) - \Pi_h u(t), \quad \rho_h^n := \rho_h(t_n), \quad \sigma_h^n := \Pi_h u(t_n) - u_h^n \quad (1)$$

$$\widehat{\rho}_h(t) := p(t) - \mathcal{P}_h p(t), \quad \widehat{\rho}_h^n := \widehat{\rho}_h(t_n), \quad \widehat{\sigma}_h^n := \mathcal{P}_h p(t_n) - p_h^n, \quad (2)$$

$\Pi_h : X \rightarrow X_h$ y $\mathcal{P}_h : Q \rightarrow Q_h$ son proyecciones ortogonales dadas por

$$\Pi_h w \in X_h : \quad (\Pi_h w, v)_X = (w, v)_\Lambda \quad \forall v \in X_h,$$

$$\mathcal{P}_h q \in Q_h : \quad (\mathcal{P}_h q, r)_Q = (q, r)_Q \quad \forall q \in Q_h,$$

claramente Π_h y $\mathcal{P}_h$ están bien definidas y satisfacen

$$\|w - \Pi_h w\|_\Lambda \leq \inf_{v \in \Lambda_h} \|w - v\|_\Lambda \quad \forall w \in \Lambda, \quad (3)$$

$$\|r - \mathcal{P}_h r\|_Q \leq \inf_{q \in Q_h} \|r - q\|_\Lambda \quad \forall r \in Q. \quad (4)$$

Por otro lado, para $n = 1, \dots, N$, se tiene

$$\begin{aligned} \tau^n &:= \frac{u(t_n) - u(t_{n-1})}{\Delta t} - \partial_t u(t_n) = \bar{\partial}(u(t_n)) - \partial_t u(t_n), \\ \widehat{\tau}^n &:= \frac{p(t_n) - p(t_{n-1})}{\Delta t} - \partial_t p(t_n) = \bar{\partial}(p(t_n)) - \partial_t p(t_n). \end{aligned} \quad (5)$$

Lema 5. Si $u \in H^1(0, T; X)$ y $p \in H^1(0, T; Q)$ entonces existe $C > 0$ independiente de h y Δt tal que

$$\begin{aligned} \langle R\sigma_h^n, \sigma_h^n \rangle + \Delta t \sum_{k=1}^n \|\sigma_h^k\|_X^2 &\leq C \left[\langle R\sigma_h^0, \sigma_h^0 \rangle + \Delta t \sum_{k=1}^N \left\{ \|\tau^k\|_Y^2 + \|\rho_h^k\|_X^2 + \|\bar{\partial}\rho_h^k\|_X^2 \right\} \right] \\ \langle S\widehat{\sigma}_h^n, \widehat{\sigma}_h^n \rangle + \Delta t \sum_{k=1}^n \|\widehat{\sigma}_h^k\|_Q^2 &\leq C \left[\langle S\widehat{\sigma}_h^0, \widehat{\sigma}_h^0 \rangle + \Delta t \sum_{k=1}^N \left\{ \|\widehat{\tau}^k\|_Q^2 + \|\widehat{\rho}_h^k\|_Q^2 + \|\bar{\partial}\widehat{\rho}_h^k\|_Q^2 \right\} \right] \end{aligned}$$

Desde el lema obtenemos el siguiente Teorema.

Teorema 6. if $u \in H^1(0, T; X) \cap H^2(0, T; Y)$ and $p \in H^1(0, T; Q) \cap H^2(0, T; Q)$ then exists a constant

$C > 0$ independent of h and Δt such that

$$\begin{aligned}
& \max_{1 \leq n \leq N} \langle R(u(t_n) - u_h^n), u(t_n) - u_h^n \rangle + \Delta t \sum_{k=1}^N \|u(t_k) - u_h^k\|_X^2 \\
& \leq C \left\{ \|u(0) - u_{0,h}\|_\Lambda^2 + \max_{0 \leq n \leq N} \left[\inf_{v \in \Lambda_h} \|u(t_n) - v\|_\Lambda^2 \right] \right. \\
& \quad \left. + \int_0^T \inf_{v \in \Lambda_h} \|\partial_t u(t) - v\|_\Lambda^2 dt + (\Delta t)^2 \int_0^T \|\partial_{tt} u(t)\|_Y^2 dt \right\}. \\
& \max_{1 \leq n \leq N} \langle S(p(t_n) - p_h^n), p(t_n) - p_h^n \rangle + \Delta t \sum_{k=1}^N \|p(t_k) - p_h^k\|_Q^2 \\
& \leq C \left\{ \|p(0) - p_{0,h}\|_Q^2 + \max_{0 \leq n \leq N} \left[\inf_{q \in Q_h} \|p(t_n) - q\|_Q^2 \right] \right. \\
& \quad \left. + \int_0^T \inf_{q \in Q_h} \|\partial_t p(t) - q\|_Q^2 dt + (\Delta t)^2 \int_0^T \|\partial_{tt} p(t)\|_Q^2 dt \right\}.
\end{aligned}$$

Por otro lado, se mostrarán experimentos numéricos destinados a validar y confirmar los resultados obtenidos en este trabajo. Finalmente, en la presentación se introducen proyectores construidos a partir de espacios de Hilbert sobre los cuales se trabaja, los cuales permiten reducir la exigencia de regularidad temporal. De esta manera, se evidencia que la teoría desarrollada se ajusta a los problemas de aplicación.

Referencias

- [1] RAMIRO ACEVEDO AND CHRISTIAN GÓMEZ, *Finite element error estimates for a mixed degenerate parabolic model*. C. R. Math. **360** (2022):431–438.
- [2] RAMIRO ACEVEDO AND CHRISTIAN GÓMEZ AND BIBIANA LÓPEZ-RODRÍGUEZ, *Fully-discrete finite element approximation for a family of degenerate parabolic problems*. Math. Model. Anal. **27** (2022):134–160.
- [3] SHOWALTER, R. E., *Nonlinear degenerate evolution equations in mixed formulation*. SIAM Journal on Mathematical Analysis. **42** (2010):2114–2131.
- [4] DANIELE BOFFI AND LUCIA GASTALDI, *Analysis of Finite Element Approximation of Evolution Problems in Mixed Form*. SIAM Journal on Numerical Analysis. **42** (2004):1502–1526.

3.16 Fully Discrete Degenerate Parabolic Problems: Applications to Transient Eddy Current Models with Source Data

Christian C. Gómez M.¹, Beatriz Rojas G.², Ramiro Acevedo³

Resumen

The aim of this work is to show an abstract framework to analyze a family of linear degenerate parabolic mixed equations and its numerical approximation by using a finite element method in space and a Backward-Euler scheme in time. We combine the theory for the degenerate parabolic equations (see [1]) with the classical Babuška–Brezzi theory to deduce necessary and sufficient conditions to prove the well-posedness of the continuous problem. Furthermore, we deduce that the fully-discrete problem has a unique solution and prove quasi-optimal error estimates for the approximation. Finally, we show a particular problem which arises from electromagnetic applications (*eddy current models with input currents as source data*) (see [2]) and we deduce its well-posedness and convergence by using the developed abstract theory, including numerical tests on three-dimensional space to illustrate the performance of the method and confirm the theoretical results. Some main result can be found in [4]. Other studies on mixed parabolic problems are presented in [3].

Keywords: Well-posedness, parabolic degenerate equations, mixed problems, finite element method, fully-discrete approximation, error estimates, eddy current model.

1. Introduction

The aim of this work is to establish a comprehensive abstract framework for analyzing a family of linear degenerate parabolic mixed equations and their numerical approximation. A family of mixed degenerate parabolic equations is given by Find $u \in L^2(0, T; X)$ and $\lambda \in L^2(0, T; M)$ that satisfy the following equations:

$$\frac{d}{dt}(\langle Ru(t), v \rangle_Y + b(v, \lambda(t))) + \langle Au(t), v \rangle_X = \langle f(t), v \rangle_X, \quad \forall v \in X \text{ in } D'(0, T),$$

$$b(u(t), \mu) = \langle g(t), \mu \rangle_M, \quad \forall \mu \in M,$$

$$\langle Ru(0), v \rangle_Y = \langle Ru_0, v \rangle_Y, \quad \forall v \in Y.$$

This analysis utilizes a finite element method in space combined with a Backward-Euler scheme in time, providing a robust approach to handle the inherent complexities of degenerate parabolic problems. Thus, The scheme of approximation can be written as follows Find $u_h \in X_h$ and $\lambda \in M_h$ that satisfy the following equations:

$$\left\langle R \frac{u_h^n - u_h^{n-1}}{\Delta t}, v \right\rangle_Y + b\left(v, \frac{\lambda_h^n - \lambda_h^{n-1}}{\Delta t}\right) + \langle Au_h^n, v \rangle_X = \langle f(t_n), v \rangle_X, \quad \forall v \in X_h,$$

¹Universidad de los Llanos. Correo: chgomez@unillanos.edu.co

²Universidad de los Llanos. Correo: brojasg@unillanos.edu.co

³Universidad del Cauca, Popayán, Colombia. Correo: rmacevedo@unicauca.edu.co

$$b(u_h^n, \mu) = \langle g(t_n), \mu \rangle_M, \quad \forall \mu \in M_h,$$

$$\langle Ru_h^0, v \rangle_Y = \langle Ru_0, v \rangle_Y, \quad \forall v \in Y.$$

By synthesizing the theoretical underpinnings of degenerate parabolic equations, as detailed in [1], with the classical Babuška–Brezzi theory, we derive necessary and sufficient conditions for proving the well-posedness of the continuous problem. This integration ensures a rigorous foundation for the equations, confirming that they are properly formulated and solvable under the specified conditions.

Moreover, our work extends to the fully discrete problem, where we prove the uniqueness of the solution and establish quasi-optimal error estimates for the numerical approximation. This requires a detailed analysis of the stability and accuracy of the numerical schemes employed. To highlight the practical relevance of the framework, the theoretical results are applied to a concrete problem arising in electromagnetic applications—specifically, eddy current models with input currents as source data, as discussed in [2]. Through this application, we confirm the well-posedness and convergence of the solution and present numerical experiments in three-dimensional space. These experiments not only demonstrate the practical efficiency of the method but also reinforce the theoretical findings. The significance of our results is further supported by the contributions reported in [4], while additional perspectives on mixed parabolic problems can be found in [3]. This work thus aims to bridge the gap between theoretical analysis and practical implementation, offering valuable contributions to both the mathematical theory and the computational treatment of degenerate parabolic equations.

2. Results

In this work, we develop a rigorous abstract framework for the study of linear degenerate parabolic mixed equations, combining the theory of degenerate parabolic equations with the Babuška–Brezzi theory. This framework establishes the well-posedness of the continuous problem by guaranteeing existence, uniqueness, and continuous dependence of the solution on the input data. Furthermore, it extends naturally to the fully discrete setting: using a finite element method in space together with a Backward Euler scheme in time, we prove the uniqueness of the discrete solution and derive quasi-optimal error estimates that confirm both the stability and accuracy of the numerical approximation [4, 3]. Thus, we obtain

$$\sum_{n=1}^N \|u(t_n) - u_h^n\|_X \leq C(h^r + \Delta t) \quad \text{and} \quad \sum_{n=1}^N \|\lambda(t_n) - \lambda_h^n\|_M \leq C(h^{\tilde{r}} + \Delta t)$$

where h depends on the mesh, r and $\tilde{r}$ on the regularity of the variables, and Δt is the time step.

To demonstrate the applicability of the theory, we consider electromagnetic models. More specifically, eddy current problems with input currents as source data, as discussed in [2]. This case study validates the theoretical results by confirming well-posedness and convergence of the solutions, and numerical tests in three-dimensional domains highlight the efficiency and reliability of the method. Overall, the results bridge the gap between abstract analysis and practical implementation, providing valuable contributions to the mathematical understanding and computational treatment of degenerate parabolic equations.

3. Conclusions

This study successfully developed an abstract framework for the analysis of linear degenerate parabolic mixed equations by combining the theory of degenerate parabolic equations with the Babuška–Brezzi theory. This framework established the well-posedness of the continuous problem, ensuring the existence and uniqueness of the solution as well as its continuous dependence on the input data. We also demonstrated that the fully discrete problem, solved through the finite element method in space and the Backward Euler scheme in time, admits a unique solution. We derived quasi-optimal error estimates that confirmed the accuracy and efficiency of the proposed numerical methods. The practical application of this framework to electromagnetic models, particularly eddy current problems with input currents as source data, validated both the well-posedness and the convergence of the solutions. Furthermore, numerical experiments in three-dimensional settings supported the theoretical results and confirmed the performance of the proposed methods. Overall, this study bridges the gap between theoretical analysis and practical implementation of degenerate parabolic equations, offering deeper insights into their mathematical formulation and numerical approximation, with meaningful implications in scientific and engineering contexts.

Referencias

- [1] SHOWALTER, R. E , *Monotone Operator in Banach Space and Nonlinear Partial Differential Equations* Vol. 49. American Mathematical Society, Providence, RI, 1997.
- [2] BERMÚDEZ, A., LÓPEZ-RODRÍGUEZ, B., RODRÍGUEZ, R. & SALGADO, P. , *Finite element error estimates for a mixed degenerate parabolic model*. ESAIM - Mathematical Modelling and Numerical Analysis. **47** (2013):875–902.
- [3] DANIELE BOFFI AND LUCIA GASTALDI, *Analysis of Finite Element Approximation of Evolution Problems in Mixed Form*. SIAM Journal on Numerical Analysis. **42** (2004):1502–1526.
- [4] ACEVEDO, R. C. GÓMEZ AND LÓPEZ-RODRÍGUEZ, B. , *Well-posedness for a family of degenerate parabolic mixed equations*. Submitted. arXiv:2005.05429 (2020).

3.17 Incorporación del efecto de campo carcinogénico en el modelado de la dinámica del volumen tumoral de cáncer de mama

Jainer A. Gomez¹, Leidy J. Rojas², David A. Miranda³

Resumen

Esta investigación se enfoca en la modelación matemática del crecimiento tumoral en el cáncer de mama, incorporando el *efecto de campo carcinogénico*. A diferencia de modelos previos que consideran únicamente la interacción entre células cancerígenas y del sistema inmunológico, este estudio introduce un nuevo parámetro asociado a las células normales pre-acondicionadas, las cuales contribuyen al crecimiento tumoral a través del *efecto de campo carcinogénico*. Para ello, se propone la modificación de un modelo matemático previamente validado en estudios *in vivo* con ratones, incorporando estos nuevos parámetros para evaluar su impacto en la dinámica tumoral y mejorar la capacidad predictiva del modelo. El modelo propuesto se implementó mediante simulaciones numéricas, ajustando los parámetros a los datos experimentales de volumen tumoral utilizando el algoritmo de optimización global *basinhopping*. Los resultados muestran que la inclusión del *efecto de campo carcinogénico* mejora la concordancia entre las predicciones del modelo y los datos experimentales, destacando la importancia de considerar la dinámica de las células normales pre-acondicionadas para obtener una representación más completa del crecimiento tumoral en escenarios no tratados.

Palabras & frases claves: EDO, campo, carcinogénico, dinámica, tumor, volumen

1. Introducción

El cáncer de mama es una de las principales causas de mortalidad en el mundo, con 2.3 millones de casos reportados en 2022, según la OMS [6]. Este panorama ha impulsado el desarrollo de modelos matemáticos que permiten comprender su dinámica y explorar estrategias terapéuticas [10]. Diversos autores han propuesto aproximaciones basadas en ecuaciones diferenciales ordinarias, considerando tanto la proliferación tumoral como la interacción con el sistema inmune y el microambiente [1, 2, 8].

En particular, Pei et al. [7] desarrollaron un modelo de siete ecuaciones diferenciales ordinarias que describe las interacciones entre células tumorales, células inmunes y factores moleculares clave como la proteína β -catenina y las señales inmunorreguladoras PD-1/PD-L1. A partir de datos experimentales, este modelo permite ajustar la dinámica tumoral en ausencia de tratamiento usando una de las siete ecuaciones propuestas; ofreciendo así un marco teórico robusto para el estudio del cáncer de mama.

No obstante, los resultados reportados muestran limitaciones al representar con precisión el crecimiento del tumor. En este trabajo, proponemos extender dicho modelo incorporando el *efecto de*

¹Escuela de Física, Universidad Industrial de Santander. Correo: jainer2258038@correo.uis.edu.co

²Escuela de Física, Universidad Industrial de Santander. Correo: fisjohanarb0911@gmail.com

³Escuela de Física, Universidad Industrial de Santander. Correo: dalemir@uis.edu.co

campo carcinogénico, entendido como la influencia de células aparentemente normales pero alteradas que favorecen la progresión tumoral [5, 4, 9]. Para ello, se introduce una nueva variable asociada al número de células normales pre-acondicionadas y se evalúa su impacto en la dinámica de crecimiento mediante comparación con los datos experimentales de Pei et al. Esta modificación busca mejorar el ajuste del modelo y aportar una interpretación biológica más completa del microambiente tumoral.

2. Métodos y detalles teóricos

Usando el modelo propuesto por Pei et al. [7], el cual describe la dinámica de crecimiento tumoral y su interacción con el sistema inmune. Bajo los supuestos $K_S \approx S$ y $T \approx K_T$, el sistema original se reduce a una ecuación diferencial para el número de células cancerígenas $C(t)$:

$$\frac{dC}{dt} = rC \left(1 - \frac{C}{K}\right) - a_{Kt}C + \frac{\lambda_{ST}}{2}C, \quad (1)$$

donde r es la tasa intrínseca de crecimiento, K la capacidad de carga, a_{Kt} la tasa de eliminación por células T y λ_{ST} la estimulación mediada por la proteína β -catenina. Para conectar el modelo con los datos experimentales, se asume que el volumen tumoral $V(t)$ es proporcional a $C(t)$ bajo la suposición de densidad celular constante. Con el propósito de extender el modelo e incorporar el *efecto de campo carcinogénico*, se introduce una nueva ecuación para $\frac{dN}{dt}$, la cual describe la dinámica de las células normales pre-acondicionadas que influyen en el crecimiento de las células cancerígenas. La evolución de estas células depende tanto de su propia dinámica como de la interacción con las células tumorales.

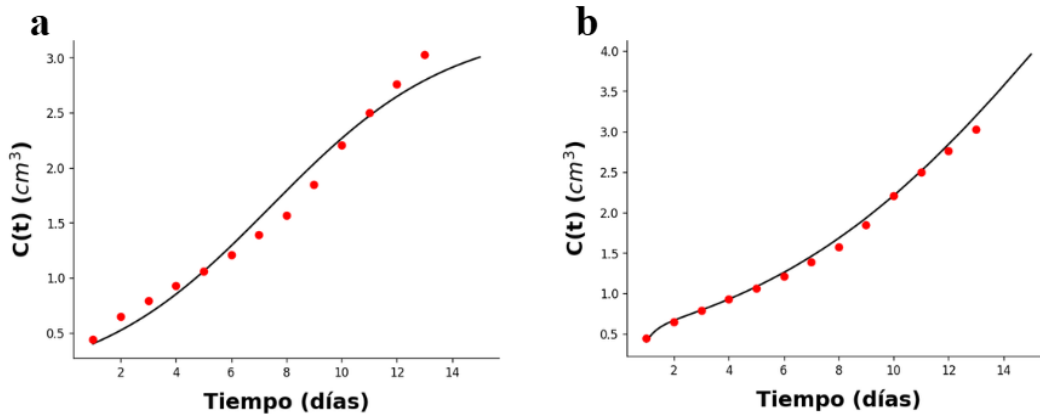


Figura 1: Crecimiento del cáncer de mama, donde las marcas rojas denotan datos experimentales de 13 días de crecimiento sin tratamiento y la línea negra continua muestra (a) el modelo de Pei et al. (adaptado de la Fig. 3 en Pei et al. [7], bajo licencia CC BY 4.0) y (b) el modelo introducido en este trabajo, donde se incorpora el *efecto de campo carcinogénico*.

Además, se añade el término $\lambda_N N$ en la ecuación de las células cancerígenas, el cual representa una vía adicional de proliferación basada en la interacción con células normales pre-acondicionadas

que han adquirido modificaciones premalignas. Esta aproximación permite capturar la progresión somática de las células, en la cual algunas desarrollan fenotipos asociados con la malignidad incluso antes de que el cáncer sea clínicamente evidente [3, 4].

De esta manera, el sistema acoplado queda definido como

$$\begin{cases} \frac{dN}{dt} = -\gamma N + \gamma' C, \\ \frac{dC}{dt} = rC \left(1 - \frac{C}{K}\right) - a_{Ki} C + \frac{\lambda_{ST}}{2} C + \lambda_N N, \end{cases} \quad (2)$$

La resolución numérica del sistema se implementó mediante el método de *Runge-Kutta* de orden 4(5) usando la función `solve_ivp` del paquete `scipy`. El ajuste de parámetros se realizó minimizando el *Error Cuadrático Medio (ECM)* entre los valores experimentales y simulados, empleando el algoritmo `basinhopping` de `scipy.optimize`.

3. Resultados y conclusiones

La incorporación del *efecto de campo carcinogénico* en el modelo permitió observar y validar matemáticamente que las células normales (pre-acondicionadas) ejercen una influencia directa sobre el crecimiento de las células cancerígenas. La Figura 1 muestra que el modelo, sin considerar el efecto de campo carcinogénico (a), no logra reproducir con precisión los datos experimentales, mientras que al incorporarlo (b) se obtiene un ajuste significativamente mejor. Esto valida tanto la estructura matemática del modelo como la relevancia biológica del efecto de campo en la progresión tumoral. Finalmente, desde una perspectiva biomédica, el comportamiento futuro del sistema dependerá de las condiciones iniciales, lo que abre la posibilidad de explorar distintos escenarios clínicos en cáncer de mama.

Referencias

- [1] M. ALAMIR, *Learning-based sensitivity analysis and feedback design for drug delivery of mixed therapy of cancer in the presence of high model uncertainties*, Journal of Theoretical Biology, **568** (2023):111508.
- [2] V. BITSOUNI AND V. TSILIDIS, *Mathematical modeling of tumor-immune system interactions: the effect of rituximab on breast cancer immune response*, Journal of Theoretical Biology, **539** (2022):111001.
- [3] K. CURTIUS, N. A. WRIGHT, AND T. A. GRAHAM, *An evolutionary perspective on field cancerization*, Nature Reviews Cancer, **18** (2018):9–32.
- [4] J. FERNANDEZ P., S. C. MÉNDEZ-SÁNCHEZ, C. GONZALEZ-CORREA, AND D. A. MIRANDA, *Could field cancerization be interpreted as a biochemical anomaly amplification due to transformed cells?*, Medical Hypotheses, **97** (2016):107–111.

- [5] D. A. MIRANDA AND S. PERTUZ, *Field cancerization in the understanding of parenchymal analysis of mammograms for breast cancer risk assessment*, Medical Hypotheses, **136** (2020):109511.
- [6] W. H. ORGANIZATION, *Global cancer burden growing amidst mounting need for services*, 2024. Accessed: Feb. 18, 2025.
- [7] Y. PEI, S. HAN, C. LI, J. LEI, AND F. WEN, *Data-based modeling of breast cancer and optimal therapy*, Journal of Theoretical Biology, **573** (2023):111593.
- [8] S. SAMANTA, S. SARKAR, AND K. KAYAL, *Cancer model and its possible control-a z-type control approach*, MethodsX, **13** (2024):102895.
- [9] D. P. SLAUGHTER, H. W. SOUTHWICK, AND W. SMEJKAL, “*Field cancerization*” in *oral stratified squamous epithelium. Clinical implications of multicentric origin*, Cancer, **6** (1953):963–968.
- [10] A. YIN, D. MOES, J. VAN HASSELT, J. SWEN, AND H. GUCHELAAR, *A review of mathematical models for tumor dynamics and treatment resistance evolution of solid tumors*, CPT Pharmacometrics Syst Pharmacol, **8** (2019):720–737. Epub 2019 Aug 9.

3.18 Modelado matemático de la propagación y control de la roya del café mediante ecuaciones diferenciales y escenarios de intervención

Oscar Andres Manrique Arias¹, Carlos Alberto Abello Muñoz²

Resumen

La roya del café (*Hemileia vastatrix*) es la principal enfermedad que amenaza la caficultura mundial, con efectos críticos en la productividad y sostenibilidad del cultivo. En esta charla se presenta un modelo compartimental basado en ecuaciones diferenciales ordinarias que describe la dinámica entre plantas susceptibles, infectadas y esporas en el ambiente. Se analiza el número básico de reproducción (R_0), los equilibrios del sistema y la sensibilidad de los parámetros clave en la propagación. Además, se muestran simulaciones en escenarios de control químico, biológico e integrado, que permiten evaluar su eficacia en la contención de la enfermedad. Este enfoque evidencia la utilidad del modelado matemático como herramienta para orientar estrategias de manejo sostenible de la roya del café.

Palabras & frases claves: : Roya del café, Modelado matemático, Ecuaciones diferenciales, Estrategias de control.

1. Introducción

El café constituye uno de los cultivos estratégicos más relevantes a nivel mundial, no solo por su importancia económica, sino también por el impacto social y cultural que genera en países productores como Colombia. Sin embargo, la caficultura enfrenta amenazas fitosanitarias significativas, entre las cuales la roya del café (*Hemileia vastatrix*) destaca como la enfermedad de mayor impacto. Este hongo afecta el follaje de la planta, reduce su capacidad fotosintética y, en consecuencia, disminuye drásticamente la productividad y calidad del grano, ocasionando pérdidas económicas sustanciales y poniendo en riesgo la sostenibilidad de comunidades altamente dependientes de este cultivo [8].

Diversos estudios han abordado el análisis de la roya desde perspectivas experimentales, epidemiológicas y computacionales, empleando herramientas que van desde modelos mecanicistas basados en datos climáticos [2] hasta enfoques con ecuaciones diferenciales y técnicas de redes complejas para capturar la dinámica espacial y la heterogeneidad de los sistemas agrícolas [5, 4]. Estos avances han mostrado que el modelado matemático constituye una herramienta esencial para comprender la propagación de la enfermedad, calcular umbrales epidemiológicos como el número básico de reproducción (R_0) y evaluar la eficacia de distintas estrategias de control.

En este marco, los modelos basados en ecuaciones diferenciales no lineales permiten representar formalmente las interacciones entre el huésped, el patógeno y el ambiente, mientras que los enfoques de redes complejas incorporan la dimensión espacial, capturando la conectividad entre parcelas y el

¹ Universidad del Quindío, Licenciatura en Matemáticas, Grupo de Modelación Matemática en Epidemiología - GMME. Correo: oamanrique@uniquindio.edu.co

² Universidad del Quindío, Licenciatura en Matemáticas, Grupo de Modelación Matemática en Epidemiología - GMME. Correo: caabello@uniquindio.edu.co

efecto de la estructura del paisaje en la transmisión. La integración de estas metodologías ofrece un marco robusto para simular escenarios de propagación, analizar la sensibilidad a distintos parámetros y evaluar intervenciones químicas, biológicas, genéticas y culturales de manera conjunta [1, 7].

2. Formulación del modelo matemático

Se formula un modelo determinista mediante ecuaciones diferenciales ordinarias para describir la dinámica de propagación del hongo *Hemileia vastatrix*, agente causal de la roya del café. Este modelo se enmarca en un esquema epidemiológico tipo *SI* (Susceptibles-Infectados), el cual evoluciona a lo largo del tiempo t . El modelo permite describir, en términos de concentración promedio, el número de plantas susceptibles al hongo $S = S(t)$, el número de plantas infectadas $I = I(t)$ y la densidad de esporas viables del hongo presentes en el ambiente $E = E(t)$, incorporando tanto la dinámica de salud de las plantas como el componente ambiental del patógeno. Este enfoque permite modelar de manera integral la dinámica poblacional de las plantas, así como el papel del ambiente en la transmisión del hongo.

Las variables y parámetros se describen a continuación:

Cuadro 1: Descripción de variables, parámetros y los valores usados en la simulación, con su respectiva referencia.

Sim.	Descripción	Valor	Rango
S	Número promedio de plantas sanas	5000	[1000 – 5000]
I	Número promedio de plantas infectadas	10	[10 – 50]
E	Número promedio de esporas en el ambiente	1000	[1000 – 1500]
r	Número promedio de nuevas plantas sanas (siembra)	100 día ⁻¹	[10 – 150]
β	Tasa de infección (contacto planta - esporas)	0,001 día ⁻¹	[0,001 – 0,005]
γ	Tasa de remoción de plantas infectadas	0,5 día ⁻¹	[0 – 1]
μ	Tasa de degradación de esporas viables en el ambiente	0,05 día ⁻¹	[0,01 – 0,1]
σ	Tasa de producción de esporas por plantas infectadas	0,2 día ⁻¹	[0 – 0,5]
δ	Tasa de muerte natural de las plantas	0,01 día ⁻¹	[0,005 – 0,2]
δ_1	Tasa de mortalidad por infección de las plantas	0,3 día ⁻¹	[0 – 0,5]

* Unidad de medida día⁻¹ es equivalente a **cada día**.

El sistema dinámico que describe la transmisión de la roya del café está dado por:

$$\begin{cases} \dot{S} &= r - \beta ES - \delta S \\ \dot{I} &= \beta ES - (\gamma + \delta + \delta_1)I \\ \dot{E} &= \sigma I - \mu E, \end{cases} \quad (1)$$

3. Formulación del modelo con control

Con el objetivo de evaluar estrategias de manejo integrado que contribuyan a mitigar la propagación de la roya del café, se incorporan al modelo (1) dos controles constantes que representan intervenciones fitosanitarias comúnmente utilizadas en los sistemas de producción cafetera. El primer control

corresponde a una intervención de tipo químico, representada por el parámetro c_1 , que hace referencia a la aplicación de fungicidas, como el *oxicloruro de cobre*, cuya acción se refleja en un aumento de la inviabilidad o degradación de las esporas viables del hongo presentes en el ambiente. Este efecto se incorpora en el modelo mediante una modificación en el término de remoción de esporas, representado por $(\mu + c_1)E$ en la ecuación correspondiente a la dinámica de $E(t)$. Por otro lado, el segundo control es una intervención de tipo biológico representada por el parámetro c_2 , que modela la fracción de plantas resistentes resultado del uso de tratamientos, por ejemplo, la aplicación de la bacteria *Bacillus thuringiensis*, dicho control reduce la proporción de plantas efectivamente susceptibles al hongo; este efecto se incorpora mediante la expresión $(1 - c_2)\beta S E$. De este modo, la dinámica de las variables $S(t)$ e $I(t)$ contemplan únicamente el subgrupo de plantas susceptibles a la infección.

4. Resultados

4.1. Número básico de reproducción

El número básico de reproducción, denotado R_0 , es un umbral epidémico de una enfermedad en el proceso de infección, representa *el número de plantas susceptibles que son infectadas a través del contacto con esporas producidas a partir de una planta infectada*. Para el modelo descrito, el R_0 se define como:

$$R_0(c_1, c_2) = \frac{(1 - c_2)\beta \sigma r}{\delta(\mu + c_1)(\gamma + \delta_1 + \delta)}$$

4.2. Puntos de equilibrio y análisis de estabilidad local

El sistema (1) presenta un punto de equilibrio libre de infección dado por $E_0 = \left(\frac{r}{\delta}, 0, 0\right)$, el cual es local y asintóticamente estable si $R_0 < 1$ y otro equilibrio en presencia de infección si $R_0 > 1$,

$$E_1 = \left(\frac{\mu r}{\beta \sigma \hat{I}_1 + \delta \mu}, \hat{I}_1, \frac{\sigma \hat{I}_1}{\mu}\right), \quad (2)$$

donde, $\hat{I}_1 = \frac{r}{\gamma + \delta + \delta_1} - \frac{\delta \mu}{\beta \sigma}$.

4.3. Estrategia de control integrado

Con el fin de controlar la enfermedad, se establece una región de pares ordenados de c_1 y c_2 tal que el control conjunto sea suficiente para contener la enfermedad. A continuación se presentan algunos pares representativos $(c_2, c_1^{\min})$,

c_2	0.00	0.10	0.20	0.30	0.40	0.50	0.60	0.70	0.77
$c_1^{\min}$	0.172	0.15	0.127	0.105	0.083	0.061	0.038	0.016	0

Cuadro 2: Valores mínimos de c_1 en función de c_2 para asegurar que $R_0 < 1$

Referencias

- [1] ANDERSON, R. M., & MAY, R. M., *Infectious diseases of humans: Dynamics and control*. Oxford University Press, 1991.
- [2] BEBBER, D. P., CASTILLO, A. D., & GURR, S. J., *Modelling coffee leaf rust risk in Colombia with climate reanalysis data*. Philosophical Transactions of the Royal Society B: Biological Sciences, **371**(1709) (2016):20150458. <https://doi.org/10.1098/rstb.2015.0458>
- [3] GAVITO, M. J. C., *Sistema inteligente para detección temprana de la roya en cafetales* Tesis de maestría, Universidad Autónoma de Querétaro, 2019.
- [4] HERSKOWITZ, Y., BUNIMOVICH-MENDRAZITSKY, S., & LAZEBNIK, T., *Mathematical model of coffee tree's rust control using snails as biological agents*. BioSystems, 229, 104916. (2023). <https://doi.org/10.1016/j.biosystems.2023.104916>
- [5] MONTOYA-RESTREPO, E. C., & SIERRA-SANZ, C. A., *Desarrollo matemático e implantación del modelo de simulación de la roya del cafeto en Colombia*. Cenicafé, **44**(2) (1993):56–67.
- [6] MONTOYA-RESTREPO, E. C., & SIERRA-SANZ, C. A., *Modelamiento de la dinámica de la roya del cafeto bajo condiciones colombianas*. Revista U.D.C.A Actualidad & Divulgación Científica, **23**(1) (2020):1–10. <https://doi.org/10.31910/rudca.v23.n1.2020.1642>
- [7] PASTOR-SATORRAS, R., CASTELLANO, C., VAN MIEGHEM, P., & VESPIGNANI, A., *Epidemic processes in complex networks*. Reviews of Modern Physics, **87**(3) (2015):925–979. <https://doi.org/10.1103/RevModPhys.87.925>
- [8] SAMBONY, E. G. L., *Detección de condiciones favorables para la ocurrencia de enfermedades y plagas en el café basada en similitud de grafos*. Tesis de maestría, Universidad del Cauca, 2017.

3.19 Modelo Matemático de Coinfección VIH-VHB en Población Humana

Cristian Camilo Espitia Morillo¹

Resumen

Esta investigación presenta un modelo preliminar de coinfección entre VIH/SIDA y VHB (Virus de la Hepatitis B) en la población humana, considerando la transmisión vertical y el contacto con fluidos corporales. El modelo de VIH/SIDA está basado en el trabajo de Pacazuca [1]. Basándose en estudios previos de Bowong [2, 3], Endashaw [4] y Mayanja [5], el objetivo es analizar la dinámica poblacional de las enfermedades, incluyendo los efectos del tratamiento antirretroviral. El modelo asume que los individuos pueden estar infectados con uno o ambos virus, y que el tratamiento puede suprimir la replicación viral. Se evalúan estrategias de control de la coinfección y el impacto de la adherencia al tratamiento en la progresión de la enfermedad.

Palabras & frases claves: Virus de Inmunodeficiencia Humana, Virus de Hepatitis B, Modelos Epidemiológicos de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias.

1. Introducción

El virus de inmunodeficiencia humana (VIH) ataca el sistema inmunológico del infectado, particularmente las células linfocitos T CD4 los cuales son los encargados de defender al cuerpo ante cualquier infección. De esta manera se disminuye progresivamente la capacidad del organismo para combatir infecciones y enfermedades. Si este virus no es tratado, la infección evoluciona en el síndrome de inmunodeficiencia adquirida (SIDA) donde aparecen infecciones oportunistas y ciertos tipos de cáncer que el cuerpo es incapaz de combatir ocasionando la muerte del paciente [7].

2. Modelo Matemático de Coinfección

Para la dinámica de coinfección, se propone un modelo de ecuaciones diferenciales ordinarias donde las variables del modelo incluyen $S(t)$ para individuos susceptibles, $S_c(t)$ para niños susceptibles, $I_{cH}(t)$ para niños con VIH, $I_H(t)$ para adultos infectados con VIH, $I_{BH}(t)$ para adultos coinfectados con VIH y VHB, $I_B(t)$ para adultos infectados con VHB, $I_{cB}(t)$ para niños infectados con VHB, $T_H(t)$ para individuos tratados por VIH, $T_{HB}(t)$ para individuos tratados por ambas infecciones (VIH y VHB), $T_B(t)$ para individuos tratados por VHB, $A(t)$ para individuos con SIDA y $V(t)$ para individuos con supresión viral. Además del cumplimiento de las siguientes hipótesis:

- H1** Se considera individuos susceptibles tanto a VHI como VHB, las personas adultas se contagian de forma sexual y por intercambio de fluidos corporales en cualquier etapa de la vida.
- H2** Las madres no infectadas ni de VIH ni de VHB dan a luz niños susceptibles, se considera la posibilidad de que un porcentaje de madres coinfectadas puedan aportar niños susceptibles.

¹Universidad de los Llanos. Correo: cristian.espitia@unillanos.edu.co

- H3** Los niños se infectan de VIH únicamente por transmisión vertical, mientras que los mismos se infectan de VHB de forma vertical y horizontal por intercambio de fluidos corporales.
- H4** Las personas infectadas con VIH pueden contagiarse de VHB y recíprocamente.
- H5** Las personas infectadas de VIH pueden o no seguir un tratamiento con antirretrovirales, en caso de no seguir un tratamiento desarrollan el síndrome SIDA. Mientras que las personas infectadas únicamente con VHB siguen un tratamiento.
- H6** Una persona coinfectada puede ser tratada con antiretrovirales para conseguir supresión viral o no ser tratada y desarrollar SIDA.
- H7** Se considera que los tratados, personas viviendo con SIDA o quienes han conseguido supresión viral tienen una vida sexual inactiva.
- H8** El tratamiento con antirretrovirales para VIH y VHB en niños y adultos es el mismo.
- H9** Las personas tratadas de VIH pueden desarrollar SIDA debido a fallas del tratamiento. De igual forma personas coinfectas.
- H10** Las personas tratadas únicamente de VHB, una proporción de personas coinfectadas y algunos tratados de VIH consiguen supresión viral.
- H11** Existe mortalidad natural en todas las clases y mortalidad adicional inducida por SIDA.

Las simulaciones numéricas del modelo matemático fueron realizadas mediante el método de Runge-Kutta de cuarto orden, se presentan en la figura 1. El diagrama del sistema se muestra en la figura 2.

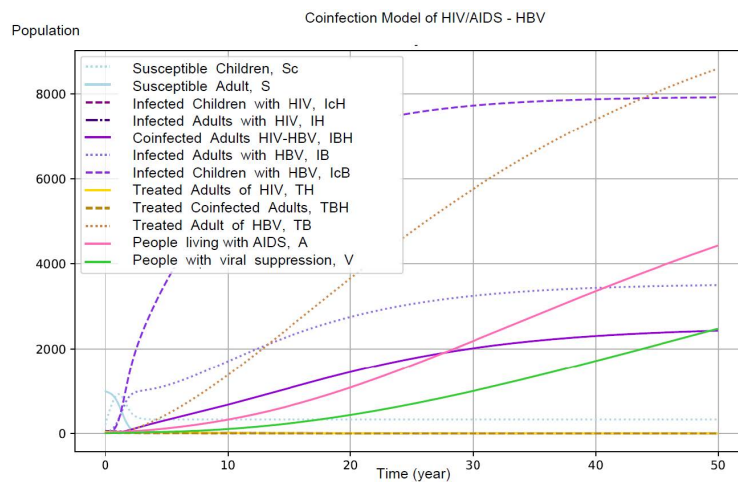


Figura 1: Simulaciones numéricas en el modelo de coinfección.

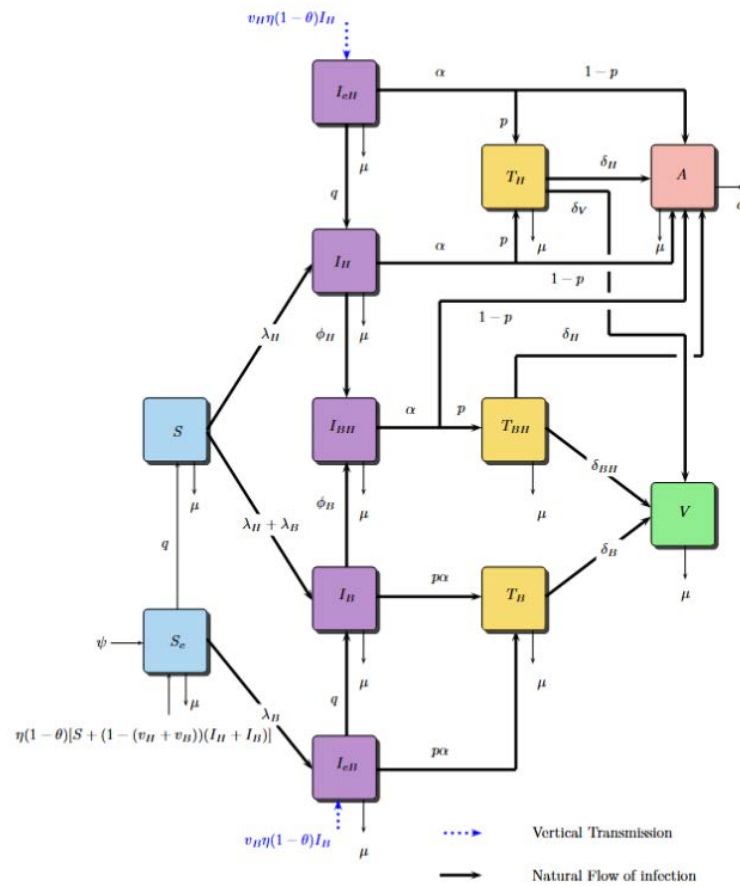


Figura 2: Diagrama del modelo de coinfección.

Referencias

- [1] PACAZUCA SANTIAGO, J. F. ESPITIA CRISTIAN, C., *Población adulta e infantil en la dinámica de la infección: un modelo matemático para VIH/SIDA*, Trabajo de tesis de pregrado, Universidad de los Llanos, 2023.
- [2] BOWONG, S. KAMGANG, J. C. TEWA, J. J. TSANOU, B., *Modelling and analysis of hepatitis B and HIV co-infections*, Proceedings of the 10th African Conference on Research in Computer Science and Applied Mathematics, 2010.
- [3] BOWONG, S. KURTHS, J., *Modelling Tuberculosis and Hepatitis B Coinfections*. Math. Model. Nat. Phenom. **5**(6) (2010):196–242.DOI: 10.1051/mmnp/20105610
- [4] ENDASHAW, E. E, MEKONNEN, T. T., *Modelling the effect of vaccination and treatment on the transmission dynamics of Hepatitis B virus and HIV/AIDS coinfection*. J. Appl. Math. **2022** (2022):5246762. DOI: 10.1155/2022/5246762.
- [5] MAYANJA, E. LUBOOBI, L. KASOZI, J, NSUBANGA, R., *Mathematical Modelling of HIV-HCV Coinfection Dynamics in Absence of Therapy*. Comput. Math. Methods Med. **2020** (2020):2106570. DOI: 10.1155/2020/2106570.
- [6] WORLD HEALTH ORGANIZATION. *Hepatitis B vaccinations and prophylaxis*. 2023. Disponible en: <https://www.who.int/news-room/fact-sheets/detail/hepatitis-b>.
- [7] WORLD HEALTH ORGANIZATION. *VIH/SIDA*. 2023. Disponible en: <https://www.who.int/es/news-room/fact-sheets/detail/hiv-aids>. Accedido el 12 de junio de 2025.

3.20 Modelos doblemente degenerados de taxis de nutrientes: aplicaciones biológicas en la migración de *Bacillus subtilis* en agares pobres en nutrientes

J. P. Barrera-Cardozo¹, D. A. Rueda-Gómez²

Resumen

En esta ponencia se estudia un modelo de taxis de nutrientes doblemente degenerado que describe la migración y agregación de colonias de *Bacillus subtilis* en medios con baja concentración de nutrientes. Este modelo constituye una extensión del sistema clásico de Keller-Segel, al incorporar términos de difusión y quimiotaxis dependientes de la densidad bacteriana y de la disponibilidad de nutrientes. Tales términos degenerados permiten capturar fenómenos de autoorganización característicos observados experimentalmente. El análisis se centra en las propiedades fundamentales del sistema (positividad, conservación de la masa y estabilidad en energía) y en el diseño de esquemas numéricos de elementos finitos que las preserven a nivel discreto. Finalmente, se presentan perspectivas sobre la simulación computacional de patrones biológicos emergentes asociados al modelo doblemente degenerado.

Palabras & frases claves: *Bacillus subtilis*, taxis de nutrientes, difusión degenerada, estabilidad en energía, elementos finitos.

1. Introducción

La generación de patrones en sistemas biológicos es un fenómeno ampliamente estudiado en contextos que incluyen la organización de colonias bacterianas en respuesta a estímulos ambientales. En particular, el proceso de quimiotaxis permite describir la migración dirigida de microorganismos hacia regiones con mayor concentración de nutrientes. Modelos matemáticos como el de Keller-Segel han sido fundamentales para comprender la dinámica de agregación celular; sin embargo, presentan limitaciones frente a escenarios donde los recursos son escasos.

En este contexto, surgen modelos de taxis de nutrientes doblemente degenerados, que incorporan mecanismos no lineales de difusión y consumo dependientes de la densidad bacteriana y la concentración de nutrientes, proporcionando un marco más realista para describir la migración de *Bacillus subtilis* en agares pobres en nutrientes.

2. Modelos matemáticos de taxis de nutrientes

El modelo de Keller-Segel constituyó un hito en la comprensión de la quimiotaxis. Sin embargo, su formulación clásica predice en algunos casos concentraciones no realistas (blow-up en tiempo finito). Para abordar estas limitaciones, se han desarrollado modelos avanzados que incorporan difusión y taxis degenerados, en los cuales la intensidad del movimiento depende tanto de la densidad bacteriana como de la disponibilidad local de nutrientes.

¹Universidad Industrial de Santander. Correo: juan2248059@correo.uis.edu.co

²Universidad Industrial de Santander. Correo: diaruego@uis.edu.co

Es por eso que se considera el siguiente sistema:

$$\begin{cases} u_t = \nabla \cdot (uv \nabla u) - \nabla \cdot (u^p v \nabla v) + f(u, v), & x \in \Omega, t > 0, \\ v_t = \Delta v - uv, & x \in \Omega, t > 0, \end{cases} \quad (1)$$

con $1 \leq p \leq 2$, donde u es la densidad bacteriana y v la concentración de nutrientes. Para ciertas formas particulares de la función $f(u, v)$ este sistema posee propiedades esenciales: positividad, conservación de masa (para el caso $1 < p \leq 2$) y leyes de energía dependientes de p .

3. Resultados

En este trabajo se presentan algunos esquemas numéricos basados en el método de elementos finitos, diseñados para preservar, a nivel discreto, las propiedades estructurales del modelo doblemente degenerado de taxis de nutrientes mencionadas anteriormente. En particular, se logró:

- Garantizar la positividad de las soluciones numéricas.
- Mantener la conservación de la masa total.
- Obtener simulaciones que reproducen de forma cualitativa el comportamiento físico esperado de las soluciones.

El estudio de modelos doblemente degenerados de taxis de nutrientes plantea diversos desafíos analíticos y numéricos, particularmente en la construcción de soluciones débiles y en la estabilidad de los esquemas discretos. Este trabajo busca aportar herramientas numéricas que permitan avanzar en la comprensión de dichos modelos y en la exploración de su dinámica mediante simulaciones computacionales.

Referencias

- [1] E. F. Keller, L. A. Segel. *Model for chemotaxis*. J. Theor. Biol. **30**(2) (1971):225–234.
- [2] R. Plaza. *Derivation of a bacterial nutrient-taxis system with doubly degenerate cross-diffusion as the parabolic limit of a velocity-jump process*. J. Math. Biol. **78** (2019):1681–1711.
- [3] G. Li. *Large-data global existence in a higher-dimensional doubly degenerate nutrient system*. J. Differential Equations. **329** (2022):318–347.
- [4] X. Pan. *Superlinear degradation in a doubly degenerate nutrient taxis system*. Nonlinear Anal. Real World Appl. **77** (2024):104040.
- [5] F. Guillén-González, M. A. Rodríguez-Bellido, D. A. Rueda-Gómez. *Unconditionally energy stable fully discrete schemes for a chemo-repulsion model*. Math. Comp. **88** (2019):2069–2099.

3.21 Resolviendo el misterio de patrones de pigmentación en los pétalos de tulipanes rotos a través de un modelo matemático de ecuaciones en derivadas parciales

Gustavo Carrero¹, Aidan Wong, Thomas Hillen

Resumen

Los pétalos de los tulipanes “rotos”, infectados con el virus de la ruptura del tulipán (TBV, por sus siglas en inglés), exhiben patrones hermosos de rayas en su pigmentación. En el siglo XVII, la belleza de estos tulipanes provocó la famosa Tulipomanía, un aumento irracional en el precio de los bulbos de tulipán. En esta ponencia, presentamos un modelo matemático que ofrece una explicación dinámica para la formación de patrones de pigmentación en los pétalos de tulipán infectados por el TBV. El modelo, publicado a principios de este año [1], consiste en un sistema de ecuaciones diferenciales parciales que describe la interacción entre el virus de la ruptura del tulipán, el sustrato necesario para su replicación y el pigmento antocianina. Mostraremos cómo el desarrollo de patrones espaciales resulta de combinar los mecanismos de inestabilidad de Turing y de información posicional de Wolpert, e incorporaremos estas dinámicas en un dominio espacial cambiante con el fin de simular la formación de patrones de pigmentación en un pétalo en crecimiento.

Palabras & frases claves: Tulipanes rotos, mecanismo de inestabilidad de Turing, mecanismo de información posicional de Wolpert.

1. Introducción

Los pétalos de las flores muestran colores vivos y patrones hermosos. Aunque parezca sorprendente, algunos de estos patrones en los tulipanes “rotos” son causados por una infección viral: el virus de la ruptura del tulipán (TBV), que ocasiona una “ruptura” en el color, generando así patrones de rayas en los pétalos.

Los tulipanes llegaron a Holanda desde Turquía a finales del siglo XVI. Carolus Clusius, botánico neerlandés, fue quien los introdujo en jardines holandeses, y observó que algunos presentaban rayas en sus pétalos, pero eran más débiles y difíciles de reproducir, lo que lo llevó a sospechar que estaban enfermos [2]. Durante la Tulipomanía en el siglo XVII, estos tulipanes rayados alcanzaron precios exorbitantes, convirtiéndose en símbolo de la primera burbuja financiera documentada [3, 4, 5]. Aunque ya se sabía que la enfermedad podía transmitirse por áfidos, no fue hasta 1928 que se identificó al TBV como responsable de los patrones [6], tras el descubrimiento del primer virus identificado, el virus del mosaico del tabaco (TMV) en 1892 [7].

El mecanismo mediante el cual el virus causa estos patrones ha sido un misterio. Karin Moelling lo planteó como un problema abierto, preguntándose si el virus podría ser un inhibidor o un activador en el sentido de Alan Turing, quien propuso en 1952 que dos sustancias químicas (activador e inhibidor) que se difunden y reaccionan podían generar patrones [8].

¹ Athabasca University, Canadá. Correo: gustavoc@athabascau.ca

Los patrones espaciales en biología han sido explicados por dos mecanismos principales: la inestabilidad de Turing [8] y el modelo de detección de gradientes de Wolpert [9]. Aunque distintos, se ha demostrado en el siglo XXI que ambas pueden trabajar en unísono en la formación de patrones espaciales. Otro reto es incorporar el crecimiento del dominio espacial (por ejemplo, la piel animal), lo cual fue abordado por Crampin et al. [10].

El modelo propuesto para explicar la formación de patrones en los pétalos de tulipanes rotos combina el mecanismo de detección de gradientes de Wolpert y la inestabilidad de Turing en un dominio en crecimiento. Utilizamos un sistema de ecuaciones diferenciales parciales (EDPs) para describir la interacción entre la infección viral, el uso de recursos para la replicación, y la expresión genética del pigmento antocianina. Estas dinámicas están incorporadas en el dominio del pétalo creciente de un tulipán, lo que nos permite predecir la formación de patrones a rayas en los tulipanes rotos.

2. El modelo TBV del virus de la ruptura del tulipán

Para el desarrollo del modelo, consideramos tres componentes de un pétalo de tulipán infectado por el virus TBV: el pigmento, representado por la concentración de antocianina $T(x, t)$, la concentración viral $V(x, t)$, y los recursos virales o sustrato (necesario para la replicación viral), representado por la variable $B(x, t)$. Los componentes virales y el sustrato se difunden a lo largo de un dominio espacial $[0, L(t)]$, el cual crece en el tiempo conforme lo hace la planta; sin embargo, la antocianina no se difunde pues ella es transportada tras su síntesis hacia las vacuolas para su almacenamiento. De esta manera, el modelo propuesto que describe la dinámica espacio-temporal y las reacciones biológicas entre estos tres compontes es el siguiente,

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \underbrace{\left(\frac{1}{1+r_0V}\right)\rho_0}_{\text{síntesis}} - \underbrace{\delta_T T}_{\text{descomposición}} + \underbrace{\frac{\rho_T T^2}{k_T^2 + T^2}}_{\text{autoregulación del pigmento}}, \quad (1)$$

$$\frac{\partial B}{\partial t} = D_B \frac{\partial^2 B}{\partial x^2} + \underbrace{\sigma \left(1 - \frac{B}{K_B}\right) B}_{\text{producción de sustrato}} - \underbrace{\rho_B V^2 B}_{\text{consumo de sustrato}} \quad (2)$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} = D_V \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \underbrace{\rho_V \left(\frac{1}{1+r_T T}\right) V^2 B}_{\text{producción viral}} - \underbrace{\gamma V}_{\text{descomposición}}, \quad (3)$$

en un dominio $[0, L(t)]$ (que cambia a través del tiempo) con condiciones de contorno de Neumann homogéneas.

La producción y degradación de la antocianina T en la ecuación (1) están basadas en el modelo de Wolpert, que describe un mecanismo simple para activar un gen dependiendo del nivel de concentración a lo largo de un gradiente. El parámetro ρ_0 denota una constante proporcional a la señal que activa los genes responsables de la biosíntesis de T . Dado que la presencia del virus reduce la biosíntesis de antocianina, esta constante se reduce mediante un factor $(1+r_0V)^{-1}$. El parámetro δ_T denota la degradación natural de la antocianina. El último término de la ecuación (1) describe un

mecanismo simple de autorregulación de la antocianina, donde ρ_T denota la tasa de crecimiento, que se reduce a la mitad cuando $T = k_T$. En ausencia del virus ($V = 0$), el tulipán regula naturalmente la concentración de antocianina hacia un valor homeostático homogéneo y constante.

Para la ecuación del sustrato (2), utilizamos un modelo de crecimiento logístico simple con tasa de crecimiento σ y capacidad de carga K_B . Dado que la replicación viral es proporcional al consumo de sustrato y tiene naturaleza cooperativa, la interacción viral cooperativa aparece tanto en el término de consumo de sustrato en la ecuación (2) como en el término de producción del virus en la ecuación (3). Este último término se reduce mediante un factor $(1 + r_T T)^{-1}$ para reflejar las propiedades antivirales de la antocianina. El virus se degrada de forma natural a una tasa γ . Finalmente, modelamos la movilidad del virus y del sustrato con procesos de difusión, donde $D_B \gg D_V$.

Logramos demostrar la formación de patrones espaciales del pigmento en los pétalos de los tulipanes rotos a través de un análisis de la acción conjunta de un mecanismo de inestabilidad de Turing [8] dado por las ecuaciones (2-3) y un mecanismo de detección de gradientes de Wolpert [9] dado por la ecuación (1), y la adaptación de las técnicas desarrolladas por Crampin et al. [10] para describir la dinámica espacio-temporal del sistema de ecuaciones en derivadas parciales sobre el dominio espacial del pétalo en crecimiento.

Referencias

- [1] WONG, A.A., CARRERO, G., HILLEN, T., *How the tulip breaking virus creates striped tulips*. Communications Biology. **8** (2025):129. <https://doi.org/10.1038/s42003-025-07507-z>
- [2] LESNAW, J., GHABRIAL, S., *Tulip breaking: past, present, and future*. Plant Disease. **84** (2000):1052–1060. <https://doi.org/10.1094/PDIS.2000.84.10.1052>
- [3] THOMPSON, E.A., *The tulipmania: Fact or artifact?*. Public Choice. **130** (2007):99–114. <https://doi.org/10.1007/s11127-006-9074-4>
- [4] MOELLING, K., *Tulipomania - the first financial crisis by viruses*. Revue Roumaine de Chimie. **61** (2016):637–645.
- [5] AFILIPOAEI, A., CARRERO, G., *A mathematical model of financial bubbles: A behavioral approach*. Mathematics. **11**(19) (2023):4102. <https://doi.org/10.3390/math11194102>
- [6] DUBOS, R., *Tulipomania and the Benevolent Virus*. Perspectives in Virology Vol.301. John Wiley and Sons, New York, 1959.
- [7] ZAITLIN, M., *The Discovery of the Causal Agent of the Tobacco Mosaic Disease*. In: Discoveries in Plant Biology. Chap. 7, pp. 105–110. World Scientific, 1998.
- [8] TURING, A., *The chemical basis of morphogenesis*. Philosophical Transactions of the Royal Society B. **237** (1952):37–72. <https://doi.org/10.1098/rstb.1952.0012>
- [9] LEWIS, J., SLACK, J., WOLPERT, L., *Thresholds in development*. Journal of Theoretical Biology. **65**(3) (1977):579–590.
- [10] CRAMPIN, E.J., GAFFNEY, E.A., MAINI, P.K., *Reaction and diffusion on growing domains scenarios for robust pattern formation*. Bulletin of Mathematical Biology **61**(6) (1999):1093–1120.

3.22 Singularidades Degeneradas de Sistemas de Filippov

Oscar Alexander Ramírez Cespedes¹

Resumen

En esta charla se presenta un estudio sobre la estructura local de singularidades two-fold degeneradas en sistemas de Filippov tridimensionales. Nos enfocamos en caracterizar el comportamiento de singularidades 1 y 2-degeneradas, demostrando la existencia de variedades invariantes foliadas por órbitas de cruce que emanan de estas singularidades.. Adicionalmente, ilustramos la aplicabilidad de estos hallazgos teóricos mediante su implementación en el análisis de un circuito electrónico, donde se observa la emergencia de comportamientos complejos, incluyendo escenarios caóticos.

Palabras & frases claves: Sistemas de Filippov, singularidades degeneradas, bifurcaciones.

1. Introducción

Los sistemas dinámicos suaves a trozos (PSDS, por sus siglas en inglés) han sido ampliamente utilizados para modelar fenómenos físicos que presentan discontinuidades en su movimiento [1], lo que ha convertido a esta área de investigación en un tema de gran interés durante los últimos años. Los avances recientes muestran que contamos con una comprensión razonable de los PSDS planares, aunque aún persisten varias preguntas abiertas. De hecho, el entendimiento teórico de los PSDS tridimensionales no está completamente desarrollado debido a la gran cantidad de complicaciones que surgen en este contexto.

La convención de Filippov [2] es uno de los enfoques más útiles para definir la noción de soluciones de un PSDS con una variedad de conmutación Σ regular, dada la gran cantidad de aplicaciones prácticas que la utilizan [3-6]. En este marco, ciertas singularidades ubicadas en Σ , conocidas como Σ -singularidades, juegan un papel crucial en la comprensión de la dinámica de un PSDS, y su caracterización es el punto de partida para construir una teoría sólida.

En el caso de los PSDS planares, las Σ -singularidades han sido extensamente estudiadas en [7] y en las referencias allí citadas, y la caracterización de las Σ -singularidades de codimensión 0 y 1 ha sido completamente entendida. Por el contrario, en dimensión 3, comprender el comportamiento de los PSDS alrededor de una Σ -singularidad resulta considerablemente más complejo. De hecho, la caracterización de las Σ -singularidades genéricas ha demandado más de 30 años de investigación exhaustiva. En [8-11], los autores han aportado información sobre la estructura local alrededor de algunas Σ -singularidades 3D mediante el estudio de modelos que capturan la mayor parte del comportamiento general; en particular, la caracterización de la dinámica alrededor de una de ellas, llamada singularidad de Teixeira o T -singularidad, ha representado un gran desafío.

En términos generales, una T -singularidad $p \in \Sigma$ surge en un sistema de Filippov tridimensional $Z = (X, Y)$ cuando ambos campos vectoriales X e Y tienen un contacto cuadrático invisible (o contacto de fold) a lo largo de dos curvas, S_X y S_Y , con la variedad de conmutación Σ , y S_X intersecta transversalmente a S_Y en p . El comportamiento local alrededor de una T -singularidad fue uno de

¹Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Correo: osaramirez@udistrital.edu.co

los aspectos faltantes clave para caracterizar las singularidades de codimensión 0 en dimensión 3. Recientemente, este problema fue resuelto en [12], donde se estableció la descripción del comportamiento alrededor de una T -singularidad, así como la caracterización de los sistemas estructuralmente estables localmente.

Uno de los aspectos más importantes para caracterizar el comportamiento alrededor de una T -singularidad es la transversalidad de las curvas S_X y S_Y en p . Cuando esta condición se viola, se produce una degeneración en el contacto de los folds en p , dando lugar a bifurcaciones que dependen del orden k de dicho contacto; en este caso, nos referimos a p como un two-fold k -degenerado. En [13], los autores estudian la estabilidad asintótica de algunos two-folds k -degenerados y proporcionan formas normales topológicas para un PSDS alrededor de dicha singularidad. En [14-16], se presenta un estudio sobre las bifurcaciones de una singularidad two-fold 1-degenerada.

Recientemente, en [18] hemos profundizado en la estructura local de las singularidades de Teixeira degeneradas en sistemas de Filippov 3D. Más exactamente, caracterizamos el comportamiento de un PSDS en una singularidad two-fold 1-degenerada y establecemos también el comportamiento local alrededor de una singularidad two-fold 2-degenerada. En ambos casos, demostramos la existencia de variedades invariantes foliadas por órbitas de cruce que emanan de dicha singularidad, lo cual no había sido estudiado en [13] y que se comporta de manera análoga a los llamados diablos que emergen de una T -singularidad. Además, caracterizamos genéricamente la dinámica de deslizamiento local alrededor de cualquier singularidad two-fold k -degenerada.

Finalmente, también aplicamos los resultados obtenidos en este trabajo al comportamiento de un circuito electrónico, demostrando la utilidad de esta teoría para comprender problemas reales. Los resultados teóricos y aplicados de este artículo constituyen una extensión natural de los temas abordados en [13-16] y proporcionan un escenario real donde fenómenos complejos, como las conexiones heteróclinas de cruce entre T -singularidades, surgen en bifurcaciones locales. Cabe destacar que este tipo de conexiones entre T -singularidades puede dar lugar a escenarios caóticos como el considerado en [17], por lo que este trabajo también ofrece un modelo simple que ilustra dichos resultados.

2. Estructura de la presentación

1. Fundamentos teóricos de sistemas de Filippov 3D

- Revisión de la convención de Filippov y singularidades en la variedad de conmutación Σ .
- Caracterización de T -singularidades y su rol en la dinámica no suave.

2. Análisis de *two-folds* degenerados

- Estudio de condiciones de transversalidad y degeneración en curvas S_X y S_Y .
- Clasificación de bifurcaciones según el orden k de degeneración.

3. Resultados principales

- Existencia de variedades invariantes foliadas por órbitas de cruce en singularidades 1 y 2-degeneradas.
- Dinámica de deslizamiento local y su generalización para k -degeneraciones.

- Conexiones heteróclinas entre T-singularidades y su impacto en la emergencia de caos.

4. Aplicaciones y validación experimental

- Implementación en un circuito electrónico para observar fenómenos teóricos.
- Discusión de relevancia en modelado de sistemas físicos con discontinuidades.

Referencias

- [1] M. DI BERNARDO, C. BUDD, A. R. CHAMPNEYS, P. KOWALCZYK, *Piecewise-smooth Dynamical Systems Theory and Applications*. Springer-Verlag, 2008.
- [2] A. F. FILIPPOV, *Differential equations with discontinuous righthand sides*. Kluwer, 1988.
- [3] R. CRISTIANO, D. J. PAGANO, L. BENADERO, E. PONCE, *Bifurcation analysis of a DC-DC bidirectional power converter operating with constant power load*. International Journal of Bifurcation and Chaos. **26**(4) (2016):18.
- [4] R. CRISTIANO, D. S. RODRIGUES, T. DE CARVALHO, D. J. TONON, *Global analysis of a piecewise smooth epidemiological model of COVID-19*. Nonlinear Dynamics. **105** (2021):3763–3773.
- [5] H. DE JONG, J.-L. GOUZÉ, C. HERNANDEZ, M. PAGE, T. SARI, J. GEISELMANN, *Qualitative simulation of genetic regulatory networks using piecewise-linear models*. Bulletin of Mathematical Biology. **66**(2) (2004):301–340.
- [6] D. S. RODRIGUES, P. F. A. MANCERA, T. DE CARVALHO, L. F. GONÇALVES, *Sliding mode control in a mathematical model to chemoimmunotherapy: The occurrence of typical singularities*. Applied Mathematics and Computation. **387** (2020):124782.
- [7] M. GUARDIA, T. M. SEARA, M. A. TEIXEIRA, *Generic bifurcations of low codimension of planar Filippov Systems*. Journal of Differential Equations. **250**(4) (2011):1967–2023.
- [8] A. COLOMBO, M. R. JEFFREY, *The two-fold singularity of discontinuous vector fields*. SIAM Journal on Applied Dynamical Systems. **8**(2) (2009):624–640.
- [9] A. COLOMBO, M. R. JEFFREY, *Nondeterministic Chaos, and the Two-fold Singularity in Piecewise Smooth Flows*. SIAM Journal on Applied Dynamical Systems. **10**(2) (2011):423–451.
- [10] A. COLOMBO, M. R. JEFFREY, *The two-fold singularity of nonsmooth flows: Leading order dynamics in n-dimensions*. Physica D: Nonlinear Phenomena. **263** (2013):1–10.
- [11] R. CRISTIANO, D. J. PAGANO, E. FREIRE, E. PONCE, *Revisiting the Teixeira singularity bifurcation analysis. Application to the control of power converters*. International Journal of Bifurcation and Chaos. **28**(9) (2018):31.
- [12] O. M. L. GOMIDE, M. A. TEIXEIRA, *Generic Singularities of 3D Piecewise Smooth Dynamical Systems*. In Advances in Mathematics and Applications: Celebrating 50 years of the Institute of Mathematics, Statistics and Scientific Computing, University of Campinas. Springer International Publishing. (2018):373–404.

- [13] A. JACQUEMARD, M. A. TEIXEIRA, D. J. TONON, *Stability conditions in piecewise smooth dynamical systems at a two-fold singularity*. Journal of Dynamical and Control Systems. **19**(5) (2013):47–67.
- [14] R. CRISTIANO, D. J. PAGANO, T. DE CARVALHO, D. J. TONON, *Bifurcations at a degenerate two-fold singularity and crossing limit cycles*. Journal of Differential Equations. **268**(1) (2019):115–140.
- [15] R. CRISTIANO, D. J. PAGANO, D. J. TONON, T. CARVALHO, *Fold bifurcation of T-singularities and invariant manifolds in 3D piecewise-smooth dynamical systems*. Physica D: Nonlinear Phenomena. **403** (2020):132293.
- [16] Y. ZHENG, X. CHEN, *Degenerate T-singularity bifurcation and crossing periodic orbits in a 3-dimensional piecewise smooth system*. Journal of Differential Equations. **354** (2023):296–324.
- [17] O. M. L. GOMIDE, M. A. TEIXEIRA, *Chains in 3D Filippov systems: A chaotic phenomenon*. Journal de Mathématiques Pures et Appliquées. **159** (2022):168–195.
- [18] O. A. R. CESPEDES, R. CRISTIANO, O. M. L. GOMIDE, *On the local structure of degenerate Teixeira singularities in 3D Filippov systems*. Physica D: Nonlinear Phenomena. **480** (2025):134735.

3.23 Small Normalised Solutions for a Schrödinger-Poisson System in Expanding Domains: Multiplicity and Asymptotic Behaviour

Edwin Gonzalo Murcia¹, Gaetano Siciliano²

Resumen

Given a smooth bounded domain $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, we consider the following nonlinear Schrödinger-Poisson type system

$$\begin{cases} -\Delta u + \phi u - |u|^{p-2}u = \omega u & \text{in } \lambda\Omega, \\ -\Delta \phi = u^2 & \text{in } \lambda\Omega, \\ u > 0 & \text{in } \lambda\Omega, \\ u = \phi = 0 & \text{on } \partial(\lambda\Omega), \\ \int_{\lambda\Omega} u^2 dx = \rho^2 & \end{cases}$$

in the expanding domain $\lambda\Omega \subset \mathbb{R}^3$, $\lambda > 1$ and $p \in (2, 3)$, in the unknowns (u, ϕ, ω) . We show that, for arbitrary large values of the expanding parameter λ and arbitrary small values of the mass $\rho > 0$, the number of solutions is at least the Ljusternick-Schnirelmann category of $\lambda\Omega$. Moreover, we show that as $\lambda \rightarrow +\infty$ the solutions found converge to a ground state of the problem in the whole space $\mathbb{R}^3$.

Palabras & frases claves: Critical point theory, Ljusternick-Schnirelmann category, Bary-center map, Multiplicity of solutions.

1. Introducción

Let $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ be a smooth and bounded domain; our aim in this talk is to discuss the existence of (weak) solutions $(u, \omega) \in H_0^1(\lambda\Omega) \times \mathbb{R}$ for the following (equivalent) problem in the expanding domain $\lambda\Omega$, $\lambda > 1$,

$$\begin{cases} -\Delta u + \phi_u u - |u|^{p-2}u = \omega u & \text{in } \lambda\Omega, \\ u > 0 & \text{in } \lambda\Omega, \\ u = 0 & \text{on } \partial(\lambda\Omega), \\ \int_{\lambda\Omega} u^2 dx = \rho^2, & \end{cases}$$

where $\phi_v \in H_0^1(\Omega)$ denotes the unique (and positive) solution of

$$-\Delta \phi = v^2 \quad \text{in } \lambda\Omega, \quad \phi = 0 \quad \text{on } \partial(\lambda\Omega)$$

for a fixed $v \in H_0^1(\lambda\Omega)$. By standard variational principles we know that the solutions can be found as critical points of the C^1 energy functional

$$I(u; \lambda\Omega) := \frac{1}{2} \int_{\lambda\Omega} |\nabla u|^2 dx + \frac{1}{4} \int_{\lambda\Omega} \phi_u u^2 dx - \frac{1}{p} \int_{\lambda\Omega} |u|^p dx$$

¹Pontificia Universidad Javeriana, Bogotá, Colombia. Correo: murciae@javeriana.edu.co

²Università degli Studi di Bari Aldo Moro. Correo: gaetano.siciliano@uniba.it

on the constraint given by the L^2 -sphere

$$\mathcal{M}_\rho(\lambda\Omega) := \left\{ u \in H_0^1(\lambda\Omega) : \int_{\lambda\Omega} u^2 dx = \rho^2 \right\}$$

and ω appears as the Lagrange multiplier.

Our result, roughly speaking, states that for a small value of the L^2 -norm, the number of solutions is influenced by the topology of the domain, at least when the domain is very large.

2. Presentation Structure

- Introduction: description of the problem and comparison with known results
- Some preliminaries: basic notation, some well known facts and variational framework
- The role of large λ : barycenter map and necessary results to use the Ljusternick-Schnirelmann category
- Appendix: difference between the problem defined on the whole space and the problem defined on a bounded domain

Referencias

- [1] J. BELLAZZINI, G. SICILIANO, *Stable standing waves for a class of nonlinear Schrödinger-Poisson equations*. Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik. **62** (2011):267–280.
- [2] J. BELLAZZINI, G. SICILIANO, *Scaling properties of functionals and existence of constrained minimizers*. Journal of Functional Analysis. **261** (2011):2486–2507.
- [3] V. BENCI, G. CERAMI, *The effect of the domain topology on the number of positive solutions of nonlinear elliptic problems*. Archive of Rational Mechanics and Analysis. **114** (1991):79–93.
- [4] V. GEORGIEV, F. PRINARI, N. VISCIGLIA, *On the radiality of constrained minimizers to the Schrödinger-Poisson-Slater energy*. Annales de l’Institut Henri Poincaré C. Analyse Non Linéaire. **29** (2012):369–376.
- [5] E. MURCIA, G. SICILIANO, *Small normalised solutions for a Schrödinger-Poisson system in expanding domains: Multiplicity and asymptotic behaviour*. Journal of Differential Equations. **444** (2025):113571
- [6] L. PISANI, G. SICILIANO, *Neumann condition in the Schrödinger-Maxwell system*. Topological Methods in Nonlinear Analysis. **29** (2007):251–264.

3.24 Sobre las ecuaciones de 2D-Boussinesq inviscidas con regularidad límite y efectos dispersivos

Vladimir Angulo Castillo^{1,2}

Resumen

En esta oportunidad, presentaremos un resultado sobre la existencia y unicidad de solución para cualquier tiempo de las ecuaciones de Boussinesq no viscosas 2D considerando una cierta clase de datos iniciales que abarca el caso de regularidad límite. Para ello, mostramos primero la solubilidad local en espacios de Besov de manera uniforme con respecto a un parámetro κ asociado con la estratificación del fluido. Posteriormente, empleamos un criterio de blow-up y estimaciones de tipo Strichartz, para obtener la solubilidad a largo plazo para valores grandes de κ , independientemente del tamaño de los datos iniciales.

Palabras & frases claves: Efectos de estratificación en fluidos inviscidos, Ecuaciones de Boussinesq, Criterio de blow-up.

1. Introducción

Iniciamos considerando el siguiente sistema de Boussinesq 2D inviscido

$$\begin{cases} \partial_t u + (u \cdot \nabla)u + \nabla p = \kappa \theta e_2, \\ \partial_t \theta + (u \cdot \nabla)\theta = 0, \\ \operatorname{div} u = 0, \\ u(x, 0) = u_0(x), \quad \theta(x, 0) = \theta_0(x), \end{cases} \quad (1)$$

donde $(x, t) \in \mathbb{R}^2 \times (0, \infty)$, u es la velocidad del fluido, θ denota la temperatura (o la densidad en flujos geofísicos), p representa la presión, $\kappa > 0$ es la constante gravitacional la cual será asociada con la estratificación del fluido (como es descrito debajo), y el vector $e_2 = (0, 1)$ indica la dirección vertical positiva.

Aplicando “curl” a la primera ecuación en (1), y recordando que la vorticidad $\omega = \operatorname{curl}(u) = \nabla^\perp \cdot u$, llegamos a la siguiente formulación de vorticidad equivalente

$$\begin{cases} \partial_t \omega + (u \cdot \nabla)\omega = \kappa \partial_1 \theta, \\ \partial_t \theta + (u \cdot \nabla)\theta = 0, \\ u = \nabla^\perp (-\Delta)^{-1} \omega, \quad \nabla^\perp = (-\partial_2, \partial_1), \\ \omega(x, 0) = \omega_0(x), \quad \theta(x, 0) = \theta_0(x), \quad \text{en } \mathbb{R}^2. \end{cases} \quad (2)$$

Dado que se observa físicamente que la atmósfera es principalmente estable en torno al equilibrio hidrostático entre el gradiente de presión y los efectos gravitacionales, deseamos considerar

¹Universidad Nacional de Colombia, Sede Orinoquia. Correo: vlcastillo@unal.edu.co

²Este trabajo fue realizado en colaboración con Lucas Catao de Freitas y Leonardo Kosloff como se aprecia en el artículo [1]

la temperatura inicial cerca de una solución estacionaria, estable y no trivial; es decir, el equilibrio hidrostático $\theta_0(x) = \rho_0(x) - \kappa x_2$, y luego buscar la solución de (2) con la temperatura en la forma $\theta(t, x) = \rho(t, x) - \kappa x_2$. Estas modificaciones nos llevan a trabajar con el siguiente nuevo sistema

$$\begin{cases} \partial_t \omega + (u \cdot \nabla) \omega = \kappa \partial_1 \rho, \\ \partial_t \rho + (u \cdot \nabla) \rho = \kappa u_2, \\ u = \nabla^\perp (-\Delta)^{-1} \omega, \\ \omega(x, 0) = \omega_0(x), \quad \rho(x, 0) = \rho_0(x), \quad \text{en } \mathbb{R}^2. \end{cases} \quad (3)$$

Destacamos que el problema de regularidad para el sistema no viscoso (1) es en general más difícil, ya que todavía parece ser desconocido si la aplicación clásica del criterio de regularidad de Beale-Kato-Majda (BKM), basado en el control de $\|\omega\|_{L^\infty}$, es suficiente para la regularidad global. Por lo tanto, la mayoría de los resultados para este sistema son locales en el tiempo, con varios trabajos que tratan la buena colocación local, en espacios subcríticos de Besov y Sobolev, mediante el uso de la inmersión de $H^s(\mathbb{R}^2)$ en L^∞ , $s > 1$. El caso límite $s = 1$ ha añadido complicaciones ya que $\|\nabla u\|_{L^\infty}$ no está acotado por $\|\omega\|_{H^1}$, pero esto se puede evitar en el espacio crítico de Besov para mostrar la buena colocación local, donde la inmersión en L^∞ sí se cumple.

Las estimativas dispersivas también se utilizan para obtener un resultado análogo en el caso de la ecuación cuasigeostrófica superficial no viscosa (SQG) dispersiva, donde los efectos dispersivos se asocian con una rotación fuerte; es tanto así que ambas demostraciones tienen la misma estructura (ver [2], [3], [4] y sus referencias).

Este problema fue analizado para las ecuaciones SQG y el sistema Boussinesq (3) por Wan y Chen [7] para mostrar la solubilidad a largo plazo de soluciones fuertes para $|\kappa|$ suficientemente grandes. El término *solubilidad* aquí se refiere al par de existencia-unicidad de soluciones en un sentido apropiado. El enfoque en [7] se basa en generalizar una estimación dispersiva y derivar las estimaciones de Strichartz correspondientes, para luego mostrar la solubilidad a largo plazo mediante un criterio de blow-up de tipo BKM en espacios de Sobolev $(\dot{H}^s \cap \dot{H}^{-1}) \times H^{s+1}$, con $s > 3$. Utilizando un argumento alternativo, Takada [5] mejoró este resultado con una condición de suavidad más débil en los datos iniciales, como perteneciente únicamente a H^s ($s > 2$), mostrando también la asintótica de las soluciones como $\kappa \rightarrow \infty$. Sin embargo, los resultados de [5] y [7] no alcanzan el caso $s = 2$, que aparece como un valor límite para la solubilidad a largo plazo de (3) en los espacios de Sobolev H_p^s y los espacios de Besov $B_{p,q}^s$, con $p = 2$.

Por lo tanto, teniendo en cuenta la falta de control sobre la vorticidad en el contexto de la buena colocación local en el espacio de Besov límite, nos motiva mostrar cómo la solubilidad puede extenderse en este contexto a tiempos arbitrarios mediante la fuerte estabilización dispersiva lineal. Para ello, empleamos las estimaciones de paraproducto derivadas de la inmersión de $\dot{B}_{2,1}^1$ en L^∞ , siguiendo el tema del resultado de Vishik sobre la unicidad a largo plazo para las ecuaciones de Euler 2D en el caso de regularidad límite [6]. En particular, dado que necesitamos mostrar estimaciones locales uniformes con respecto a κ desarrollamos estimaciones específicas para el conmutador.

Entonces, en vista de las identificaciones $B_{2,2}^s \equiv H^s$ y $\dot{B}_{2,2}^s \equiv \dot{H}^s$ para $p = 2$ y $q = 2$, podemos recuperar los resultados de [7] y también cubrir el caso $s = 2$, con leyes de potencia similares para la tasa de decaimiento temporal.

2. Sección de resultados

A continuación presentamos los resultados principales, los cuales están contenidos en el paper [1].

Teorema 1. Sean s y q números reales tales que $s > 2$ con $1 \leq q \leq \infty$ o $s = 2$ con $q = 1$.

- (i) (Solvabilidad uniforme local) Sea $\omega_0 \in \dot{B}_{2,q}^{s-1}(\mathbb{R}^2) \cap \dot{H}^{-1}(\mathbb{R}^2)$ y $\rho_0 \in B_{2,q}^s(\mathbb{R}^2)$. Existe $T > 0$ (dependiendo de $\|\omega_0\|_{\dot{B}_{2,q}^{s-1} \cap \dot{H}^{-1}}$ y $\|\rho_0\|_{B_{2,q}^s}$) tal que (3) tiene una única solución (ω, ρ) con $\omega \in C([0, T]; \dot{B}_{2,q}^{s-1}(\mathbb{R}^2) \cap \dot{H}^{-1}(\mathbb{R}^2)) \cap C^1([0, T]; \dot{B}_{2,q}^{s-2}(\mathbb{R}^2) \cap \dot{H}^{-1}(\mathbb{R}^2))$ y $\rho \in C([0, T]; B_{2,q}^s(\mathbb{R}^2)) \cap C^1([0, T]; B_{2,q}^{s-1}(\mathbb{R}^2))$, para todo $\kappa \in \mathbb{R}$.
- (ii) (Solvabilidad de tipo long-time) Sea $T \in (0, \infty)$, $\omega_0 \in \dot{B}_{2,q}^s(\mathbb{R}^2) \cap \dot{H}^{-1}(\mathbb{R}^2)$, y $\rho_0 \in B_{2,q}^{s+1}(\mathbb{R}^2)$. Existe $\kappa_0 = \kappa_0(T, \|\omega_0\|_{\dot{B}_{2,q}^{s-1} \cap \dot{H}^{-1}}, \|\rho_0\|_{B_{2,q}^{s+1}}) > 0$ tal que si $|\kappa| \geq \kappa_0$ entonces (3) tiene una única solución (ω, ρ) tal que $\omega \in C([0, T]; \dot{B}_{2,q}^s(\mathbb{R}^2) \cap \dot{H}^{-1}(\mathbb{R}^2)) \cap C^1([0, T]; \dot{B}_{2,q}^{s-1}(\mathbb{R}^2) \cap \dot{H}^{-1}(\mathbb{R}^2))$ y $\rho \in C([0, T]; B_{2,q}^{s+1}(\mathbb{R}^2)) \cap C^1([0, T]; B_{2,q}^s(\mathbb{R}^2))$.

Para demostrar el Teorema 1, construimos soluciones aproximadas $(\omega_n, \rho_n)_{n \in \mathbb{N}}$ a través de un esquema de iteración de Picard, y mostramos estimaciones a priori uniformes con respecto al parámetro dispersivo κ , para así obtener una solución como el límite de (ω_n, ρ_n) en los espacios de Besov con la regularidad límite para (3).

Para lograr esto en el marco de la regularidad límite, empleamos una intersección de espacios para la vorticidad ω . De hecho, $\dot{H}^{-1}$ es importante para controlar la influencia de κ en el tiempo de existencia T y, por lo tanto, obtener un tiempo uniforme con respecto a κ mediante un efecto de cancelación que involucra el producto interno $\dot{H}^{-1}$, mientras que el espacio homogéneo de Besov $\dot{B}_{2,q}^{s-1}(\mathbb{R}^2)$ proporciona el control necesario sobre la regularidad, en particular para el caso límite. Más precisamente, necesitamos demostrar que $(\omega_n, \rho_n)_{n \in \mathbb{N}}$ está acotado en $L^\infty(0, T; \dot{B}_{2,q}^{s-1} \cap \dot{H}^{-1}) \times L^\infty(0, T; B_{2,q}^s)$ y Cauchy en $L^\infty(0, T; \dot{B}_{2,q}^{s-2} \cap \dot{H}^{-1}) \times L^\infty(0, T; B_{2,q}^{s-1})$, ambos uniformemente con respecto a κ . Vale la pena señalar que esta dificultad no aparece en el contexto de ecuaciones SQG no viscosas y de Euler (con o sin efectos dispersivos) cuando se analiza la solubilidad local y la regularidad límite en espacios de Besov (véase [2, 6]).

Referencias

- [1] V. ANGULO-CASTILLO, L. C. F. FERREIRA AND L. KOSLOFF, *Long-time solvability for the 2D inviscid Boussinesq equations with borderline regularity and dispersive effects*. Asymptotic Anal. **137**(1–2) (2024):53–84.
- [2] V. ANGULO-CASTILLO AND L. C. F. FERREIRA, *On the 3D Euler equations with Coriolis force in borderline Besov spaces*. Commun. Math. Sci 16 (1) (2018):145–164.
- [3] A. BABIN, A. MAHALOV, AND B. NICOLAENKO, *3D Navier-Stokes and Euler equations with initial data characterized by uniformly large vorticity*. Indiana Univ. Math. J. Special Issue. **50** (2001):1–35.
- [4] A. DUTRIFOY, *Examples of dispersive effects in non-viscous rotating fluids*. J. Math. Pures Appl. **84** (2005):331–356.

- [5] R. TAKADA, *Long time solutions for the 2D inviscid Boussinesq equations with strong stratification*. Manuscripta Math. **164** (1–2) (2021):223–250.
- [6] M. VISHIK, *Incompressible flows of an ideal fluid with vorticity in borderline spaces of Besov type*. Ann. Sci. École Norm. Sup. **32**(6) (1999):769–812.
- [7] R. WAN AND J. CHEN, *Global well-posedness for the 2D dispersive SQG equation and inviscid Boussinesq equations*. Z. Angew. Math. Phys. **67**(4)(2016):104.
- [8] J. WU, X. XU, AND Z. YE, *Global smooth solutions to the n -dimensional damped models of incompressible fluid mechanics with small initial datum*. J. Nonlinear Sci. **25**(1) (2015):157–192.

3.25 Una comparación preliminar de métodos numéricos para leyes de conservación escalares

Jonhatan Castillo Barajas¹

Resumen

En esta presentación se aborda una comparación preliminar de diferentes métodos numéricos desarrollados para aproximar soluciones de leyes de conservación escalares. Se abordarán los métodos de *front tracking* [3, 5], el esquema de diferencias de Glimm [4], su versión determinística introducida por Liu [7], y el método de *no-flow curves* desarrollado por Abreu [1, 2]. Cada una de estas técnicas ofrece diferentes balances entre exactitud, estabilidad y complejidad computacional.

Palabras & frases claves: Front tracking, no-flow curves, esquema de Glimm, comparación, leyes de conservación.

1. Introducción

Los sistemas hiperbólicos de leyes de conservación surgen de manera natural en diversos modelos físicos, tales como la dinámica de fluidos, el flujo vehicular y la propagación de ondas. Sus soluciones suelen desarrollar discontinuidades (choques) incluso a partir de datos iniciales suaves, lo que hace que el diseño de métodos numéricos precisos y estables sea particularmente desafiante. Se han propuesto varios enfoques numéricos para abordar este problema. Entre ellos, el *front tracking* destaca como un método que sigue explícitamente las discontinuidades, ofreciendo una alta resolución de las estructuras de choque. El método de Glimm, basado en un algoritmo de elección aleatoria, es notable por sus garantías teóricas de convergencia, mientras que la adaptación determinista de Liu busca conservar estas ventajas sin depender del azar. Más recientemente, Abreu ha propuesto el uso de las llamadas curvas de no-flujo para mejorar la aproximación de interacciones complejas de ondas. En este resumen, se explicará brevemente el funcionamiento de cada uno de estos métodos.

2. Front tracking

Considere el problema de valor inicial para un sistema de leyes de conservación

$$\begin{aligned} u_t + f(u)_x &= 0, & t > 0, & -\infty < x < \infty, \\ u(x, 0) &= u_0(x), & -\infty < x < \infty, \end{aligned} \tag{1}$$

donde u y $f(u)$ son vectores en $\mathbb{R}^n$, y f es una función suave de u . Se buscan soluciones débiles en el sentido de distribuciones. Para el caso escalar $n = 1$, en [5], Holden et al. introducen un método numérico para resolver (1) conocido como *front tracking*, basado en las ideas de Dafermos [3]. Suponga, por ejemplo, que f es lineal a trozos y que el dato inicial u_0 es constante a trozos. El

¹Universidad Nacional de Colombia. Correo: jcastilloba@unal.edu.co

problema más simple, cuando

$$u_0(x) = \begin{cases} u_l, & x < 0 \\ u_r, & x > 0 \end{cases}, \quad (2)$$

se conoce como el problema de Riemann. Si $u_l < u_r$, se define f_- como la envolvente convexa de f relativa al intervalo (u_l, u_r) . Dado que f es continua y lineal a trozos, f_- también es continua y lineal a trozos, y se define $u_l = v_1 < v_2 < \dots < v_m = u_r$ como los puntos de quiebre de f_- en (u_l, u_r) . Entonces, la solución exacta del problema de Riemann es

$$u(x, t) = v_i, \quad s_{i-1}t < x < s_i t, \quad s_i = \frac{f(v_{i+1}) - f(v_i)}{v_{i+1} - v_i}, \quad i = 1, \dots, m,$$

donde $s_0 = -\infty$, $s_{m+1} = \infty$. Si $u_r > u_l$, la solución se obtiene sustituyendo x por $-x$ y f por $-f$. Dada una condición inicial arbitraria u_0 acotada y de variación localmente acotada, y f una función localmente Lipschitz continua, se puede aproximar u_0 con una función constante a trozos y f con una función continua y lineal a trozos. Entonces se resuelve el problema de Riemann en cada discontinuidad y es posible resolver el problema (1) hasta que dos discontinuidades colisionen en algún tiempo t . La función $u(., t)$ sigue siendo constante a trozos y es posible reiniciar el procedimiento.

3. Esquema de diferencias de Glimm

Para el caso de sistemas, se asume que el sistema es estrictamente hiperbólico, es decir, la matriz Jacobiana $df(u)$ posee valores propios reales y distintos $\lambda_1(u) < \dots < \lambda_n(u)$ con vectores propios correspondientes $r_1(u), \dots, r_n(u)$. Además, se supone que el sistema (1) es estrictamente no lineal en el sentido de que $r_j(u) \cdot \nabla \lambda_j(u) \neq 0$. Resulta fundamental describir la solución de Lax [6] de (1) en el caso en que los datos iniciales presentan una única discontinuidad, como en (2), es decir, la solución del problema de Riemann. Cabe señalar que, para el caso escalar, se tiene $\lambda = f'(u)$ y la relación anterior implica que $f''(u) \neq 0$, es decir, la función f debe ser estrictamente convexa o cóncava. Para un estado izquierdo fijo u_l , existe una vecindad D de u_l tal que, para todo $u_r \in D$, la solución del problema de Riemann existe. Asimismo, la función u toma valores en estados constantes $u_l = v_0, \dots, v_n = u_r$ en sectores $\Sigma_j = \{(x, t) \mid \xi_j t < x < \xi'_j t\}$, donde $\xi_0 = -\infty$ y $\xi'_n = \infty$. Los sectores Σ_{j-1} y Σ_j son consecutivos y se presentan dos posibilidades para u en el sector comprendido entre Σ_{j-1} y Σ_j :

1. los sectores Σ_{j-1} y Σ_j comparten una frontera común $x = \xi_j t$ y se cumple que $\lambda_j(u_j) < \xi_j < \lambda_j(u_{j-1})$, por lo que aparece una discontinuidad de salto denominada j -onda de choque,
2. en el intervalo entre Σ_{j-1} y Σ_j , se cumple $\lambda_j(u(t\xi, \xi)) = \xi$, de modo que u es continua en y entre Σ_{j-1} y Σ_j . Este tipo de solución se denomina j -onda de rarefacción.

El esquema en diferencias de Glimm [4] se define de la siguiente manera. Se eligen longitudes de malla r y s con r/s constante, que satisfacen la condición $\sup_i \{\lambda_i(u)\} \leq \frac{r}{s}$ para todo u bajo consideración. Se definen

$$Y = \{(m, k) \in \mathbb{Z}^2 \mid m + k \text{ es par y } k \geq 0\}$$

y

$$A = \prod_{(m,k) \in Y} \{[(m-1)r, (m+1)r] \times [ks]\}.$$

La solución aproximada $u_{r,a}(x, t)$ se construye inductivamente de acuerdo con una secuencia previamente escogida $a = (a_{m,k})$ en A , denominada *elección aleatoria*, de la siguiente manera. Se supone que la aproximación en diferencias está definida para $(x, t) = a_{m-1,k-1}$ y $(x, t) = a_{m+1,k-1}$. Sea v la solución del problema de Riemann

$$v_t + f(v)_x = 0, \quad (m-1)r \leq x \leq (m+1)r, \quad (k-1)s \leq t \leq ks$$

con valor inicial

$$v(x, (k-1)s) = \begin{cases} u_{r,a}(a_{m-1,k-1}), & (m-1)r \leq x < mr, \\ u_{r,a}(a_{m+1,k-1}), & mr < x \leq (m+1)r. \end{cases}$$

Se define $u(a_{m,k}) = v(a_{m,k})$. Esto define el esquema en diferencias. A cada factor en A se le asigna la medida $1/2r$ multiplicada por la medida de Lebesgue, y se dota a A de la correspondiente medida producto. De esta manera, se puede identificar A como un producto infinito de copias del intervalo $[0, 1]$, eliminando así la dependencia de a respecto de r . El esquema de Glimm converge a una solución para casi todo $a \in A$.

La versión determinista del esquema de Glimm [7] identifica aquellas secuencias $a = (a_{m,k})$ para las cuales el límite de las soluciones aproximadas es una solución exacta. Es suficiente que la secuencia satisfaga $a_{m',k} = a_{m,k}$ para todo k y para todo m, m' . En este caso, la secuencia puede escribirse simplemente como $a = (a_k)$, y debe estar equidistribuida en $[0, 1]$, es decir,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{B(a_l, k, I)}{k} = \frac{\mu(I)}{2}$$

para todo subintervalo $I \subset [0, 1]$, donde $B(a_l, k, I)$ denota el número de índices l , $1 \leq l \leq k$, tales que $a_l \in I$, y $\mu(I)$ representa la longitud del intervalo I .

Se asume que el flujo a lo largo de las curvas $\sigma_j^n(t)$ y $\sigma_{j+1}^n(t)$ sobre el volumen D_j^n es nulo, lo cual es equivalente a que las curvas $\sigma_j^n(t)$ satisfagan un conjunto de PVI's

$$\frac{d\sigma_j^n(t)}{dt} = \frac{f(u(\sigma_j^n(t), t))}{u(\sigma_j^n(t), t)}, \quad t^n \leq t \leq t^{n+1}, \quad \sigma_j^n(t^n) = x_j, \quad (3)$$

donde $\sigma_j^0(t^0) = x_j^0$ para todos los índices de malla j . Por lo tanto,

$$\int_{\bar{x}_j^{n+1}}^{\bar{x}_{j+1}^{n+1}} u(x, t^{n+1}) dx = \int_{x_j}^{x_{j+1}} u(x, t^n) dx. \quad (4)$$

En consecuencia, el enfoque numérico para u en las celdas $[x_{j-\frac{1}{2}}^n, x_{j+\frac{1}{2}}^n]$ y $[\bar{x}_{j-\frac{1}{2}}^{n+1}, \bar{x}_{j+\frac{1}{2}}^{n+1}]$ se define para $n \in \mathbb{N}$ como

$$U_j^n = \frac{1}{h} \int_{x_{j-\frac{1}{2}}}^{x_{j+\frac{1}{2}}} u(x, t^n) dx, \quad \bar{U}_j^{n+1} = \frac{1}{h_j^{n+1}} \int_{\bar{x}_{j-\frac{1}{2}}^{n+1}}^{\bar{x}_{j+\frac{1}{2}}^{n+1}} u(x, t^{n+1}) dx \quad (5)$$

con condición inicial $u(x_j^0, 0) = U_j^0$ en las celdas $[x_{j-\frac{1}{2}}^0, x_{j+\frac{1}{2}}^0]$. Combinando (4) y (5), se obtiene

$$\bar{U}_j^{n+1} = \frac{1}{h_j^{n+1}} \left[\frac{h}{2} (U_j^n + U_{j+1}^n) \right]. \quad (6)$$

Usando una aproximación de primer orden a la EDO (3) en la forma $\sigma_j^n(t) = x_j^n + (t - t^n)f_j^n$, donde $f_j^n = \frac{f(U_j^n)}{U_j^n}$, se puede aproximar U_j^{n+1} en la forma

$$U_j^{n+1} = \frac{1}{h} \left[\left(\frac{h}{2} + f_j^n k^n \right) \bar{U}_{j-1}^{n+1} + \left(\frac{h}{2} - f_j^n k^n \right) \bar{U}_j^{n+1} \right], \quad (7)$$

donde $k^n = t^{n+1} - t^n$. Combinando (6) y (7) se obtiene el esquema para solucionar (1) dado por

$$U_j^{n+1} = \frac{U_{j-1}^n + 2U_j^n + U_{j+1}^n}{4} + \frac{k^n}{4} \left[\frac{f_{j-1}^n + f_j^n}{h_{j-1}^{n+1}} (U_{j-1}^n + U_j^n) - \frac{f_j^n + f_{j+1}^n}{h_j^{n+1}} (U_j^n + U_{j+1}^n) \right],$$

donde el esquema está sujeto a la condición de estabilidad

$$\sup_j \{ |H'(U_j^n)| \} \frac{k^n}{h} < \frac{1}{2}.$$

Referencias

- [1] EDUARDO ABREU AND JOHN PÉREZ. *A fast, robust, and simple Lagrangian-Eulerian solver for balance laws and applications*. Computers & Mathematics with Applications, **77**(9) (2019):2310–2336.
- [2] EDUARDO ABREU, VÍTOR MATOS, JOHN PÉREZ, AND PANTERS RODRÍGUEZ-BERMÚDEZ. *A class of Lagrangian-Eulerian shock-capturing schemes for first-order hyperbolic problems with forcing terms*. Journal of Scientific Computing, **86**(1) (2021):14.
- [3] CONSTANTINE M DAFERMOS. *Polygonal approximations of solutions of the initial value problem for a conservation law*. Journal of mathematical analysis and applications, **38**(1) (1972):33–41.
- [4] JAMES GLIMM. *Solutions in the large for nonlinear hyperbolic systems of equations*. Communications on pure and applied mathematics, **18**(4) (1965):697–715.
- [5] HELGE HOLDEN, LARS HOLDEN, AND RAPHAEL HØEGH-KROHN. *A numerical method for first order nonlinear scalar conservation laws in one-dimension*. Computers & Mathematics with Applications, **15**(6-8) (1988):595–602.
- [6] PETER D LAX. *Hyperbolic systems of conservation laws II*. Communications on Pure and Applied Mathematics, **10**(4) (1957):537–566.
- [7] TAI-PING LIU. *The deterministic version of the Glimm scheme*. Communications in Mathematical Physics, **57** (1977):135–148.

3.26 Análisis numérico de un sistema de EDP en magnetohidrodinámica

Luis D. Salazar Anaya¹, Diego A. Rueda Gómez²

Resumen

En este póster se presenta el estudio numérico de un sistema diferencial en magnetohidrodinámica (en sus versiones evolutiva y estacionaria), el cual describe la dinámica del campo de velocidades y del campo magnético de un fluido conductor eléctrico incompresible. Para el diseño de los esquemas de aproximación numérica, se emplean los métodos de Diferencias Finitas y Elementos Finitos; y se prueban algunas propiedades cualitativas tales como el buen planteamiento de los esquemas, la verificación de una ley de energía discreta, estimaciones uniformes, y el comportamiento asintótico de las soluciones numéricas del esquema evolutivo, mostrando convergencia (cuando el número de etapas de tiempo tiende a infinito) hacia estados estacionarios. Finalmente, se muestran los resultados de algunas simulaciones numéricas realizadas que permiten evidenciar el buen comportamiento de los esquemas planteados.

Palabras & frases claves: Magnetohidrodinámica, Diferencias Finitas, Elementos Finitos, Ley de energía, Estimaciones uniformes, Comportamiento asintótico.

1. Introducción

La magnetohidrodinámica (MHD) es aquella disciplina o rama de la física que se encarga del estudio del comportamiento o interacción de los fluidos a través de un campo magnético, o en presencia de este. Las ecuaciones MHD consisten en un acoplamiento entre las ecuaciones de Maxwell y las ecuaciones de Navier-Stokes, un aspecto que resulta muy curioso teniendo en cuenta que ambos modelos provienen de campos de la física que en principio no están relacionados, como lo son el Electromagnetismo y la Mecánica de fluidos. En la MHD se pueden apreciar tres principios físicos diferentes: La ley de Ampere, la ley de Faraday y la fuerza de Lorentz.

Inicialmente, imagine que tiene un fluido conductor en un campo magnético inicial; debido a esto, la ley de Faraday dice que se genera una fuerza electromotriz que a su vez, origina una corriente eléctrica. Luego, la ley de Ampere proporciona un campo magnético inducido por la corriente eléctrica, el cual se une al campo magnético inicial y al interactuar junto con la densidad del fluido conductor, se produce una fuerza de Lorentz. Finalmente, dicha fuerza actúa sobre el fluido conductor, para que vaya en contra del movimiento relativo del campo magnético inicial y el inducido. Se obtiene entonces, como resultado de lo anterior, que el efecto de la MHD es la desaparición o reducción del movimiento relativo del campo magnético inicial y el inducido.

Debido a sus variadas aplicaciones científicas, el estudio (tanto teórico como numérico) de este tipo de ecuaciones ha sido el foco de interés de diversos investigadores en los últimos años (ver, ejemplo, [1, 3] y referencias citadas en ellos). Entre estas aplicaciones podría mencionarse el estudio del campo magnético de la tierra, en el que se ve envuelto el núcleo externo y la agitación causada por

¹Universidad Industrial de Santander. Correo: luis2210674@correo.uis.edu.co

²Universidad Industrial de Santander. Correo: diaruego@uis.edu.co

la rotación de la tierra, originando de esta manera, dicho campo magnético; una más es el fenómeno de la aurora boreal, generado por la interacción entre la magnetósfera y el viento solar.

2. Desarrollo

Este póster se enfoca en el siguiente sistema de EDP que modela la dinámica de un fluido conductor eléctrico incompresible, en el cual, además del movimiento debido al campo eléctrico, se admite el movimiento libre de iones pesados ([2]):

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\eta}{\rho} \Delta u + u \cdot \nabla u - \frac{\mu}{\rho} h \cdot \nabla h = f - \frac{1}{\rho} \nabla \left(p + \frac{\mu}{2} h^2 \right) & \text{en } Q_T, \\ \frac{\partial h}{\partial t} - \frac{1}{\mu\sigma} \Delta h + u \cdot \nabla h - h \cdot \nabla u = -\nabla w & \text{en } Q_T, \\ \operatorname{div} u = \operatorname{div} h = 0 & \text{en } Q_T, \\ u(x, t) = 0, \quad h(x, t) = 0, & \text{sobre } \Sigma_T, \\ u(x, 0) = u_0(x), \quad h(x, 0) = h_0(x), & \text{en } \Omega, \end{cases} \quad (1)$$

con $Q_T := \Omega \times (0, +\infty)$ y $\Sigma_T := \partial\Omega \times (0, +\infty)$; donde Ω es un dominio acotado de $\mathbb{R}^N$ ($N = 2, 3$), con frontera $\partial\Omega$. En (1), las incógnitas son u y h , denotando el campo de velocidades y el campo magnético, respectivamente; así mismo, p denota la presión hidrostática y w es una función relacionada a los iones pesados. En lo que respecta a los parámetros, ρ es la densidad de masa del fluido (asumida como constante positiva), $\mu > 0$ es la constante de permeabilidad magnética del medio, $\sigma > 0$ es la constante de conductividad eléctrica y $\eta > 0$ es la constante de viscosidad del fluido; así mismo, f es un campo de fuerza externo dado. Por otra parte, en su versión estacionaria, el modelo (1) está dado por

$$\begin{cases} -\frac{\eta}{\rho} \Delta u_\infty + u_\infty \cdot \nabla u_\infty - \frac{\mu}{\rho} h_\infty \cdot \nabla h_\infty = f - \frac{1}{\rho} \nabla \left(p + \frac{\mu}{2} h_\infty^2 \right) & \text{en } \Omega, \\ -\frac{1}{\mu\sigma} \Delta h_\infty + u_\infty \cdot \nabla h_\infty - h_\infty \cdot \nabla u_\infty = -\nabla w & \text{en } \Omega, \\ \operatorname{div} u_\infty = \operatorname{div} h_\infty = 0 & \text{en } \Omega, \\ u_\infty(x) = 0, \quad h_\infty(x) = 0, & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \quad (2)$$

Desde el punto de vista teórico, en [2], se prueban los siguientes resultados relacionados con los sistemas (1)-(2):

Cualquier solución débil $[u_\infty, h_\infty] \in V \times V$ de (2) satisface la estimación

$$\frac{\nu}{2} \|\nabla u_\infty\|_{L^2}^2 + \gamma \|\nabla h_\infty\|_{L^2}^2 \leq \frac{\alpha}{2C_\nu} \|f_\infty\|_{V'}^2, \quad (3)$$

donde

$$V = \{u \in H_0^1(\Omega); \nabla \cdot u = 0 \text{ en } \Omega\}.$$

Existe, por lo menos, una solución débil de (2). Además, si la solución débil satisface las condiciones

$$\frac{C}{\nu}(\alpha\|u_\infty\|_{L^3} + \|h_\infty\|_{L^3}) < 1, \quad (4)$$

$$\frac{C}{\gamma}(\|u_\infty\|_{L^3} + \|h_\infty\|_{L^3}) < 1, \quad (5)$$

donde $C > 0$, entonces es única.

Sean $f \in L^\infty(0, \infty; V')$, $f_\infty \in V'$ y considere $[u, h]$ una solución débil de (1) tal que $u_t, h_t \in L^2(0, \infty; V')$. Además, asuma que $[u_\infty, h_\infty]$ es una solución débil de (2) verificando (4) y (5). Entonces, existe una constante positiva $\beta_0 > 0$ tal que, para todo $\beta \in (0, \beta_0]$, tenemos la siguiente estimación

$$\begin{aligned} \alpha\|u(t) - u_\infty\|_{L^2}^2 + \|h(t) - h_\infty\|_{L^2}^2 &\leq e^{-2\beta t} \left(\alpha\|u_0 - u_\infty\|_{L^2}^2 + \|h_0 - h_\infty\|_{L^2}^2 \right) \\ &\quad + \frac{\alpha}{2C_\nu} e^{-2\beta t} \int_0^t e^{2\beta s} \|f(s) - f_\infty\|_{V'}^2 ds. \end{aligned} \quad (6)$$

lo cual, junto con la hipótesis de que $\lim_{t \rightarrow \infty} \|f(t) - f_\infty\|_{V'} = 0$, implica que

$$\|u(t) - u_\infty\|_{L^2} \rightarrow 0 \text{ y } \|h(t) - h_\infty\|_{L^2} \rightarrow 0 \text{ cuando } t \rightarrow +\infty. \quad (7)$$

Partiendo de estos resultados teóricos obtenidos previamente en la literatura, en este póster se aborda el estudio numérico de los sistemas (1)-(2). Las principales contribuciones de este trabajo son ([4]):

- En primer lugar, el planteamiento de dos esquemas numéricos de tipo mixto (usando aproximación por elementos finitos para la discretización espacial, y diferencias finitas para la aproximación temporal), para aproximar las soluciones débiles de los modelos (1)-(2), garantizando su buen planteamiento, y verificando (a nivel discreto) estimaciones análogas a (3).
- En segundo lugar, el estudio del comportamiento asintótico de las soluciones del esquema numérico evolutivo, obteniendo las estimaciones análogas a (6)-(7) a nivel discreto.
- Finalmente, la implementación computacional del esquema mediante software especializado, y la realización de simulaciones numéricas.

Referencias

- [1] A. Al-Hanaya, M. Alotaibi, M. Shqair y A. Hagag, *MHD effects on Casson fluid flow squeezing between parallel plates*. AIMS Mathematics, **8**(12) (2023):29440–29452.
- [2] J. Boldrini, J. Bravo-Olivares, E. Notte-Cuello y M. Rojas-Medar, *Asymptotic behavior of weak and strong solutions of the magnetohydrodynamic equations*. Electronic Research Archive, **29**(1) (2021):1783–1801.
- [3] M. Junaid, M. Aslam y J. Zhang, *Applications of solar thermal radiation in a bio-convective Eyring-Powell hybrid nanofluid flow under the influence of electro-magnetohydrodynamics near a stagnation point: An irreversibility study*. Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik, **104**(4) (2024).

- [4] L. D. Salazar-Anaya, D. A. Rueda-Gómez, *Theoretical and numerical study of a differential system in magnetohydrodynamics*. Preprint, 2025.

3.27 Aproximación de la función Gamma

Camila Buitrago Ríos¹, Nicolás S. Torres², Adrián R. Gómez Plata³

Resumen

Se presenta una aproximación computacional del cálculo de la función Gamma para valores complejos por medio de un algoritmo recursivo diseñado desde diversas representaciones de esta función. Se muestra el uso de la función Gamma en la solución de la ecuación diferencial fraccional masa-resorte amortiguado.

Palabras & frases claves: Función Gamma, Ecuación diferencial fraccional, función de Mittag Leffler, números complejos.

1. Introducción

La función Gamma es una función trascendental muy utilizada en varias ramas de la matemática, uno de los principales usos está en extender el uso del concepto del factorial de un número entero no negativo para números reales, se muestra aquí como representar la función Gamma para números complejos, usando diferentes definiciones de esta función y así escribirla en su forma polar. Lo anterior permite escribir un algoritmo computacional que aproxima la función Gamma para valores complejos en Python y a su vez realizar una aplicación al sistema masa resorte amortiguado fraccional.

2. Métodos y resultados

La función Gamma es introducida por Euler, mediante la integral impropia:

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt, \quad \Re(z) > 0,$$

donde se entenderá que $\Gamma(n+1) = n!$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Por ejemplo el cálculo de $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$ es:

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{\infty} t^{-\frac{1}{2}} e^{-t} dt = \int_0^{\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt = 2 \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}.$$

Weierstrass dio una representación alternativa de la función Gamma:

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = z e^{\gamma z} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right) e^{-\frac{z}{n}}, \quad \text{para } z \notin \mathbb{Z}_0^-,$$

¹Universidad Militar Nueva Granada. Correo: est.camila.buitragor@unimilitar.edu.co

²Universidad Militar Nueva Granada. Correo: est.nicolas.storres@unimilitar.edu.co

³Universidad Militar Nueva Granada. Correo: adrian.gomez@unimilitar.edu.co

donde γ es la constante de Euler y Mascheroni ($\approx 0,5772$).

3. Cálculo de $\Gamma(i)$

Como $|\Gamma(i)| = \sqrt{\frac{\pi}{\sinh(\pi)}}$ y $\arg(z) = \text{Im}(\ln z)$. Un cálculo rápido muestra que:

$$\ln \Gamma(z) = -\gamma z - \ln z - \sum_{n=1}^{\infty} \left[\ln \left(1 + \frac{z}{n} \right) - \frac{z}{n} \right],$$

de lo anterior, expresando $\Gamma(i)$ en su forma polar:

$$\Gamma(i) = \sqrt{\frac{\pi}{\sinh(\pi)}} e^{\text{Im}(\ln \Gamma(i))i} \approx \sqrt{\frac{\pi}{\sinh(\pi)}} e^{i(-\gamma - \frac{\pi}{2} + 0,2755)} \approx -0,154 - 0,498i.$$

4. Forma General $\Gamma(a + bi)$

Siguiendo con la intención de aproximar $\Gamma(a + bi)$ en su forma polar, se tiene que para $z = a + bi \neq 0$ y $a > 0$:

$$|\Gamma(a + bi)| \approx \Gamma(a) \prod_{k=0}^m \frac{1}{1 + \frac{b^2}{(a+k)^2}},$$

$$\arg\{\Gamma(a + bi)\} \approx -\gamma b - \arg(a + bi) - \text{Im} \left(\sum_{n=1}^m \left[\ln \left(1 + \frac{a + bi}{n} \right) - \frac{a + bi}{n} \right] \right).$$

$\Gamma(a + bi)$	Valor $\Gamma_A(a + bi) \approx$	Valor $\Gamma_{\text{real}}(a + bi) \approx$	Error relativo
$\Gamma(i)$	$-0,1549499 - 0,498017i$	$-0,1549498 - 0,498015i$	$3,84 \times 10^{-6}$
$\Gamma(2i)$	$0,0099026 - 0,0759527i$	$0,0099024 - 0,0759520i$	$9,403 \times 10^{-6}$
$\Gamma(1 + i)$	$0,498016 - 0,15495i$	$0,498015 - 0,15494i$	$2,37 \times 10^{-5}$
$\Gamma(1 - i)$	$0,498016 + 0,15495i$	$0,498015 + 0,15494i$	$2,38 \times 10^{-5}$
$\Gamma(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i)$	$0,8181638 - 0,763315i$	$0,8181639 - 0,763313i$	$2,5 \times 10^{-6}$
$\Gamma(2 + \sqrt{2}i)$	$0,40725 + 0,384364i$	$0,40724 + 0,384368i$	$1,7 \times 10^{-5}$
$\Gamma(\sqrt{5} - i\pi)$	$-0,1302377 - 0,056235i$	$-0,1302364 - 0,056230i$	$1,1 \times 10^{-5}$
$\Gamma(\sqrt{\pi} + e - 6i)$	$0,0024297 - 0,006039i$	$0,0024291 - 0,006038i$	$1,12 \times 10^{-4}$

Cuadro 1: Comparación entre la función Gamma obtenida por la implementación recursiva y el valor real calculado con **WolframAlpha**.

5. Modelo masa-resorte con derivada fraccional

El modelo masa-resorte amortiguado clásico se representa por medio de la ecuación diferencial ordinaria dada por:

$$m\ddot{x}(\tau) + \mu\dot{x}(\tau) + kx(\tau) = 0,$$

con masa m , constante de amortiguamiento μ y rigidez k . Para extenderlo a orden fraccional, se considera

$$D_{\tau}^{\alpha} x(\tau) + 2\sigma D_{\tau}^{\beta} x(\tau) + x(\tau) = 0, \quad 1 < \alpha \leq 2, \quad 0 < \beta \leq 1,$$

donde D_{τ}^{α} y D_{τ}^{β} es la derivada fraccional de Caputo para α y β , y con condiciones iniciales $x(0) = 1$, $\dot{x}(0) = 0$.

La solución usando la transformada de Laplace, se expresa en términos de la función de Mittag-Leffler con tres parámetros:

$$x(\tau) = \sum_{r=0}^{\infty} (-2\sigma)^r \tau^{(\alpha-\beta)r} E_{\alpha, 1+(\alpha-\beta)r}^{r+1}(-\tau^{\alpha}) + 2\sigma \tau^{\alpha-\beta} \sum_{r=0}^{\infty} (-2\sigma)^r \tau^{(\alpha-\beta)r} E_{\alpha, 1+(\alpha-\beta)(r+1)}^{r+1}(-\tau^{\alpha}).$$

Para $\alpha = 2$ y $\beta = 1$, se recupera el sistema clásico amortiguado:

$$x(\tau) = e^{-\sigma\tau} \left(\cos(\omega\tau) + \frac{\sigma}{\omega} \sin(\omega\tau) \right),$$

donde $E_{\alpha,\beta}^{\gamma}(z)(\cdot)$ son funciones de Mittag-Leffler con tres parámetros. En el caso clásico $\alpha = 2, \beta \rightarrow 0$ y sin amortiguamiento, se recupera la clásica solución $x(t) = x_0 \cos(\omega t)$. Los coeficientes de la serie de Mittag-Leffler, involucran directamente a la función Gamma dado que:

$$E_{\alpha,\beta}^{\gamma}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\gamma)_k}{\Gamma(\alpha k + \beta)k!} z^k, \quad (\gamma)_k = \frac{\Gamma(\gamma + k)}{\Gamma(\gamma)},$$

donde $(\gamma)_k$ es el *símbolo de Pochhammer*. De esta manera, el modelo masa-resorte fraccional usa la función Gamma en las soluciones de la ecuación fraccional masa-resorte amortiguado. Las simulaciones computacionales en Python donde se usa nuestra aproximación en la solución de la ecuación diferencial fraccional son:

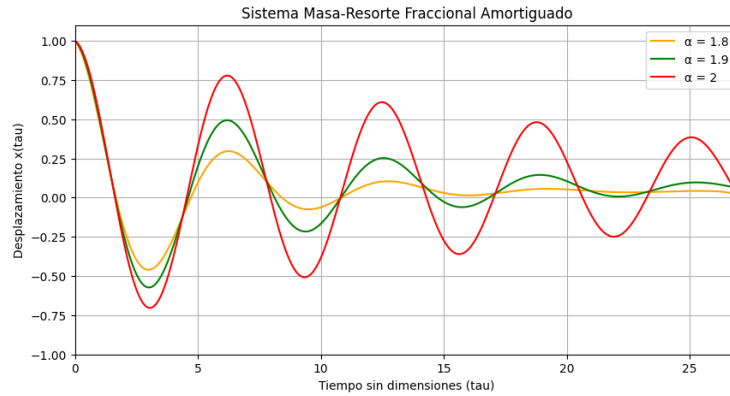


Figura 1: Gráfica sistema Masa-Resorte fraccional amortiguado

6. Conclusión

La función Gamma puede ser aproximada para números complejos, en este trabajo se realizó una implementación realizada en Python y comparada contra WWolfranAlpha, obteniendo buenas aproximaciones. Lo anterior sirvió para simular las soluciones de ecuaciones fraccionales en términos de la función de Mittag-Leffler. Los fenómenos oscilatorios pueden ser representados usando la memoria de la derivada fraccional, dando información física del mismo que no se puede obtener con el estudio de la derivada de orden entero. Un trabajo a realizar es usar esta aproximación para una ecuación diferencial ordinaria fraccional con variable compleja.

7. Agradecimientos

A la Universidad Militar Nueva Granada, en particular a la vicerrectoría de investigaciones por el apoyo en la realización del proyecto de investigación científica PIC-CIAS 4192.

Referencias

- [1] O. KEITH B, S. JEROME, *The Fractional Calculus: Theory and Applications of Differentiation and Integration to Arbitrary Order*. Dover Publications INC, 2006.
- [2] A. R. GÓMEZ PLATA, E. CAPELAS DE OLIVEIRA, *Introducción al cálculo fraccional*, Editorial Neogranadina, 2019.
- [3] K. S. MILLER, B. ROSS, *An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations*, Wiley, 1993.
- [4] A. LARRY, *Special Functions of Mathematics for Engineers*, 2nd edition, Oxford University Press, 1998.
- [5] B. RICHARD, W. RODERICK, *Special Functions and Orthogonal Polynomials*, Cambridge University Press, 2016.
- [6] D. LOKENATH, B. DAMBARU, *Integral transforms and their applications*, CRC Press, 2015.
- [7] M. WILHELM, O. FRITZ, T. FRANCESCO, B. DAVID, W. MARIA, E. ARTHUR, *Higher Transcendental Functions*, Vol I, McGraw-Hill Book Company, INC, 1953.
- [8] BIOLEK, DALIBOR AND GARRAPPA, ROBERTO AND MAINARDI, FRANCESCO AND POPOLIZIO, MARINA, *Derivatives of Mittag-Leffler functions: theory, computation and applications*, Nonlinear Dynamics. **08** (2025):1–15. Doi:10.1007/s11071-025-11682-3.
- [9] ROGOSIN, SERGEI. GIRALDI, FILIPPO. MAINARDI, FRANCESCO, *On the Laplace transforms of derivatives of special functions with respect to parameters*. arXiv:2507.02889 (2025).
- [10] VAZ, J. OLIVEIRA, EDMUNDO, *On fractional differential equations, dimensional analysis, and the double gamma function*. arXiv:2506.00026 (2025).

3.28 Estudio numérico de un sistema de EDP describiendo el crecimiento de cáncer prostático

Juan D. Ríos Colmenares¹, Diego A. Rueda Gómez²

Resumen

En este póster se presenta el estudio numérico de un modelo de crecimiento del cáncer de próstata que incorpora los mecanismos de quimioterapia y terapia antiangiogénica. El modelo se basa en un sistema de ecuaciones diferenciales parciales (EDPs) que describen la dinámica tumoral mediante un enfoque de campo de fase, la concentración de nutrientes y la producción del antígeno prostático específico (PSA). Para el diseño del esquema numérico se emplea el método de los Elementos Finitos; y se prueban algunas propiedades cualitativas tales como: su buen planteamiento, estimaciones puntuales para las soluciones discretas, estimaciones de energía, y el comportamiento asintótico de las soluciones numéricas, mostrando convergencia hacia estados estacionarios bajo ciertas condiciones. Las simulaciones numéricas ilustran la progresión del tumor en distintos escenarios biológicos y terapéuticos, incluyendo variaciones en la difusión de nutrientes, tasas de invasión tumoral y eficacia del tratamiento. Los resultados destacan la capacidad del modelo para capturar dinámicas tumorales complejas y el potencial de las terapias combinadas en el control del crecimiento canceroso.

Palabras & frases claves: Elementos finitos, Comportamiento asintótico, Cáncer prostático, Estimaciones puntuales, Estimaciones de energía.

1. Introducción

El cáncer de próstata (PCa por sus siglas en inglés) es uno de los tipos de cáncer más frecuente; específicamente, es el segundo tipo de cáncer más común en el género masculino a nivel mundial según la Organización Mundial de la Salud ([1]). En la mayoría de los casos, el PCa es un adenocarcinoma, que es una forma de cáncer que comienza a crecer en el tejido epitelial de la próstata, y su crecimiento y evolución dependen de diversos factores entre los que se encuentran algunas alteraciones genéticas que lo inician y las condiciones microambientales del tumor. Así mismo, un proceso clave en el crecimiento tumoral es la angiogénesis inducida por el tumor, que consiste en el crecimiento de nuevos vasos sanguíneos a partir de los preexistentes mediante señales químicas producidas por el tumor.

Podría decirse que, la mejor manera de combatir el cáncer de próstata es mediante la prevención y la realización de exámenes regulares para lograr una pronta detección, los cuales principalmente son exámenes rectales periódicos (DREs) y pruebas de antígeno prostático específico (PSA por sus siglas en inglés). Cuando un paciente es diagnosticado con PCa, se le prescribe usualmente terapia de privación de andrógenos o quimioterapia basada en drogas citotóxicas, las cuales obstruyen el crecimiento del tumor, inhibiendo la proliferación celular y promoviendo la muerte de células tumorales. Actualmente se está investigando la terapia antiangiogénica para PCa, que consiste en realizar

¹Universidad Industrial de Santander. Correo: juan2210684@correo.uis.edu.co

²Universidad Industrial de Santander. Correo: diaruego@uis.edu.co

una acción antitumoral mediante la inhibición de la vascularización del tumor e impidiendo que se le aporten los nutrientes necesarios para su crecimiento y desarrollo.

Ahora bien, desde el punto de vista matemático, el modelado y la simulación computacional del cáncer han demostrado ser prometedores para ampliar la comprensión de estas patologías, así como para pronosticar el crecimiento de tumores y los resultados de algunos tratamientos. En este contexto, varios estudios se han centrado en estudiar los efectos de la quimioterapia sobre los tumores a través de modelos matemáticos y simulaciones computacionales. De manera específica, en lo que respecta al cáncer de próstata, en [2] se propone y se estudia teóricamente un modelo matemático que consiste en un sistema de Ecuaciones Diferenciales Parciales (EDP) para modelar la dinámica del cáncer prostático en presencia de quimioterapia y terapia antiangiogénica. Teniendo en cuenta lo anterior, en este póster se presenta el estudio numérico (basado en el método de los Elementos Finitos) del sistema propuesto en [2].

2. Desarrollo

Este póster se enfoca en el estudio numérico del siguiente sistema de EDP:

$$\begin{cases} \varphi_t - \lambda \Delta \varphi + 2\varphi(1 - \varphi)f(\varphi, \sigma, u) = 0, & \text{en } Q_T, \\ \sigma_t - \eta \Delta \sigma + \gamma_h \sigma + (\gamma_c - \gamma_h)\sigma \varphi = S_h + (S_c - S_h)\varphi - s\varphi, & \text{en } Q_T, \\ p_t - D \Delta p + \gamma_p p = \alpha_h + (\alpha_c - \alpha_h)\varphi, & \text{en } Q_T, \\ \varphi = 0, \quad \frac{\partial \sigma}{\partial n} = \frac{\partial p}{\partial n} = 0, & \text{sobre } \Sigma_T, \\ \varphi(0) = \varphi_0, \sigma(0) = \sigma_0, p(0) = p_0, & \text{en } \Omega, \end{cases} \quad (1)$$

con $Q_T := \Omega \times (0, T)$ y $\Sigma_T := \partial\Omega \times (0, T)$; donde Ω es un dominio acotado de $\mathbb{R}^n$ ($n = 2, 3$), con frontera $\partial\Omega$. En (1), las incógnitas son φ , σ y p , que denotan la función de campo de fase (la cual, teniendo en cuenta sus dos fases, representa la coexistencia de los tejidos tumorales ($\varphi \approx 1$) y sanos ($\varphi \approx 0$)), la concentración de un nutriente genérico y la concentración de PSA, respectivamente. Así mismo, $\lambda, \eta > 0$ son constantes de difusión de las células tumorales y el nutriente. Las constantes positivas γ_h, γ_c, S_h y S_c representan las tasas de absorción y suministro de nutrientes en el tejido sano y canceroso. Finalmente, $D > 0$ es la constante de difusión del antígeno prostático, $\gamma_p > 0$ es la tasa de decaimiento del PSA, y los parámetros positivos α_h y α_c denotan las tasas de producción de PSA en el tejido sano y canceroso, respectivamente. Así mismo, en lo que respecta a las funciones en (1), $f(\varphi, \sigma, u)$ describe los efectos de movilidad del tumor y de la terapia citotóxica, $u(t)$ representa el efecto inhibitorio en el tumor de una droga citotóxica, mientras que $s(t)$ representa los efectos de la terapia antiangiogénica.

Desde el punto de vista teórico, en [2], se prueba la existencia y unicidad de solución débil del sistema (1), satisfaciendo las siguientes estimaciones puntuales y de energía:

Si $[\varphi_0, \sigma_0, p_0] \in L^2(\Omega) \times L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$ con $0 \leq \varphi_0(x) \leq 1$ c.t.p. $x \in \Omega$, entonces

$$0 \leq \varphi(t, x) \leq 1 \quad \text{c.t.p. } (t, x) \in Q_T. \quad (2)$$

Si $[\sigma_0, p_0] \in L^\infty(\Omega) \times L^\infty(\Omega)$, entonces $[\sigma, p] \in L^\infty(Q_T) \times L^\infty(Q_T)$. Además, si $\sigma_0(x) \geq 0$, $p_0(x) \geq 0$ c.t.p. $x \in \Omega$, y $s(t, x) \leq S_c$ c.t.p. $(t, x) \in Q_T$, entonces

$$\sigma(t, x) \geq 0, \quad p(t, x) \geq 0 \quad \text{c.t.p. } (t, x) \in Q_T. \quad (3)$$

Si $[\varphi_0, \sigma_0, p_0] \in H_0^1(\Omega) \times H^1(\Omega) \times H^1(\Omega)$, la solución satisface la siguiente estimación de energía

$$\|\varphi\|_{X_0} + \|\sigma\|_X + \|p\|_X \leq C \left(\|\varphi_0\|_{H_0^1(\Omega)}^2 + \|\sigma_0\|_{H^1(\Omega)}^2 + \|p_0\|_{H^1(\Omega)}^2 + \|u\|_{L^2(Q_T)}^2 + \|s\|_{L^2(Q_T)}^2 + 1 \right), \quad (4)$$

donde

$$\begin{aligned} X_0 &:= W^{1,2}(0, T; L^2(\Omega)) \cap C([0, T]; H_0^1(\Omega)) \cap L^2(0, T; H^2(\Omega)), \\ X &:= W^{1,2}(0, T; L^2(\Omega)) \cap C([0, T]; H^1(\Omega)) \cap L^2(0, T; H^2(\Omega)). \end{aligned}$$

Adicionalmente, en [1], se estudió teóricamente el comportamiento asintótico del modelo (1). En particular, se demostró que si $\lambda \geq C(\alpha_c, \alpha_h, \gamma_p, \gamma_h, \gamma_c, S_h, S_c, \|f\|_\infty, \|s\|_\infty, \|\sigma_\infty\|_\infty)$, existen constantes $\beta, C > 0$ tales que

$$\|\varphi(t)\|_{L^2(\Omega)} + \|\sigma(t) - \sigma_\infty\|_{L^2(\Omega)} + \|p(t) - p_\infty\|_{L^2(\Omega)} \leq C e^{-\beta t}, \quad (5)$$

lo cual, en particular, implica que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left(\|\varphi(t)\|_{L^2(\Omega)} + \|\sigma(t) - \sigma_\infty\|_{L^2(\Omega)} + \|p(t) - p_\infty\|_{L^2(\Omega)} \right) = 0, \quad (6)$$

donde $[\sigma_\infty, p_\infty]$ es solución fuerte del siguiente problema estacionario relacionado con (1) (para $\varphi_\infty = 0$):

$$\begin{cases} -\eta \Delta \sigma_\infty + \gamma_h \sigma_\infty = S_h & \text{en } \Omega, \\ -D \Delta p_\infty + \gamma_p p_\infty = \alpha_h & \text{en } \Omega, \\ \frac{\partial \sigma_\infty}{\partial n} = \frac{\partial p_\infty}{\partial n} = 0 & \text{sobre } \partial \Omega. \end{cases} \quad (7)$$

Partiendo de estos resultados teóricos obtenidos previamente en la literatura, en este póster se aborda el estudio numérico del sistema (1). Las principales contribuciones de este trabajo son ([3]):

- En primer lugar, el planteamiento de un esquema numérico basado en el método de los Elementos Finitos para aproximar la solución débil del modelo (1), garantizando su buen planteamiento y verificando (a nivel discreto) las estimaciones (2)-(4).
- En segundo lugar, el estudio del comportamiento asintótico de las soluciones del esquema numérico planteado, obteniendo estimaciones análogas a (5)-(6) a nivel discreto.
- Finalmente, la implementación computacional del esquema mediante software especializado, y la realización de simulaciones numéricas.

Referencias

- [1] T. Biswas, E. Rocca, *Long time dynamics of a phase-field model of prostate cancer growth with chemotherapy and antiangiogenic therapy effects*. Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B, **27**(5) (2022):2455–2469.

- [2] P. Colli, H. Gomez, G. Lorenzo, G. Marinoschi, A. Reali, E. Rocca, *Mathematical analysis and simulation study of a phase-field model of prostate cancer growth with chemotherapy and antiangiogenic therapy effects*. Math. Models Methods Appl. Sci., **30**(7) (2020):1253–1295.
- [3] J. D. Ríos-Colmenares, D. A. Rueda-Gómez, *Numerical study of a differential system modeling prostate cancer growth including chemotherapy and antiangiogenic therapy*. Preprint, 2025.

3.29 Funciones casi periódicas: teorías y aplicaciones

Santiago Quimbayo R.¹, Oscar A. Ramírez C.²

Resumen

En este póster estudiamos las funciones casi periódicas, una generalización fundamental de las funciones periódicas clásicas. Estas funciones satisfacen la ecuación $f(x + \tau) = f(x)$ de forma aproximada para infinitos valores de τ distribuidos densamente en la recta real. Presentamos su definición precisa, propiedades clave como la estabilidad bajo operaciones algebraicas y analíticas, y su conexión con series de Fourier generalizadas.

Palabras & frases claves: Funciones casi periódicas, series de Fourier generalizadas, análisis armónico, ecuaciones diferenciales

1. Introducción

Las funciones casi periódicas constituyen una generalización fundamental del concepto clásico de periodicidad en el análisis matemático. Mientras que una función periódica satisface exactamente la relación $f(x + T) = f(x)$ para algún período fijo T y todo x , las funciones casi periódicas cumplen esta condición de manera aproximada, pero con una estructura rica y bien definida.

Una función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ se denomina *casi periódica* si el conjunto de los números de traslación es relativamente denso.

Formalmente, una función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ se denomina *casi periódica* si para todo $\epsilon > 0$ existe un conjunto relativamente denso de números reales τ (llamados *números de traslación*) tales que

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x + \tau) - f(x)| \leq \epsilon.$$

Esta condición significa que los “cuasi-períodos” τ están distribuidos de manera suficientemente uniforme a lo largo de toda la recta real.

El estudio sistemático de estas funciones fue iniciado por el matemático danés Harald Bohr en la década de 1920, aunque algunos casos particulares ya habían sido considerados anteriormente por Bohl y Esclangon. La teoría fue posteriormente desarrollada y generalizada por importantes matemáticos como Wiener, von Neumann, Stepanov y Besicovitch.

Entre las propiedades más notables de las funciones casi periódicas se encuentran:

- **Periodicidad y Casi-periodicidad:** Si f es una función periódica continua, entonces f es uniformemente casi-periódica.
- **Estabilidad algebraica:** La suma, producto y composición de funciones casi periódicas resulta en otra función casi periódica.

¹Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Correo: squimbayor@udistrital.edu.co

²Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Correo: osaramirez@udistrital.edu.co

- **Estabilidad analítica:** El límite uniforme de una sucesión de funciones casi periódicas es casi periódico
- **Desarrollo en serie:** Toda función casi periódica admite un desarrollo en serie de Fourier generalizada de la forma

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{i\lambda_n x}$$

- **Fórmula de Parseval:** Para toda función casi periódica se cumple que

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T |f(x)|^2 dx = \sum_{n=1}^{\infty} |A_n|^2$$

El teorema de Riesz-Fischer para funciones casi periódicas establece que toda serie trigonométrica $\sum A_n e^{i\lambda_n x}$ con $\sum |A_n|^2 < \infty$ es efectivamente la serie de Fourier de alguna función casi periódica, lo que demuestra la completitud de este espacio funcional.

Las aplicaciones de las funciones casi periódicas son numerosas e incluyen:

- Teoría de ecuaciones diferenciales ordinarias y en derivadas parciales
- Sistemas dinámicos y teoría ergódica
- Física matemática, particularly en problemas de oscilaciones y teoría de ondas
- Teoría de números y análisis armónico

En este trabajo presentaremos los aspectos fundamentales de la teoría de funciones casi periódicas, con especial énfasis en sus propiedades básicas, su representación mediante series de Fourier generalizadas y algunas de sus aplicaciones más relevantes.

2. Estructura de la presentación

- 1. Introducción:** Motivación, Objetivo, Antecedentes: Bohr, Bohl, Stepanoff
- 2. Definición Clave:** $\forall \varepsilon > 0, \exists \tau$ densos, $|f(x + \tau) - f(x)| < \varepsilon$, Conjuntos relativamente densos
- 3. Propiedades:** Algebraicas: suma, producto, composición; Analíticas: límites uniformes, derivación; Teorema de unicidad
- 4. Series de Fourier:** $f(x) \sim \sum A_n e^{i\lambda_n x}$, Parseval: $M\{|f|^2\} = \sum |A_n|^2$

Referencias

- [1] A. S. BESICOVITCH, *Almost periodic functions*. Dover Publications, 1954.
- [2] W. A. COPPEL, *Dichotomies in Stability Theory*. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 629. Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg, 1978.

3.30 Modelado numérico del transporte de contaminantes atmosféricos mediante Level Set y análisis de velocidad en entornos urbanos

Jenifer Paola Diaz Sanchez¹, Laura Estefania Triviño Venegas ,
Isnardo Arenas Navarro , Neil Guerrero Gonzalez

Resumen

En este trabajo se presenta una simulación numérica del transporte de contaminantes en el aire dentro de un dominio poroso y heterogéneo, considerando la velocidad y dirección del viento y la presencia de edificaciones. El modelo se basa en la resolución de un potencial que genera el campo de velocidades, el cual se ve modificado por la distribución de obstáculos. La propagación del contaminante se representa mediante el método Level Set.

Se implementó un esquema de diferencias finitas en MATLAB y se realizaron pruebas preliminares en un dominio bidimensional. Para la simulación, se emplearon velocidades reales obtenidas de una base de datos, tanto en su magnitud como en su dirección, lo que permite aproximar de manera más precisa el comportamiento del flujo. Los resultados muestran cómo el contaminante se desplaza siguiendo el campo de viento y la interacción con las regiones de distinta permeabilidad.

Palabras & frases claves: Transporte de contaminantes, Ley de Darcy, Level Set.

1. Introducción

La dispersión de contaminantes atmosféricos en entornos urbanos constituye un problema de gran relevancia, especialmente en situaciones de emergencia como incendios, fugas químicas o explosiones. En estos escenarios, la geometría del entorno construido y las condiciones del viento influyen significativamente en la trayectoria y la velocidad de propagación del contaminante. Contar con herramientas numéricas capaces de predecir de manera rápida y precisa las zonas posiblemente afectadas resulta fundamental para apoyar decisiones de evacuación, mitigación del riesgo y gestión de emergencias.

Para abordar este problema, en este trabajo se desarrolla una simulación numérica del transporte de un contaminante en el aire dentro de un dominio bidimensional caracterizado por la presencia de edificaciones y regiones con diferentes niveles de permeabilidad. El modelo considera dos “fluido”: uno que representa el aire y otro que representa el contaminante durante un siniestro. Las edificaciones y demás obstáculos se identifican mediante un proceso de clasificación basado en K-Means aplicado a imágenes satelitales, lo que permite asignar distintas propiedades de difusividad a zonas de edificios, vegetación y zonas libres.

El modelo se fundamenta en la Ley de Darcy, la cual establece que la velocidad de un fluido en un medio poroso es proporcional al gradiente de presión e inversamente proporcional a la viscosidad,

¹Universidad Militar Nueva Granada. Correo: est.jenifer.diaz@gmail.com

modulada por la permeabilidad del medio. Aunque en este trabajo no se calcula explícitamente el gradiente de presión para obtener la velocidad, la ley es esencial porque determina la estructura matemática que rige la distribución espacial de la permeabilidad y condiciona la forma en que el flujo atraviesa zonas con distinta resistencia.

El flujo del aire se modela resolviendo una ecuación de Difusión Estacionaria (un problema de Laplace modificado), obteniendo un campo potencial el cual se usa posteriormente para la función de Level Set en la advección. Este potencial, aunque no se utiliza directamente para obtener un gradiente de presión en sentido estricto, permite capturar el efecto de la heterogeneidad del dominio. Además, el transporte del contaminante se describe mediante el método Level Set, empleando un esquema de Upwind para la discretización y una ecuación de reinicialización que mantiene la correcta definición de la distancia. El proceso no incluye difusión, puesto que el fenómeno de interés corresponde a un transporte dominado por advección.

Una característica central del modelo es que la advección del contaminante se realiza utilizando un campo de velocidades real, cuya magnitud y dirección se obtienen de bases de datos meteorológicas proporcionadas por la plataforma Windy. De esta manera, la simulación no depende exclusivamente de un campo derivado del potencial numérico, sino que integra información real para predecir la trayectoria del contaminante.

El objetivo final de este trabajo es proporcionar una herramienta capaz de estimar, de forma rápida y predecible, las zonas afectadas por un contaminante en caso de un siniestro, integrando información real del viento y las propiedades del medio. Los resultados preliminares muestran cómo el contaminante se desplaza siguiendo las velocidades atmosféricas impuestas y cómo interactúa con zonas de distinta difusividad, lo que evidencia la viabilidad del enfoque propuesto para aplicaciones futuras en gestión del riesgo y planificación urbana.

Referencias

- [1] TANG, Y., CHEN, S., & JIANG, Q. *A conservative SPH scheme using exact projection with semi-analytical boundary method for free-surface flows*. Applied Mathematical Modelling, **82** (2020):607–635.
- [2] CHAMORRO, D. I. *Ecuación de Transporte*. Amarun.org. 2025. Recuperado de: https://www.amarun.org/images/amarun/materiales/EDP/edp/Leccion_3.pdf.
- [3] OÑATE, A., VALLS, J. G. *El método de Level Set: Revisión y nuevas propuestas*. Scipedia. 2004. https://www.scipedia.com/wd/images/a/a6/Valls_et_al_2004a_6852_PI254.pdf.
- [4] HERRERA-HERNÁNDEZ, E. C., CORTÉS-MARTÍNEZ, R., VALDÉS-LÓPEZ, A., ALONZO-GARCÍA, A., & AGUILAR-MADERA, C. G. *Análisis comparativo de soluciones numéricas y semi-numéricas de un modelo de advección-difusión*. Revista Tecnológica, **19**(1) (2023):1–13.
- [5] MONTENEGRO, D. *Ecuación de difusión en distintos sistemas coordenados*. Universidad de los Andes, 2017.

- [6] JAIN, A. K. *Data clustering: 50 years beyond K-means*. Pattern Recognition Letters, **31**(8) (2010):651–664.
- [7] MACQUEEN, J. B, *Some Methods for Classification and Analysis of Multivariate Observations*. En: Proceedings of the Fifth Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability, Vol. 1, pp. 281–297. University of California Press, Berkeley, 1967.
- [8] LEVEQUE, R. J. *Finite Difference Methods for PDEs*. SIAM, 2007.
- [9] BEAR, J. *Modeling flow and contaminant transport in fractured ground water systems*. Springer, 2013.

3.31 Ramificación, Bifurcación y Longitud del Sistema Vascular, visto desde las Ecuaciones de Navier-Stokes

Jefferson Sneyder Moreno Toloza¹, Élder Jesús Villamizar Roa²

Resumen

Este póster pretende mostrar una aplicación concreta de las ecuaciones de Navier-Stokes para analizar, desde una perspectiva matemática, la ramificación y bifurcación de los vasos sanguíneos, así como explorar la optimización del ángulo de bifurcación en el sistema vascular mediante el análisis de los ángulos de ramificación. El estudio se basa en una disertación del trabajo de John A. Adam [1] y de Wilhelm Roux [2], en donde, considerando las ecuaciones de Navier-Stokes en geometrías cilíndricas, y fluidos paralelos, se formularon tres leyes empíricas sobre las relaciones óptimas entre ángulos y radios en bifurcaciones vasculares, y se estimaron el número total de bifurcaciones, la longitud total del sistema vascular y el aumento promedio en el área de una sección transversal a lo largo de una bifurcación.

Palabras & frases claves: Ecuaciones de Navier-Stokes, Ramificación, Bifurcación, Flujo sanguíneo, Fluidos de Poiseuille.

1. Introducción

El estudio del sistema vascular desde una perspectiva matemática ha despertado un gran interés en diversas disciplinas, incluyendo la biomedicina, la física aplicada y la ingeniería. Este sistema, compuesto por arterias, venas y capilares, desempeña un papel crucial en el transporte de sangre desde el corazón hacia los tejidos y su posterior retorno. La compleja estructura de los vasos sanguíneos y su ramificación desempeñan un papel esencial en la optimización del flujo sanguíneo, lo que ha motivado el desarrollo de modelos matemáticos para comprender su organización y dinámica. La longitud combinada de todos estos dominios es considerable. De hecho, en **1967**, el biólogo matemático **Robert Rosen** [4] estimó que la longitud total de los vasos sanguíneos en grandes mamíferos alcanza aproximadamente 50,000 millas. Este análisis se inscribe dentro de la teoría de las ecuaciones de Navier-Stokes en dominios cilíndricos, proporcionando así una base teórica robusta para el análisis del flujo sanguíneo en el sistema vascular. Se consideran modelos que integran tanto la resistencia hidráulica como los costos asociados al mantenimiento estructural de la red vascular, lo que permite evaluar la eficiencia del sistema desde una perspectiva matemática y biológica. Adicionalmente, se estima el número total de bifurcaciones, la longitud global del sistema vascular y el incremento promedio del área de la sección transversal a lo largo de cada bifurcación.

El análisis inicia con el estudio de un vaso sanguíneo más pequeño que se ramifica a partir de uno principal, modelado como un conducto recto. La **Figura 1** ilustra esta configuración básica: un vaso sanguíneo principal de radio r_1 , del que emerge un vaso más estrecho de radio r_2 , con $r_2 < r_1$, formando un ángulo θ con respecto al eje del primero. Se establecen los puntos A , B y C como referencia, con BC perpendicular a AC y las distancias $c = |AC|$ y $b = |BC|$. La elección del ángulo θ determina la ubicación del punto O y las longitudes $L_1 = |AO|$ y $L_2 = |OB|$.

¹Universidad Industrial de Santander. Correo: jefferson2220961@correo.uis.edu.co

²Universidad Industrial de Santander. Correo: jvillami@uis.edu.co

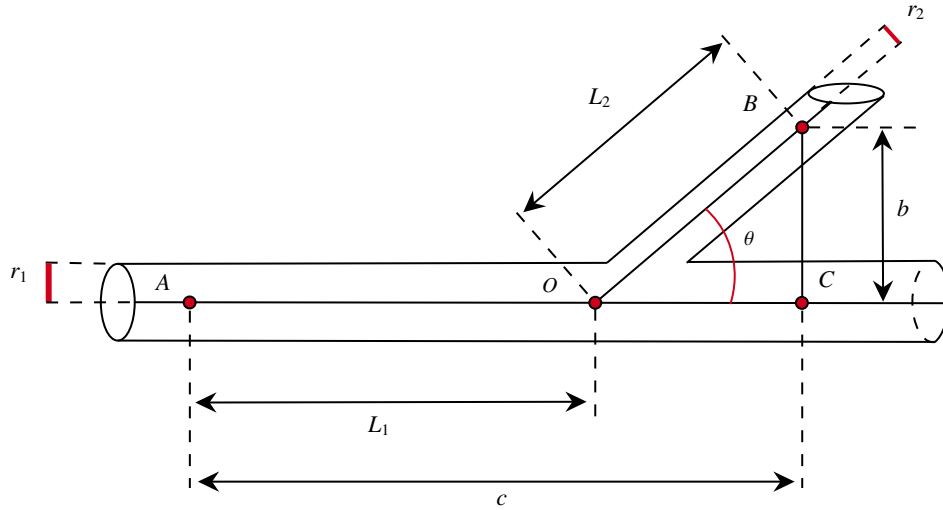


Figura 1: Ramificación de un vaso sanguíneo desde una arteria

A partir de este modelo inicial, el análisis se extiende a una bifurcación de tres ramas, como se muestra en la **Figura 2**. En este caso, la ubicación del punto O en el mismo plano determina los ángulos de ramificación ϕ y θ . Los radios y longitudes de los vasos AO , OB y OC se denotan respectivamente como (r_0, L_0) , (r_1, L_1) y (r_2, L_2) .

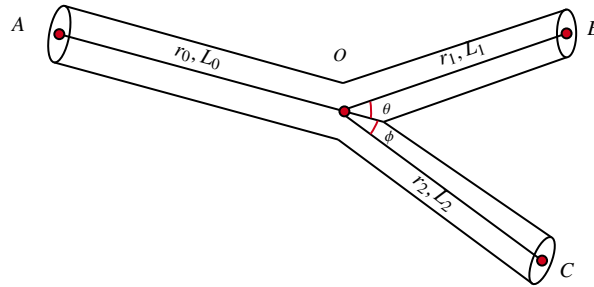


Figura 2: Bifurcación de un vaso sanguíneo

Este planteamiento permite estudiar la optimización del ángulo de bifurcación $\phi + \theta$. Además, se examina la aplicación de estos modelos para estimar el número total de bifurcaciones necesarias para reducir el diámetro desde una aorta de radio r_a hasta un capilar de radio $5 \times 10^{-4} \text{ cm}$, considerando bifurcaciones sucesivas. Asimismo, se estudia la longitud total del sistema vascular y el aumento promedio en el área de la sección transversal en una bifurcación arterial. Finalmente, este mismo procedimiento se adapta al estudio de fluidos no newtonianos.

Referencias

- [1] J. A. ADAM, *Blood Vessel Branching Beyond the Standard Calculus Problem*, Mathematics Magazine. **84**(3) (2011):196–207.
- [2] W., ROUX, Doctoral thesis on the bifurcation of blood vessels. Universität Jena, 1878.
- [3] D'ARCY W. THOMPSON, *On Growth and Form*. Dover, New York, 1992.
- [4] R. ROSEN, *Optimality Principles in Biology*. Butterworth, London, 1967.

3.32 Una ecuación semilineal de la viga con condiciones de voladizo usando el cálculo de variaciones

Valeria Montañó Moreno¹, Julián David Vera Varela²

Resumen

En el presente trabajo estudiamos el problema de la viga semilineal con condiciones de voladizo dado por

$$\begin{cases} u^{(iv)}(x) = f(u(x)) \\ u(0) = u'(0) = 0 \\ u''(1) = u'''(1) = 0. \end{cases}$$

donde f es una función real con derivada pequeña. Haciendo un análisis de la deformación local de la viga y considerando las fuerzas que actúan sobre ésta, formulamos el funcional de energía potencial. Finalmente encontramos una solución a este problema usando métodos del cálculo variacional.

Este trabajo cuenta con financiamiento parcial de la Oficina de Investigaciones de la Universidad Distrital Francisco José de Caldas (proyecto PIS-2025-2063)

Palabras & frases claves: Cálculo de variaciones, ecuación de la viga, ecuaciones de Euler Lagrange.

Referencias

- [1] MARK KOT, *A First Course in the Calculus of Variations*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2014, pp. 71–76.
- [2] GELFAND I.M., FOMIN S.V., *Calculus of variations*. Advanced Nonlinear Studies, 1963.
- [3] M.R. GROSSINHO, T.F. MA, *Symmetric Equilibria for a Beam with a nonlinear elastic foundation*. Portugaliae Mathematica, 1994.

¹Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Correo: vmontanom@udistrital.edu.co

²Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Correo: jdverav@udistrital.edu.co

EDUCACIÓN MATEMÁTICA



Grupo EDUMAT

EDUMAT UIS es un Grupo de Investigación y Extensión en Educación Matemática conformado por estudiantes, profesores y egresados de la UIS, profesores de colegios y universidades de Santander; busca el mejoramiento de la calidad de la educación matemática del departamento y del país, participando y aportando en alguna de sus líneas de investigación y extensión para el desarrollo profesional y personal de sus integrantes y la comunidad educativa del nororiente colombiano. Tiene reconocimiento departamental, nacional e internacional, traducidos en la Acreditación de Calidad de la Licenciatura en Matemáticas, dada por 6 años por el CNA, y en la obtención de la Categoría A1 de la Convocatoria Nacional 833.

4.1 Programas efectivos de desarrollo profesional docente en matemática: una revisión sistemática en Latinoamérica

Elisabeth Ramos-Rodríguez¹

Resumen

La formación continua de profesores de matemáticas constituye un eje central para mejorar la calidad de la enseñanza en Latinoamérica, donde los programas de Desarrollo Profesional Docente (DPD) buscan fortalecer las prácticas pedagógicas y el aprendizaje escolar. En este contexto, el objetivo del estudio es identificar y caracterizar los programas de DPD efectivos en educación matemática implementados en la región, considerando su distribución temporal y geográfica, los investigadores destacados y los enfoques temáticos predominantes. La metodología PRISMA orientó el proceso de revisión sistemática en las bases de datos Web of Science y SCOPUS. Los resultados muestran avances relevantes, pero también brechas significativas en la cobertura de niveles educativos y en la representación de países.

Palabras & frases claves: desarrollo profesional docente, educación matemática, revisión sistemática, Latinoamérica.

1. Introducción

La formación continua de profesores de matemáticas constituye un eje central para mejorar la calidad de la enseñanza en Latinoamérica, donde los programas de Desarrollo Profesional Docente (DPD) buscan fortalecer tanto las prácticas pedagógicas como el aprendizaje escolar (Desimone y Pak, 2017). Sin embargo, la diversidad de iniciativas y la ausencia de marcos regulatorios comunes dificultan la evaluación de su efectividad (Ramos-Rodríguez et al., 2021).

En este contexto, surge la necesidad de analizar sistemáticamente la evidencia disponible para identificar programas efectivos de DPD en matemática y caracterizar sus principales rasgos.

2. Metodología

El estudio se desarrolló mediante una revisión sistemática siguiendo el protocolo PRISMA, asegurando rigurosidad en la selección y el análisis de la literatura (Sánchez-Serrano et al., 2022). Se diseñó una ecuación de búsqueda basada en términos del Tesauro UNESCO, incluyendo variaciones de matemática, docencia, programas formativos e impacto.

La búsqueda se realizó en las bases de datos Web of Science y SCOPUS, obteniéndose inicialmente 154 documentos. Tras el proceso de depuración y aplicación de criterios de inclusión y exclusión, se seleccionaron 24 estudios centrados específicamente en programas efectivos de DPD en educación matemática.

3. Resultados y discusión

¹ Pontificia Universidad Católica de Valparaíso.

Los resultados evidencian una producción científica irregular, con picos de publicación en los años 2016 y 2025. Chile lidera la investigación en este campo, concentrando el 39.1 % de los estudios, seguido por México y Brasil.

Los investigadores con mayor presencia son Ramos-Rodríguez, Felmer, Cerda y Morales-Maure, quienes abordan temáticas como impacto en la enseñanza, autoeficacia docente y modelamiento matemático. La mayoría de los trabajos se centra en educación primaria y secundaria, mientras que el nivel preescolar aparece escasamente representado.

4. Conclusiones

La revisión sistemática muestra avances importantes en el estudio de programas efectivos de desarrollo profesional docente en matemática en Latinoamérica. No obstante, persisten brechas significativas en la cobertura de niveles educativos y en la representación de países.

El fortalecimiento de líneas de investigación consolidadas y el desarrollo de marcos comunes permitirían orientar mejor los programas de DPD hacia transformaciones pedagógicas sostenibles, basadas en evidencia y con impacto tanto en el profesorado como en los estudiantes.

Referencias

- [1] BAUTISTA, A., & ORTEGA-RUIZ, R. *Desarrollo Profesional Docente: Perspectivas y Enfoques Internacionales*. Psychology, Society, & Education, **7**(3) (2015):343–355.
- [2] CERDA, G., PÉREZ, C., GIACONI, V., PERDOMO DÍAZ, J., REYES, C., & FELMER, P. *The effect of a professional development program workshop about problem solving*. Psychology, Society & Education. **9**(1) (2017):11–26
- [3] DESIMONE, L. M., & PAK, K. *Instructional coaching as high-quality professional development*. Theory Into Practice. **56**(1) (2017):3–12.
- [4] RAMOS-RODRÍGUEZ, E., BUSTOS, B., & MORALES, A. *Identification of the principles of effective professional development programs*. The International Journal of Science, Mathematics and Technology Learning, **29**(1) (2021):1–16.
- [5] RAMOS-RODRÍGUEZ, E., FERNÁNDEZ-AHUMADA, E., & MORALES-SOTO, A. *Effective teacher professional development programs*. Education Sciences, **12**(1) (2021):2.
- [6] SÁNCHEZ-SERRANO, S., PEDRAZA-NAVARRO, I., & DONOSO-GONZÁLEZ, M. *Cómo hacer una revisión sistemática siguiendo el protocolo PRISMA*. Bordón. Revista de Pedagogía, **74**(3) (2022):51–66.
- [7] TIMPERLEY, H., WILSON, A., BARRAR, H., & FUNG, I. *Teacher Professional Learning and Development*. Ministry of Education, Wellington, 2007.

4.2 Sistemas lineales para modelar el equilibrio de mercados bajo incertidumbre

V. Liern¹

Resumen

Se describen varios enfoques para modelar el equilibrio económico multiproducto bajo condiciones de incertidumbre. Las magnitudes económicas, como precios y cantidades, se expresan mediante números difusos triangulares y trapezoidales en sistemas de ecuaciones lineales, lo que permite describir intervalos de equilibrio en lugar de valores únicos. A través de ejemplos prácticos, como el mercado de café, té y leche en una empresa colombiana y el de productos de papelería en una empresa española, se demuestra que el enfoque difuso ofrece soluciones económicamente coherentes incluso cuando los datos son incompletos o inconsistentes. Los resultados evidencian que el equilibrio bajo incertidumbre se manifiesta como una región de estabilidad más que como un punto.

Palabras & frases claves: modelización, sistemas de ecuaciones difusos, equilibrio económico.

1. Introducción

En el siglo XIX, Léon Walras (1834–1910) estableció el principio de equilibrio general competitivo mediante la interacción entre oferta y demanda bajo el supuesto de información perfecta. Sin embargo, esta visión idealizada no refleja las condiciones reales del mercado, donde las estimaciones sobre precios, cantidades o elasticidades están sujetas a errores o percepciones subjetivas.

En esta propuesta, en lugar de asumir datos o incógnitas exactas, se utilizan números difusos para representar estas magnitudes, asumiendo que varían dentro de un rango plausible con distintos grados de verosimilitud. La teoría de los conjuntos difusos proporciona herramientas adecuadas para modelar esta incertidumbre, permitiendo manejar la imprecisión de forma paramétrica y realizar operaciones algebraicas consistentes.

Se mostrará, mediante ejemplos sencillos, cómo las herramientas de la lógica difusa combinadas con sistemas de ecuaciones lineales pueden aplicarse a problemas económicos de equilibrio, integrando conceptos básicos de matemáticas y teoría económica.

2. Desarrollo

El trabajo se estructura en tres bloques. En primer lugar, se presentan los fundamentos matemáticos de los sistemas lineales difusos, introduciendo las operaciones básicas con números difusos y su representación mediante intervalos o α -cortes.

En segundo lugar, se definen distintos tipos de sistemas difusos según el origen de la incertidumbre: en los coeficientes, en las variables o en todos los elementos del sistema. Cada categoría requiere un

¹Departamento de Matemáticas para la Economía y la Empresa, Universitat de València (España). Correo: vicente.liern@uv.es

tratamiento matemático distinto, pero todas comparten la idea de transformar los sistemas difusos en sistemas clásicos auxiliares de mayor dimensión.

En esta comunicación se hace especial énfasis en la aplicabilidad del método, presentando dos casos ilustrativos.

2.1. Caso I: Empresa multinacional colombiana de café

Se analiza el equilibrio de precios entre café, té y leche, productos interrelacionados donde el café actúa como producto principal, el té como sustituto y la leche como complemento. Las magnitudes económicas se modelan mediante números difusos triangulares, obteniéndose intervalos de precios de equilibrio coherentes con la incertidumbre presente en el mercado.

2.2. Caso II: Empresa española de papel

El segundo caso considera una empresa del sector papelerero que comercializa etiquetas, agendas y blocs de notas. Ante datos imprecisos e inconsistentes, el enfoque difuso permite identificar rangos de precios aceptables, ofreciendo soluciones económicamente viables incluso cuando los métodos tradicionales no proporcionan soluciones exactas.

En ambos casos, los resultados muestran que, bajo incertidumbre, los equilibrios no son puntos fijos sino regiones de estabilidad.

3. Conclusiones

El estudio demuestra que la teoría de conjuntos difusos aplicada a sistemas de ecuaciones lineales proporciona una visión más realista y flexible del equilibrio multiproducto. Los sistemas difusos generalizan los modelos deterministas, permiten trabajar con información incompleta y facilitan la obtención de soluciones interpretables.

Aunque la complejidad matemática y computacional aumenta, la ganancia en realismo y capacidad descriptiva justifica el uso de modelos difusos y abre nuevas líneas de investigación en economía, ingeniería y optimización.

Referencias

- [1] CARLSSON, C., & KORHONEN, P. *A parametric approach to fuzzy linear programming*. Fuzzy Sets and Systems, **20**(1) (1986):17–30.
- [2] DUBOIS, D., & PRADE, H. *Operations on fuzzy numbers*. International Journal of Systems Science, **9**(6) (1978):613–626.
- [3] KAUFMANN, A., & GUPTA, M. M. *Fuzzy mathematical models in engineering and management science*. Elsevier, 1988.
- [4] LIERN, V., PARADA-RICO, S. E., & CONDE-SOLANO, L. A. *Linear equation systems under uncertainty*. Mathematics, **13** (2025):2566.

- [5] PANDIT, S. G. *Fuzzy linear systems and their solutions*. Journal of Fuzzy Mathematics, **21**(3) (2013):701–714.
- [6] ZADEH, L. A. *Fuzzy sets*. Information and Control, **8**(3) (1965):338–353.

4.3 Desarrollo del talento matemático desde el enfoque STEM: una revisión sistemática

Alexander Betancur Sánchez¹, Dora Solange Roa Fuentes²

Resumen

En la comunicación se presentan los resultados de una revisión sistemática de la literatura en curso usando la metodología PRISMA. El estudio se desarrolla en el marco de una investigación doctoral en curso y busca sintetizar las principales contribuciones de las investigaciones sobre el desarrollo del talento matemático en la educación STEM en poblaciones en condición de vulnerabilidad sociocultural, priorizando particularmente a población en medida privativa de la libertad en los últimos cinco años (2020–2025).

Palabras & frases claves: desarrollo del talento matemático, educación STEM, vulnerabilidad.

1. Introducción

El desarrollo del talento tiene sus inicios en los trabajos de Francis Galton (1869), quien estableció una base empírica desde lo biológico y hereditario. A comienzos del siglo XXI se evidenció una proliferación de estudios sobre el desarrollo del talento desde diversas disciplinas, integrando perspectivas educativas, cognitivas, del desarrollo y socioculturales (Dai, 2023).

Desde la perspectiva sociocultural del desarrollo del talento matemático, Canché y Farfán (2017) consideran que este puede potenciarse al facilitar factores como recursos, calidad educativa, experiencias significativas y contextos de enriquecimiento del talento matemático.

2. Problemática

Revisiones sistemáticas de la literatura (Herce-Palomares et al., 2022) evidencian un interés creciente por el talento en STEM (Science, Technology, Engineering y Mathematics), especialmente al considerar variables asociadas al entorno y a condiciones de vulnerabilidad humana. De acuerdo con Castaños-Cervantes et al. (2024), la vulnerabilidad sociocultural está asociada a la pertenencia a determinados grupos, condiciones socioeconómicas, culturales o contextuales que incrementan la exposición a desigualdades.

En Colombia, dichas condiciones pueden conducir al abandono escolar y, en algunos casos, a procesos penales en adolescentes (García-Sánchez, 2025). El Sistema de Responsabilidad Penal para Adolescentes (SRPA), reglamentado por la Ley 1098 de 2006 y el Decreto 2383 de 2015, reconoce el derecho a la educación como un eje fundamental de resocialización.

Desde 2019, el Ministerio de Educación Nacional ha promovido la propuesta STEM+, orientada a cerrar brechas sociales y favorecer el desarrollo de competencias integrales (MEN, 2021). No

¹Universidad Industrial de Santander. Correo: albertsan@correo.uis.edu.co

²Universidad Industrial de Santander. Correo: doraroaf@uis.edu.co

obstante, son escasos los estudios que abordan el desarrollo del talento matemático en estudiantes en privación de la libertad desde el enfoque STEM.

El objetivo del estudio es sintetizar las principales contribuciones investigativas sobre el desarrollo del talento matemático en educación STEM en poblaciones en condición de vulnerabilidad socio-cultural, priorizando población privada de la libertad en los últimos cinco años.

3. Metodología

Se realiza una revisión sistemática de la literatura siguiendo la declaración PRISMA (Moher et al., 2009). Se consultaron las bases de datos WoS, Springer, Scopus, Taylor & Francis y Brill. Los términos de búsqueda incluyeron combinaciones de “Talent Development”, “Mathematics”, “STEM Education”, “STEAM Education” y “Prison Education”, delimitando el periodo 2020–2025.

Se definieron criterios de inclusión y exclusión, considerando estudios relacionados con desarrollo del talento matemático, educación STEM y contextos vulnerables. Tras el proceso de cribado se establecieron categorías emergentes a partir del análisis del contenido de las publicaciones seleccionadas.

4. Reflexiones finales

La educación constituye un derecho humano fundamental y la equidad en la educación STEM representa un medio para reducir desigualdades sociales (Lock & Mor, 2024). Los resultados preliminares evidencian la escasez de investigaciones que aborden el desarrollo del talento matemático en poblaciones privadas de la libertad bajo un enfoque STEM, especialmente en el contexto colombiano.

No obstante, se identifican experiencias internacionales que sugieren el potencial del enfoque STEM como estrategia para promover oportunidades educativas inclusivas en contextos de reclusión.

Referencias

- [1] DAI, D. Y. *Talent development from the perspective of developmental science*. Springer, 2023.
- [2] CANCHÉ, E. & FARFÁN, R. *El talento en matemáticas desde una perspectiva sociocultural*. La matematica e la sua didattica, **25**(2) (2017):97–118.
- [3] HERCE-PALOMARES, M. P., ROMÁN-GONZÁLEZ, M. & GIMÉNEZ-FERNÁNDEZ, C. *El talento STEM en la educación obligatoria*. Revista de Educación, **396** (2022):537–549.
- [4] MOHER, D., ET AL. *Preferred reporting items for systematic reviews and meta-analyses*. BMJ **339** (2009):b2535
- [5] MEN. *Visión STEM+ educación expandida para la vida*. Ministerio de Educación Nacional, 2021.

4.4 Educación matemática e inteligencia artificial: aprender, enseñar e investigar en una nueva era

Jaime Andrés Carmona Mesa¹

Resumen

La inteligencia artificial está transformando la educación matemática al ofrecer nuevas formas de aprender, enseñar e investigar. Este trabajo plantea que los docentes requieren, primero, comprender las lógicas y alcances de estas tecnologías; segundo, integrarlas a la enseñanza sin perder el sentido pedagógico ni la mediación humana; y tercero, generar evidencia sobre sus efectos didácticos, cognitivos y éticos. Se propone una mirada gradual: aprender sobre IA desde el rol docente, enseñar con IA como mediador cognitivo y, a partir de esa experiencia, investigar para mejorar y contextualizar su uso en el aula de matemáticas.

Palabras & frases claves: Tutores virtuales inteligentes; aprendizaje adaptativo.

1. Introducción

En los últimos años, la inteligencia artificial (IA) ha pasado de ser un conjunto de aplicaciones aisladas a convertirse en un entorno de apoyo a la enseñanza, el aprendizaje y la evaluación en matemáticas. Las revisiones recientes muestran un crecimiento sostenido de estudios que emplean sistemas tutores inteligentes, aprendizaje adaptativo, analítica del aprendizaje y agentes conversacionales para apoyar procesos matemáticos en educación básica, media y superior.

Sin embargo, también se evidencian vacíos importantes, entre ellos la escasa articulación con marcos propios de la didáctica de la matemática y la limitada investigación centrada en la formación y el desarrollo profesional docente. Estas limitaciones resaltan la necesidad de una integración reflexiva y situada de la IA en la educación matemática.

2. Aprender: alfabetización docente en IA para la educación matemática

Aprender, en este contexto, implica que el profesorado desarrolle una comprensión crítica de la IA y no solo un manejo instrumental de herramientas. Las investigaciones muestran que las intervenciones exitosas incluyen orientaciones explícitas sobre el funcionamiento de las herramientas, los datos que recogen y la forma en que estos influyen en decisiones didácticas.

Tres focos resultan fundamentales: la comprensión funcional de la IA educativa, los criterios pedagógicos y éticos asociados a su uso y la articulación con el conocimiento didáctico del contenido matemático. De este modo, la IA deja de ser una caja negra y se convierte en un recurso susceptible de análisis, adaptación y crítica.

¹ Universidad de Antioquia, Facultad de Educación. Correo: jandres.carmona@udea.edu.co

3. Enseñar: mediación pedagógica con apoyo de IA

La enseñanza de las matemáticas apoyada en IA es más efectiva cuando la tecnología se utiliza para hacer visible el pensamiento del estudiante y no solo para calificarlo. Los estudios reportan mejores resultados cuando la retroalimentación automática se complementa con la mediación docente.

Esto se refleja en el diseño de tareas apoyadas en IA generativa, la evaluación formativa basada en analítica del aprendizaje y la integración sincrónica entre docente y tecnología. En este sentido, la IA funciona como mediador cognitivo y no como sustituto del profesor.

4. Investigar: evidencia situada sobre IA en educación matemática

El tercer momento consiste en investigar los procesos de enseñanza y aprendizaje mediados por IA. Aunque predominan estudios cuantitativos centrados en el desempeño, existe una necesidad de investigaciones que dialoguen con teorías de la didáctica de las matemáticas y con contextos latinoamericanos.

Investigar permite cerrar el ciclo de integración de la IA: los hallazgos retroalimentan la formación docente y contribuyen a una incorporación tecnológica fundamentada, crítica y sostenible.

Referencias

- [1] HWANG, G.-J. & TU, Y.-F. *Roles and research trends of artificial intelligence in mathematics education*. Mathematics. **9**(6) (2021):594.
- [2] HWANG, G.-J., XIE, H., WAH, B. W. & GAŠEVIĆ, D. *Vision, challenges, roles and research issues of artificial intelligence in education*. Computers and Education: Artificial Intelligence. **1** (2020):100001.
- [3] MOHAMED, A., RAHMAN, S. & AHMAD, N. *Artificial intelligence in mathematics education: A systematic literature review*. International Electronic Journal of Mathematics Education. **17**(3) (2022):em0694.
- [4] PANQUEBAN, D. & HUINCAHUE, J. *Inteligencia artificial en educación matemática: una revisión sistemática*. Uniciencia. **38**(1) (2024):1–17.
- [5] CHENG, Y., WU, G., ZOU, H., LUO, P. & CAI, Z. *A knowledge query network model based on Rasch model embedding*. Frontiers in Psychology. **13** (2022):846621.

4.5 Equivalencias geométricas: Igualdad entre áreas de figuras bidimensionales

Daniela Díaz Olave¹, Genny Rocío Uicab Ballote²

Resumen

En esta investigación se interpretan los distintos significados del signo igual en el contexto de la geometría euclidiana: igualdad como identidad, igualdad por asignación de medidas e igualdad como congruencia, y su relevancia en la aprehensión de la equivalencia de áreas entre figuras bidimensionales. Basado en la Heurística de los Modelos Emergentes, el estudio propone una secuencia de actividades mediadas por el recurso de GeoGebra para provocar en el estudiante la construcción del pensamiento geométrico y la noción de igualdad como relación de equivalencia. Esta propuesta de enseñanza consta de cuatro niveles que se encuentran en "Los modelos emergentes de la Heurística" como lo plantea Cárcamo (2017), a través de la transición de un modelo de actividad matemática informal a un modelo para un razonamiento matemático más formal, el cual se vincula con la creación de una nueva realidad matemática. Este proceso se concibe como gradual, partiendo de aspectos conocidos por los estudiantes en contextos específicos, que progresivamente fortalecen su rigurosidad matemática.

Palabras & frases claves: Signo igual, equivalencia geométrica, igualdad de áreas.

1. Introducción

Desde el siglo XVII a.C., la igualdad se ha expresado de diversas formas, evolucionando desde expresiones retóricas como *aequales* hasta el símbolo moderno introducido por Robert Recorde en el siglo XVI para evitar la repetición de "es igual a" en textos matemáticos [1]. Sin embargo, la comprensión del signo igual continúa siendo un desafío pedagógico significativo, particularmente en su interpretación como relación de equivalencia bidireccional.

Estudios como los de Kieran (1981) y Behr et al. (1980) han documentado en sus investigaciones que los estudiantes interpretan el signo igual como un operador unidireccional que produce una respuesta, en lugar de reconocerlo como una relación de equivalencia entre expresiones. Esta limitación en la comprensión dificulta la transición de la aritmética al álgebra y obstaculiza el desarrollo del pensamiento matemático formal.

Cabe destacar, que la comprensión del signo igual es relevante no sólo en la aritmética y el álgebra, sino también en la geometría. Según Jara y Gaita (2016), existen tres interpretaciones fundamentales: la igualdad como identidad (dos objetos geométricos que son el mismo objeto), la igualdad por asignación de medidas (figuras con igual área pero diferente forma), y la igualdad como congruencia (figuras que coinciden por superposición). Estas nociones podrían llegar a provocar en el estudiante la interpretación de las equivalencias geométricas entre áreas de figuras bidimensionales.

La integración de tecnología educativa, particularmente GeoGebra como recurso pedagógico, ofrece oportunidades para mediar la construcción del desarrollo del pensamiento geométrico. La estructu-

¹Universidad del Valle. Correo: diaz.daniela@correounivalle.edu.co

²Universidad Autónoma de Yucatán. Correo: uballote@correo.uady.mx

ración del diseño parte de la interpretación de los modelos emergentes, que según Cárcamo (2017) permiten a los estudiantes construir una comprensión matemática por sí mismos, a través de un proceso gradual, donde las matemáticas formales se integran como una extensión natural de su experiencia. Se destaca que el término "modelo" se interpreta en diversos aspectos: entornos de trabajo, descripciones verbales, formas de simbolización y notaciones. Es así, que los modelos son considerados emergentes, porque surgen diversas maneras de crear y utilizar herramientas matemáticas con un razonamiento cada vez más sofisticado. Inicialmente ligados a contextos específicos, los modelos evolucionan hacia estrategias matemáticas más generales a medida que los estudiantes adquieren experiencia (Cárcamo, 2017).

2. Marco Teórico

2.1. Significados de la Igualdad en Geometría

La igualdad en geometría euclidiana presenta tres significados fundamentales que estructuran la comprensión de las equivalencias geométricas:

Igualdad como identidad: Dos objetos geométricos son idénticos cuando representan el mismo objeto. Por ejemplo, si L es la recta perpendicular al segmento AB que pasa por su punto medio y L' es el conjunto de puntos equidistantes de A y B , entonces $L = L'$, pues ambas descripciones refieren al mismo objeto geométrico.

Igualdad por asignación de medidas: Se refiere a figuras con igual área independientemente de su forma. Según Giovannini (2017), Euclides utilizó nociones comunes que establecen que la equivalencia de áreas se determina mediante congruencia, transitividad y operaciones de adición y sustracción, conservando el área bajo transformaciones rígidas (traslaciones, rotaciones y reflexiones).

Igualdad como congruencia: Compete a la superposición exacta de figuras geométricas. Dos segmentos, ángulos o polígonos son congruentes cuando pueden colocarse de modo que coincidan completamente.

2.2. Propuesta de Diseño

La propuesta se estructura mediante la Heurística de los Modelos Emergentes, transitando por cuatro niveles: (1) *Situacional*, vinculado a experiencias cotidianas; (2) *Referencial*, desarrollando descripciones y procedimientos matemáticos; (3) *General*, explorando y generalizando conceptos; y (4) *Formal*, estableciendo procedimientos convencionales desligados del contexto inicial. La primera actividad utiliza el Tangram en el recurso de GeoGebra, la cual busca provocar en el estudiante la interpretación de la conservación de áreas mediante manipulación de figuras geométricas bidimensionales.

Diseño de Actividades (Nivel Situacional). Se propone la Tarea 1³ que consiste en armar rompecabezas utilizando piezas de un Tangram cuadrado. Esta actividad promueve la identificación de formas básicas, traslaciones y rotaciones de figuras, y la suma de áreas. Los estudiantes deben comparar áreas de diferentes siluetas formadas con las mismas piezas del Tangram y mediante símbolos de relación ($<$, $=$, $>$) hacer verdaderas las proposiciones que le son proporcionadas, sobre la equivalencia de áreas.

³Tarea 1 nivel situacional (NS): <https://www.geogebra.org/m/awbnarth>

Referencias

- [1] CAJORI, F., *A history of mathematical notations*. The Open Court Company, 1928.
- [2] KIERAN, C., *Concepts associated with the equality symbol*. *Educ Stud Math.* **12** (1981):317–326.
- [3] CÁRCAMO, A., *Una innovación docente basada en los modelos emergentes y la modelización matemática*. Tesis doctoral, Universitat Autònoma de Barcelona, 2017.
- [4] JARA, R. Y GAITA, C., *La igualdad: Distintos significados en geometría*. En: *Investigaciones en educación matemática*, pp. 69–87. PUCP, 2016.
- [5] GIOVANNINI, E., *Bridging the gap between analytic and synthetic geometry*. Springer, 2017.

4.6 Midiendo macroespacios: experiencias que enriquecen proyectos de educación STEM en primaria

Yudi Andrea Ortiz Rocha

Resumen

Esta semiplenaria presenta experiencias de una Trayectoria Hipotética de Aprendizaje (THA) centrada en la medición de magnitudes como longitud y superficie, a través de actividades que fortalecen el razonamiento espacial en niños de primaria. Los estudiantes estimaron, compararon e iteraron unidades de medida en distintos niveles del espacio (micro, meso y macro), relacionando el espacio físico con sus representaciones. Los resultados evidencian que medir implica visualizar, imaginar y establecer relaciones entre dimensiones, promoviendo una comprensión profunda de las magnitudes y aportes significativos a la educación STEM.

Palabras & frases claves: medición, razonamiento espacial, representación.

1. Introducción

Comprender los procesos de medición constituye un aspecto fundamental en la formación matemática, pues implica razonar sobre el espacio en dos y tres dimensiones y establecer relaciones entre ellos (Seah y Horne, 2020). Sin embargo, diversos estudios evidencian que muchos estudiantes presentan una comprensión superficial del tema, lo que se manifiesta en la confusión entre magnitudes —como perímetro, área o volumen— y en el uso mecánico de fórmulas sin comprensión conceptual (Murphy, 2012; Smith et al., 2016).

Ante este panorama, resulta necesario proponer experiencias de enseñanza que fortalezcan el razonamiento espacial y promuevan una comprensión más profunda de las magnitudes y sus relaciones.

En la conferencia semiplenaria se presenta una parte de una THA centrada en actividades de medición de longitud y superficie, en las que los niños y las niñas participan en procesos de estimación, iteración y comparación de unidades de medida, tanto antropométricas como métricas, en contextos cercanos a su vida cotidiana. Las actividades se diseñan para medir en distintos tamaños del espacio (micro, meso y macroespacios), favoreciendo conexiones entre experiencias físicas y representaciones bidimensionales de espacios tridimensionales.

2. Importancia de trabajar procesos de aprendizaje significativos de medición

La medición es un componente central del currículo matemático porque permite cuantificar y comprender fenómenos del mundo físico, además de favorecer procesos de razonamiento y abstracción matemática (Crosby, 1997; NCTM, 2000). Su aprendizaje significativo requiere comprender no solo cómo medir, sino qué significa medir, lo que implica coordinar el espacio continuo con el número discreto y reconocer relaciones entre magnitudes en dos y tres dimensiones (Barrett et al., 2006; Barrett et al., 2017).

3. Dificultades en la comprensión y aprendizaje de la medición

Numerosos estudios han demostrado que los estudiantes presentan dificultades persistentes en medición, incluso después de varios años de escolaridad. Entre los errores más frecuentes se encuentran la confusión entre área y perímetro, el uso indiscriminado de fórmulas y la incomprensión del concepto de unidad (Huang y Witz, 2013).

Estas dificultades se evidencian especialmente en tareas no rutinarias que requieren explicación, visualización espacial o adaptación de procedimientos estándar (Thompson y Preston, 2004).

4. Pensar el espacio a través de la medición

En las actividades de la THA, los estudiantes utilizaron su propio cuerpo como referencia, identificaron unidades no convencionales y las iteraron para aproximar distancias o alturas. Cuando las mediciones involucraron espacios no accesibles directamente, recurrieron a la imaginación espacial, construyendo representaciones bidimensionales de espacios tridimensionales.

Estas experiencias muestran que medir no es solo un procedimiento, sino una forma de razonar espacialmente sobre el mundo.

Referencias

- [1] BARRETT, J. E., CLEMENTS, D. H., SARAMA, J., Y COPLEY, J. V. *Measuring and graphing: Mathematical thinking in early childhood*. Pearson Education, 2006.
- [2] BARRETT, J. E., SARAMA, J., CLEMENTS, D. H., ET AL. *Developing young children's measurement knowledge*. Journal for Research in Mathematics Education, **48**(5) (2017):450–481.
- [3] CROSBY, W. *The Measure of Reality*. Cambridge University Press, 1997.
- [4] MURPHY, C., *The role of subject knowledge in teaching area*. Journal of Mathematics Teacher Education. **15**(3) (2012):187–206.
- [5] SEAH, R. T. K., & HORNE, M. *Spatial reasoning and measurement*. Mathematics Education Research Journal. **32** (2020):365–386.
- [6] SMITH, J. P., MALES, L. M. & GONULATES, F., *Conceptual limitations in curricular presentations of area measurement: one nation's challenges*. Mathematical Thinking and Learning. **18**(4) (2016):239–270.
- [7] NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS, *Principles and standards for school mathematics*. NCTM, 2000.
- [8] HUANG, H. M. & WITZ, K. G., *Children's conceptions of area measurement and their strategies for solving area measurement problems*. Journal of Curriculum and Teaching. **2**(1) (2013):10–26.
- [9] THOMPSON, T. & PRESTON, R., *Integrating measurement across the curriculum*. Mathematics Teaching in the Middle School. **9**(8) (2004):436–441.

4.7 Estudio dinámico y analítico de los hiperreales

Edwin Sneyder Serrano Rojas¹, Yani Natalia Gonzalez Cruz², Deiby Johan Mendez Delgado³, Jorge Enrique Fiallo Leal⁴

Resumen

El curso que planteamos parte de las ideas iniciales del acercamiento a los infinitesimales de libro de Keisler (2012), pero con la mediación de GeoGebra para explorar y analizar de manera dinámica y analítica algunas de las ideas principales de límites y derivadas a través de la definición de los Hiperreales. Esperamos que los asistentes al curso, además de comprender los conceptos, evidencien una alternativa didáctica para la enseñanza del cálculo.

Palabras & frases claves: Hiperreales, infinitesimales, funciones, límites, derivadas, GeoGebra

1. Introducción

El uso de tecnologías como GeoGebra favorece la visualización y posibilidad de interactuar con los conceptos matemáticos (Galán y Patiño, 2019). De este modo, se fortalece la comprensión de las relaciones y propiedades de los distintos conceptos que se abordan en el área de Matemáticas. Así, GeoGebra desempeña un papel protagónico en este curso porque permite a los participantes relacionarse y dar un acercamiento a las ideas de los infinitesimales e hiperreales para su comprensión en los conceptos de límite de derivada.

En cuanto a los procesos de enseñanza de conceptos como el límite y la derivada, se ha encontrado dificultades en la comprensión de los mismos, producto de la reducción de estos conceptos al uso de fórmulas o reglas teóricas, dejando de lado las ideas de tendencia, variación y aproximación (Guarín y Parada, 2021). En este curso se busca recuperar estas nociones a través de los infinitesimales y el uso de GeoGebra, por medio del desarrollo de actividades que propicien la discusión de las nociones que involucran el desarrollo de estos conceptos.

2. Aspectos teóricos

Los infinitesimales fueron usados por grandes matemáticos como Arquímedes, Newton, Leibniz y Fermat, para resolver problemas concernientes a los conceptos fundamentales del cálculo; pero con la crisis de los fundamentos matemáticos de principios del siglo XIX fueron abandonados por los matemáticos, aunque siguieron siendo tratados informalmente en las ciencias aplicadas. Posteriormente a mediados del siglo XX, con el planteamiento de Abraham Robinson del análisis no estándar, el cual permite introducir los infinitesimales definiendo los Hiperreales, surgieron propuestas alternativas para la enseñanza del cálculo como la planteada por el matemático Howard Jerome Keisler (2012) en su libro Cálculo Elemental: un acercamiento infinitesimal.

¹Universidad Industrial de Santander. Correo: edwin2258068@correo.uis.edu.co

²Universidad Industrial de Santander. Correo: yani2258069@correo.uis.edu.co

³Universidad Industrial de Santander. Correo: deiby2258070@correo.uis.edu.co

⁴Universidad Industrial de Santander. Correo: jfiallo@uis.edu.co

El campo de los hiperreales permite formalizar las ideas que matemáticos como Euler y Leibniz utilizan para desarrollar sus trabajos, pero que resultaban controversiales para la época, pues manipulaban cantidades infinitamente pequeñas, despreciándolas cuando lo necesitaran. Por lo tanto, es importante comprender que el campo hiperreal se entiende como un “sistema numérico en el cual, aparte de los números ordinarios que estamos acostumbrados a manejar, se incluyen números infinitamente grandes e infinitamente pequeños” (Ímaz y Moreno, 2010, p.67).

Ahora bien, Keisler (2012) define los infinitesimales como:

Un número ε es infinitamente pequeño, o infinitesimal, si $-a \leq \varepsilon \leq a$; para todo número real a positivo.

Observación: El número cero es el único número real que se considera como infinitesimal

Con esta definición se clasifican los números del campo hiperreal en dos tipos:

- *Finitos:* Un número hiperreal es finito si se encuentra entre dos números reales. De modo que, todos los números reales se consideran finitos, así como los infinitesimales y algunas operaciones entre ellos.
- *Infinitos:* Un número hiperreal es infinito positivo si es mayor que todos los números reales e infinito negativo si es menor que todos los números reales.

Los números infinitesimales se representan con letras griegas (ϵ , δ , etc.), los números finitos por letras del alfabeto latino minúsculas (a, b, c, etc.) y los infinitos por letras del alfabeto latino mayúsculas (H, K, etc.).

Además, se establece el principio de transferencia, que plantea que todos los postulados y reglas que cumplen los números se transfieren al manejo de los números hiperreales. Esto permite definir diferentes propiedades y operaciones entre estos números, tales como, suma, producto, cociente, raíces, entre otros.

Finalmente, dado que se están trabajando números infinitamente pequeños e infinitamente grandes, surgen algunas indeterminaciones que dependen de la naturaleza de los números. Estas son:

- El cociente de dos infinitesimales no está determinado a priori.
- El cociente de dos infinitos no está determinado a priori.
- El producto de un infinitesimal por un infinito no está determinado a priori.
- La suma de infinitos no está determinada a priori.

Estas son las principales ideas teóricas que se abordarán en el cursillo y permitirán realizar un acercamiento a diferentes conceptos del cálculo (algunas reglas de derivación y aplicaciones de la derivada) formalizando estas ideas desarrolladas por algunos matemáticos en la antigüedad.

3. Metodología

Para el desarrollo de este taller se requiere que el participante tenga conocimientos previos en cálculo diferencial en una variable y en el uso de GeoGebra. El objetivo del taller es “generar conocimiento didáctico en la enseñanza del cálculo bajo las ideas de los infinitesimales apoyado de GeoGebra

como medio dinámico”.

De esta manera, el primer momento del taller consiste en la introducción de los números infinitesimales a través del método de máximos y mínimos usado por Fermat. En un segundo momento, se realizará una definición del campo numérico de los hiperreales teniendo en cuenta lo presentado anteriormente. En un tercer momento se abordarán acercamientos a las reglas de la derivada de un producto y la derivada del cociente, en donde se aprovechará el dinamismo que brinda GeoGebra para observar esta regla. Y para finalizar, se realizará una aproximación a la regla de L’hopital a través de los números hiperreales.

Referencias

- [1] KEISLER, H. JEROME. *Elementary Calculus: An Approach Using Infinitesimals*. Prindle Weber & Schmidt, 2012. ISBN 978-087150911.
- [2] ÍMAZ, C Y MORENO, L. *La génesis y la enseñanza del cálculo. Las trampas del rigor*. Editorial Trillas, 2010. ISBN 978-607-17-0676-8.
- [3] GALÁN, A. Y PATIÑO, M. *Visualización de diferentes objetos que están en la topología algebraica con ayuda de software de geometría dinámica.*, 2019. <http://hdl.handle.net/20.500.12209/10521>.
- [4] GUARIN, S. Y PARADA, S. *Acciones y expresiones de la comprensión del límite de una función en un punto, por estudiantes de cálculo diferencial*. Educación Matemática. **35**(1) (2021):197–228. <https://doi.org/10.24844/EM3501.08>

4.8 Explorando el conocimiento especializado del profesorado: Knowledge of Topics (KoT) en la enseñanza de la generalización de patrones en primaria

Sandra Yolima Ruiz Yacumal¹

Resumen

El estudio tiene como propósito caracterizar el conocimiento especializado de los profesores de primaria en el subdominio *Knowledge of Topics* (KoT) del modelo MTSK. Se enfoca en categorías como definiciones, fenomenología, aplicaciones, registros de representación, propiedades, fundamentos y procedimientos, así como en la formulación de preguntas que promueven la reflexión sobre la enseñanza de patrones matemáticos.

Asimismo, se analiza la relación entre teoría y práctica al considerar contextos cotidianos y justificaciones matemáticas, organizando las preguntas en categorías clave que permiten una visión integral del conocimiento especializado del profesorado.

Palabras & frases claves: profesores de primaria, conocimiento de los temas (KoT), pensamiento algebraico temprano.

1. Introducción

El cursillo se centra en el desarrollo del pensamiento algebraico temprano mediante el subdominio *Knowledge of Topics* (KoT) del modelo MTSK, aplicado a la enseñanza de patrones en educación primaria. Su propósito es caracterizar el conocimiento del profesorado sobre definiciones, propiedades, representaciones, aplicaciones y procedimientos, promoviendo la reflexión pedagógica y el diseño de estrategias didácticas fundamentadas.

A través de actividades prácticas y colectivas, los participantes desarrollan competencias para identificar, representar y justificar patrones, integrando de manera coherente la teoría y la práctica docente.

2. Desarrollo del cursillo

2.1. Actividad de activación (10 min)

Se presenta un patrón visual compuesto por figuras formadas con palillos que crecen de manera regular (2, 5, 8, 11, ...). A partir de esta situación se solicita a los participantes describir el patrón con sus propias palabras y explicar cómo lo trabajarían con sus estudiantes.

La discusión inicial permite identificar diferencias en las formas de describir y representar el patrón, enlazando estas variaciones con la riqueza del conocimiento especializado del profesorado en el subdominio KoT.

2.2. Bloques prácticos del KoT (60 min)

¹Universidad del Cauca. Correo: sandray@unicauca.edu.co

Cada bloque se trabaja a partir del mismo patrón de referencia, con el fin de resaltar los distintos enfoques del KoT.

Bloque A – Definiciones (10 min). Los participantes formulan las definiciones del patrón, tales como “crece de 3 en 3” o “es una sucesión aritmética”, y reflexionan sobre cómo adaptar el lenguaje matemático al nivel de primaria sin perder precisión.

Bloque B – Fenomenología y aplicaciones (10 min). Se proponen contextos reales en los que aparezcan patrones de crecimiento similares, como filas de sillas, cercas o calendarios, destacando el valor pedagógico de vincular los patrones con situaciones cotidianas.

Bloque C – Registros de representación (15 min). El patrón se representa en distintos registros: tabla de valores, expresión verbal, gráfico en el plano cartesiano y expresión algebraica del término general. Se discuten las dificultades y transiciones entre registros, siguiendo el enfoque de Duval.

Bloque D – Propiedades y fundamentos (10 min). Se identifica la propiedad central del patrón, como la linealidad o la diferencia constante, y se reflexiona sobre las formas de justificar estas propiedades ante los estudiantes.

Bloque E – Procedimientos (25 min). Se exploran diversas estrategias para hallar términos lejanos del patrón, como el término 10 o el 50, utilizando sumas sucesivas, tablas o expresiones algebraicas, discutiendo el momento oportuno para introducir la generalización algebraica en primaria.

2.3. Sistematización y cierre

En plenaria, los grupos comparten ejemplos de cómo integrar las cinco categorías del KoT en la enseñanza de patrones. Finalmente, se propone una reflexión guiada sobre el propio conocimiento del profesorado y su aplicación en el aula, acompañada de una ficha de síntesis con ejemplos prácticos.

3. Resultados esperados del cursillo

Se espera que los profesores caractericen el subdominio KoT en relación con la enseñanza de patrones, reconozcan su propio conocimiento especializado en acción y se lleven herramientas prácticas para enriquecer la enseñanza del pensamiento algebraico temprano en educación primaria.

Referencias

- [1] CARRILLO-YAÑEZ, J. ET AL. *The mathematics teacher's specialised knowledge (MTSK) model*. Research in Mathematics Education. **20**(3) (2018):236–253.
- [2] FUENTES, C. *Uso del Modelo MTSK para la caracterización del conocimiento especializado del profesor de matemáticas en secundaria*. UNION, **59** (2020):33–63.
- [3] LIÑÁN, M. DEL M., BARRERA, V. J. & CONTRERAS-GONZÁLEZ, L. C. *Conocimiento de los temas (KoT)*. En Reflexionando sobre el conocimiento del profesor. SGSE, 2016.

- [4] VERGEL, R. *Formas de pensamiento algebraico temprano en alumnos de cuarto y quinto grado*. Revista Científica. **17**(2) (2013):225–231
- [5] VERGEL, R. *Generalización de patrones y formas de pensamiento algebraico temprano*. PNA, **9**(3) (2015):193–215.

4.9 Mobilizando conhecimentos especializados sobre fração a partir da Gênese Instrumental do artefato Barras de Cuisenaire

Francisco Eteval da Silva Feitosa¹, Roberta dos Santos Rodrigues²

Resumen

Em meio às dificuldades que os estudantes possuem sobre o estudo e a apreensão do conceito de fração, e pelo fato de que o conhecimento do professor é a variável que mais tem impacto na aprendizagem dos estudantes, esta oficina visa a mostrar como desenvolver conhecimentos especializados em professores de e que ensinam Matemática a cerca do tópico de fração, por meio do processo da gênese instrumental do artefato Barras de Cuisenaire.

Palabras & frases claves: Frações. Formação de Professores. Gênese Instrumental. MTSK.

1. Introdução

A pesquisa em Educação Matemática deve priorizar a investigação de questões relacionadas aos processos de ensino e aprendizagem no contexto escolar, especialmente no que se refere às dificuldades e desafios enfrentados pelos estudantes (Rico, 2012). Entre esses desafios, destacam-se as barreiras para a compreensão do conceito de fração, frequentemente decorrentes de abordagens pedagógicas centradas na memorização e na aplicação mecânica de procedimentos, sem vínculo com significados matemáticos (Martínez & Pardo, 2017).

Nesse sentido, Boaler (2020) chama a atenção para o fato de muitos estudantes aprenderem a multiplicar e dividir frações por meio de algoritmos, sem compreenderem o processo ou o significado dos resultados obtidos, o que compromete a aprendizagem futura. A autora enfatiza que, em toda a matemática, é essencial que os estudantes construam significados, entendendo tanto o que fazem quanto os contextos em que estão inseridos ao aprender.

A criação de tais contextos depende diretamente do conhecimento matemático e das escolhas didáticas dos professores. Pesquisas indicam que as decisões pedagógicas dos docentes exercem impacto significativo no processo de aprendizagem dos estudantes (Darling-Hammond, 2000; Hill & Chin, 2018).

Considerando esses aspectos, esta oficina tem como objetivo mostrar como desenvolver o conhecimento especializado de professores de e que ensinam Matemática, a partir da gênese instrumental do artefato Barras de Cuisenaire. A proposta está fundamentada no Modelo de Conhecimento Especializado para o Ensino de Matemática (Mathematics Teacher's Specialized Knowledge - MTSK) e busca promover a reflexão sobre como esse material podem ser integrados à prática docente, favorecendo a construção de significados para o conceito de fração.

Ao longo das atividades, os participantes terão a oportunidade de manipular os artefatos, explorar tarefas didáticas e analisar os potenciais de uso desse recurso no ensino de frações. A intenção é

¹ Universidade Federal do Amazonas, Docente do PPGEICIM-UFAM e bolsista do Programa de Bolsas de Pós-Doutorado (PROPOSDOC-UEA). Correo: sfeitosa@ufam.edu.br

² Discente do PPGEICIM-UFAM e bolsista do Programa de Apoio à Pós-Graduação Stricto Sensu POSGRAD-FAPEAM-2024-2025. Correo: roberta.rodrigues@ufam.edu.br

criar um espaço de experimentação e reflexão que contribua para o fortalecimento do conhecimento profissional docente e para a formação de práticas mais significativas no ensino de Matemática.

2. Integração entre a Gênese Instrumental e o Modelo MTSK na Formação de Professores de Matemática

A análise do desenvolvimento do conhecimento especializado de professores de matemática pode ser enriquecida pela articulação entre a Abordagem Instrumental (Rabardel, 1995) e o Mathematics Teacher's Specialized Knowledge - MTSK (Carrillo et al., 2018). A Abordagem Instrumental parte da compreensão de que um artefato somente se converte em instrumento quando o sujeito, ao interagir com ele, constrói esquemas de utilização que orientam suas ações e permitem ressignificar sua prática pedagógica. Esse processo, denominado gênese instrumental, compreende duas dimensões complementares: a instrumentação, orientada para o sujeito, que envolve a construção e evolução de esquemas de ação, e a instrumentalização, orientada para o artefato, que se refere às adaptações e modificações realizadas pelo sujeito com vistas a atender a objetivos específicos.

No âmbito da formação inicial e continuada de professores de matemática, a gênese instrumental de artefatos didáticos - como a régua de frações e as barras de Cuisenaire - constitui um contexto privilegiado para a mobilização e desenvolvimento de diferentes dimensões do conhecimento especializado. Nesse sentido, o modelo MTSK fornece um quadro teórico robusto para a identificação e análise dos conhecimentos que emergem durante esse processo. Ao explorar as frações por meio dos artefatos, podem ser evidenciados subdomínios do Mathematical Knowledge (MK), como o Knowledge of Topics (KoT), ao trabalhar definições, propriedades, procedimentos e representações; o Knowledge of the Structure of Mathematics (KSM), ao estabelecer conexões entre conceitos e ideias-chave; e o Knowledge of Practices in Mathematics (KPM), ao desenvolver justificativas, argumentações e estratégias de resolução. Simultaneamente, o domínio Pedagogical Content Knowledge (PCK) também é mobilizado, especialmente no Knowledge of Mathematics Teaching (KMT), ao analisar estratégias de ensino e recursos, e no Knowledge of Features of Learning Mathematics (KFLM), ao refletir sobre erros, concepções alternativas e dificuldades recorrentes dos estudantes.

Dessa forma, a oficina proposta tem como propósito central promover o desenvolvimento do conhecimento especializado docente, integrando a prática de manipulação e adaptação de artefatos concretos com a análise crítica fundamentada no modelo MTSK. Ao vivenciarem o processo de gênese instrumental, os professores em formação inicial e em exercício poderão compreender como recursos didáticos se transformam em instrumentos pedagógicos, potencializando a mediação do ensino de frações e favorecendo aprendizagens matemáticas mais significativas.

3. Procedimentos metodológicos

A oficina tem como público-alvo professores de e que ensinam matemática, considerando a relevância do ensino de frações e os desafios que esse tema impõe tanto ao aprendizado dos estudantes quanto à prática docente. O objetivo principal é promover o desenvolvimento de conhecimentos especializados desses professores, tomando como eixo teórico-metodológico os processos de instrumentalização e instrumentação propostos por Rabardel (1995), no âmbito da gênese instrumental.

Nesse sentido, o artefato Barras de Cuisenaire será utilizado como mediador do processo formativo. A instrumentação ocorrerá à medida que os participantes construírem esquemas de utilização desse

material, elaborando estratégias para representar frações, realizar comparações, explorar equivalências e operar com diferentes representações. Já a instrumentalização será evidenciada quando os professores adaptarem ou ressignificarem o artefato, criando novas formas de utilizá-los em função de suas necessidades pedagógicas, como a proposição de atividades ou a introdução de representações complementares.

A condução da oficina seguirá as etapas da Teoria das Situações Didáticas de Brousseau (1996), estruturando-se em momentos de ação, formulação, validação e institucionalização. Essa organização permitirá que os participantes: manipulem livremente o artefato, explorando suas potencialidades e limitações; formulem hipóteses e estratégias de ensino a partir das situações propostas; validem e discutam coletivamente as diferentes soluções e representações construídas; sistematizem os conhecimentos mobilizados, articulando-os ao modelo MTSK, de modo a identificar subdomínios como o Knowledge of Topics (KoT), o Knowledge of the Structure of Mathematics (KSM), o Knowledge of Mathematics Teaching (KMT) e o Knowledge of Features of Learning Mathematics (KFLM).

A oficina terá duração de 4 horas, distribuídas entre exploração prática, socialização das estratégias dos participantes, análise crítica das ações de instrumentalização e instrumentação, e reflexão coletiva fundamentada no MTSK. Dessa forma, busca-se criar um espaço formativo no qual o uso do artefato transcenda a dimensão material e se consolide como instrumento pedagógico, contribuindo efetivamente para o fortalecimento do conhecimento especializado do professor.

Referencias

- [1] BOALER, J. , *Mathematical mindsets: Unleashing students' potential through creative math, inspiring messages and innovative teaching*. Jossey-Bass, 2020.
- [2] BROUSSEAU, G. , *Théorie des situations didactiques* . La Pensée Sauvage, 1996.
- [3] CARRILLO, J., CLIMENT, N., CONTRERAS, L. C., & MUÑOZ-CATALÁN, M. C. , *The mathematics teacher's specialised knowledge (MTSK) model* . Research in Mathematics Education. **20** (2018):236–253.
- [4] DARLING-HAMMOND, L. , *Teacher quality and student achievement: A review of state policy evidence* . Education Policy Analysis Archives. **8** (2000):1–44.
- [5] HILL, H. C., & CHIN, M. J. , *Connections between teachers' knowledge of mathematics and students' mathematics achievement* . Teaching and Teacher Education. **75** (2018):166–176.
- [6] MARTÍNEZ, J., & PARDO, A. , *Dificultades en el aprendizaje de las fracciones: Una revisión de investigaciones recientes* . Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa. **20** (2017):133–156.
- [7] RABARDEL, P. , *Les hommes et les technologies: Approche cognitive des instruments contemporains* . Armand Colin, 1995.
- [8] RICO, L., *La competencia matemática en PISA*. En: La competencia matemática en PISA: Una revisión desde la didáctica de la matemática, pp. 13–41. Comares, 2012.

4.10 Alfabetización Financiera de Profesores de Matemáticas en Formación

Deiby Johan Méndez Delgado¹, Edith Johana Mendoza Higuera², Sandra Evelyn Parada Rico³

Resumen

Esta comunicación presenta los resultados de una encuesta realizada a profesores en formación de matemáticas con el objetivo de indagar sobre sus prácticas financieras. Ello hace parte del proceso de una investigación que busca describir los significados que los profesores en formación le dan al contexto financiero en sus clases de matemáticas. La encuesta fue realizada a 40 estudiantes de la licenciatura en matemáticas de la Universidad Industrial de Santander. Las respuestas permitieron cruzar los razonamientos de los estudiantes junto a las prácticas que realizan en torno a los objetos financieros, y de esta manera observar sus niveles de alfabetización financiera.

Palabras & frases claves: Finanzas, Prácticas Financieras, Profesores en Formación.

1. Introducción

La crisis financiera de 2007-2008 marcó un punto de inflexión en el papel que desempeña la Educación Financiera en la formación ciudadana. Se demostró que era necesario reforzar la supervisión y la regulación del sector financiero, poniendo a la Educación Financiera en el centro de atención, pues era esencial proteger a los consumidores de los servicios (Ramos, 2023).

Aquellos consumidores deben de tomar decisiones financieras día tras día, desde acciones sencillas como comparar precios en el supermercado, a acciones más complejas como analizar la viabilidad de un préstamo. Es así que las habilidades y conocimientos que debe poseer un ciudadano para poder resolver estas situaciones se denomina alfabetización financiera. Ella se define como la alfabetización financiera como el conocimiento y la comprensión de conceptos y riesgos financieros, así como las habilidades, la motivación y la confianza para aplicar dicho conocimiento y comprensión con el fin de tomar decisiones efectivas en una variedad de contextos financieros, mejorar el bienestar financiero de las personas y de la sociedad, y permitir la participación en la vida económica (OCDE, 2014).

2. Educación Financiera en Colombia

El proceso de desarrollar habilidades financieras en los ciudadanos es la Educación Financiera. Bajo este contexto, surge la necesidad de definir quienes deben de asumir la responsabilidad en su incorporación, en este caso, las instituciones educativas. En el caso de Colombia, la Educación Financiera ha sido influenciada en mayor medida por la banca privada, en asociación con el Ministerio de Educación Nacional (MEN).

¹Universidad Industrial de Santander. Correo: deiby225807@correo.uis.edu.co

²Universidad Industrial de Santander. Correo: edith.mendoza@correo.uis.edu.co

³Universidad Industrial de Santander. Correo: sanevepa@uis.edu.co

Dentro de las políticas impulsadas se introduce la Educación Económica y Financiera en las instituciones educativas del país para el desarrollo de competencias básicas, la educación económica y financiera (Ley 1735, 2014). Esta ley, promulgó el desarrollo proyectos pedagógicos por parte del MEN estableciendo directrices y estándares para la formación financiera de los estudiantes. Una de ellas, fue el documento “Orientaciones pedagógicas para la Educación Económica y Financiera: Mi plan, mi vida y mi futuro” en el año 2014, y una última versión en el año 2022. Este documento tenía como objetivo promover el desarrollo de competencias básicas y ciudadanas, y pensamiento crítico y reflexivo requerido en la toma de decisiones financieras y económicas responsables e informadas (MEN, 2022) No obstante, la implementación de estas directrices requiere de profesores capacitados para introducirlas en el aula de clase.

Es así, que se torna importante conocer que tanto conocimiento poseen los profesores en el contexto financiero. Lusardi y Mitchell (2011) comentan que resulta complicado explorar como las personas procesan la información económica y toman decisiones informadas con respecto a ello. Sin embargo, se pueden medir estas habilidades si se siguen cuatro principios: la simplicidad, la relevancia, la brevedad y la capacidad para diferenciar entre los niveles de conocimiento financiero. Es por ello, que se plantea un cuestionario en donde se midan estas componentes en estudiantes de licenciatura en matemáticas en la Universidad Industrial de Santander.

3. La alfabetización de profesores en formación

Para medir la alfabetización, se usó la encuesta titulada “Acercamientos a profesores de matemáticas en formación sobre Educación Financiera”, adaptación de la encuesta diseñada por Díaz y Rueda (2024) que tenía como objetivo identificar las prácticas financieras de profesores de matemáticas de Santander, junto a su habilidad para resolver problemas de este contexto.

La encuesta fue realizada a 40 estudiantes de la Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Industrial de Santander. La encuesta contó con una extensión de 40 preguntas, dividida en tres secciones: (1) caracterización de las prácticas financieras realizadas por los participantes; (2) resolución de problemas matemáticas en un contexto financiero; (3) acercamientos e interés sobre la Educación Financiera desde la Educación Matemática.

Los resultados del cuestionario fueron divididos en dos partes, un análisis descriptivo de los acercamientos financieros de los estudiantes junto a su posición como futuros profesores frente a la formación en Educación Financiera; y un análisis sobre su conocimiento matemático para resolver problemas financieros. En cuanto al primer análisis, se identificó que aproximadamente el 72,5 % de los participantes habían recibido formación financiera antes de ingresar a la universidad. Sin embargo, los resultados afirman que luego de haber ingresado a ella, este valor disminuyó al 50 % de los participantes, lo que genera una preocupación en su formación profesional.

Por otro lado, se presentaron 6 problemas relacionados a fenómenos económicos y financieros tales como IVA, Ahorro, Presupuestos, Interés Simple, Toma de decisiones. En donde se evidencian una gran variedad de respuestas, que se encuentran asociadas a las prácticas, habilidades y conocimientos financieros de cada uno de los participantes. Es así, que el cuestionario permitió no solo evaluar la alfabetización financiera de los participantes, si no permitió comprender el porque de esa alfabetización, logrando así brindar un panorama para el desarrollo de estrategias y propuestas para el promulgamiento de la Educación Financiera.

Referencias

- [1] DÍAZ, J. & RUEDA, C. *Educación Financiera: aproximaciones prácticas de profesores de matemáticas en servicio*. Tesis de Pregrado, Universidad Industrial de Santander, 2025.
- [2] LUSARDI, A. & MITCHELL, O. *The economic importance of financial literacy: Theory and evidence*. Journal of Economic Literature, **52**(1) (2014):5–44. 10.1257/jel.52.1.5
- [3] MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACIONAL (MEN) *Mi plan, mi vida y mi futuro: orientaciones pedagógicas para la Educación Económica y Financiera*. Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico, 2022.
- [4] ORGANIZACIÓN PARA LA COOPERACIÓN Y EL DESARROLLO ECONÓMICO (OCDE). *PISA 2012 Results: Students and Money (Volume VI): Financial Literacy Skills for the 21st Century*. PISA, OECD Publishing, Paris, 2014. <https://doi.org/10.1787/9789264208094-en>.
- [5] RAMOS, F. *Educación financiera a la luz de la economía del comportamiento*. *Iberoamerican Business Journal*, **6**(2) (2023):4–33. <https://doi.org/10.22451/5817.ibj2023.vol6.2.11069>

4.11 Análisis de la Demanda Cognitiva de Tareas en DGPAd desde la Teoría de las Situaciones Didácticas

Yani Natalia Gonzalez Cruz¹

Resumen

Esta presentación se fundamenta en la Teoría de las Situaciones Didácticas (TSD) de Brousseau, que concibe el aprendizaje como resultado de la interacción del estudiante con un medio, y en el modelo de demanda cognitiva de Stein y Smith, que clasifica el tipo de razonamiento requerido en la resolución de tareas. Este estudio pretende mostrar avances frente a la articulación de las dos teorías y el desarrollo de tareas geométricas sobre el Teorema Fundamental de la Proporcionalidad en DGPAd-Colombia para identificar situaciones que favorecen el aprendizaje por adaptación de los estudiantes de grado 9^o. Permitiendo establecer la pertinencia matemática y el nivel de exigencia cognitiva de las actividades, destacando el potencial de DGPAd-Colombia para diseñar tareas que promuevan el aprendizaje por adaptación.

Palabras & frases claves: Demanda Cognitiva, Teoría de las Situaciones Didácticas, Software de Geometría Dinámica.

1. Introducción

En la enseñanza actual de la geometría, los estudiantes suelen tener un conocimiento limitado de los conceptos geométricos, ya que se privilegia la geometría procedimental por encima de la comprensión de las relaciones figurales. Esta situación se explica, en parte, por el uso predominante de representaciones planas rígidas. Si bien los Softwares de Geometría Dinámica (SGD) ofrecen posibilidades para superar estas limitaciones, son pocos los docentes que se atreven a incorporarlos en sus clases (Riascos et al., 2018).

En el caso de la proporcionalidad en una naturaleza geométrica, se encuentra una necesidad para establecer tareas en geometría dinámica que promuevan los hechos geométricos vinculados al Teorema Fundamental de la Proporcionalidad (TFP), estos se encuentran vinculados a conceptos como: la semejanza de triángulos, homotecia, teorema de Tales, entre otros (González, 2024; Restrepo et al., 2023). Gran parte de las investigaciones proponen tareas que permitan a los estudiantes explorar, visualizar e interactuar con las propiedades invariantes presentes en las construcciones, promoviendo la autonomía del estudiante, al decidir qué estrategias adoptar o descartar en la resolución. En particular, González (2024) señala ciertas dificultades en el desarrollo de las actividades, las cuales serán objeto de análisis en esta investigación: (i) el uso de un SGD, por sí solo, no garantiza que las tareas cumplan su propósito de enseñanza; y (ii) es necesario reconocer que no todas las tareas promueven el mismo nivel de pensamiento, aunque sí deben articularse en una continuidad cognitiva que asegure la progresión del aprendizaje.

2. Referentes Teóricos

¹Universidad Industrial de Santander. Correo: yani.gonzalez654@gmail.com

Se propone una articulación entre la *TSD* y el modelo de *demanda cognitiva*, de manera que la TSD permita establecer las condiciones necesarias para que los estudiantes obtengan un aprendizaje por adaptación por medio de DGPAd-Colombia, mientras que el modelo de demanda cognitiva posibilita caracterizar los niveles de pensamiento que deben emplear en cada una de las tareas.

2.1. Teoría de las Situaciones Didácticas

La *Teoría de las Situaciones Didácticas* propuesta por Brousseau (1986), concibe el aprendizaje matemático como un proceso que ocurre a través de la interacción entre el estudiante, un medio (problemas, recursos, materiales) y el profesor. Además, el conocimiento se construye cuando el alumno se enfrenta a una situación diseñada por el profesor, para provocar la necesidad de producir estrategias, conjeturas o soluciones. El medio debe ser fuente de retroacciones que permitan al estudiante validar o refutar sus respuestas, favoreciendo la construcción autónoma del conocimiento.

En la interacción entre profesor, estudiante y medio, se distinguen las *situaciones didácticas* y *adi-dácticas*. En las primeras, el profesor guía y organiza la actividad; en las segundas, los estudiantes actúan de manera más autónoma, interactuando directamente con el medio sin intervención inmediata del docente (Margolinas, 1993/2009). Luego, el conocimiento de los estudiantes puede conformarse como un saber matemático mediante el proceso de institucionalización, donde “el profesor retoma necesariamente su posición con relación al saber, ya que cuando *oficializa* una noción, relacionándola con el saber cultural, lo hace como *sabio*” (Margolinas, 1993/2009, p.177)

2.2. Demanda Cognitiva

Stein et al., (1998) reportan que los profesores no saben cómo categorizar las tareas como pertinentes, por ello se propusieron establecer un modelo que funcione como herramienta para el análisis de las tareas que se proponen en clase. Uno de los aspectos para categorizarlas es el nivel cognitivo que los estudiantes deben utilizar para realizarla, ya que no todas las tareas promueven el mismo nivel de razonamiento: algunas exigen procedimientos rutinarios, mientras que otras implican procesos de análisis y argumentación (Stein et al., 1998). De este modo, el modelo se centra en el análisis del tipo de pensamiento que requieren las tareas matemáticas propuestas en el aula.

Así, se establece que una buena tarea es aquella que involucra a los estudiantes en un pensamiento de alto nivel, por esto se establecen algunos factores que caracterizan a las tareas de alto nivel de demanda cognitiva (Stein et al., 1998):

- Existe andamiaje en el pensamiento y razonamiento de los estudiantes.
- El maestro busca que el estudiante manifieste sus ideas bajo las habilidades de procesos matemáticos (explicaciones, justificaciones, argumentaciones).
- Las tareas se construyen en base al conocimiento previo de los estudiantes, mediante la exploración.
- El maestro establece conexiones conceptuales y los estudiantes pueden validar su progreso.

Este enfoque permite a los docentes reflexionar sobre cómo sus decisiones en el diseño y gestión de actividades influyen en el aprendizaje de los estudiantes. De esta manera, el modelo no solo ofrece

una herramienta para analizar tareas, sino también para comprender cómo se fomenta (o limita) el desarrollo del pensamiento matemático de alto nivel en el aula.

3. Articulación y pertinencia de las teorías

En esta investigación se articula la Teoría de las Situaciones Didácticas (TSD) con el modelo de demanda cognitiva de Smith y Stein, con el fin de analizar y ajustar las tareas propuestas en DGPad-Colombia por Gonzalez (2024), para su ajuste, implementación y análisis. Por ejemplo, el nivel alto de demanda cognitiva, llamado *hacer matemáticas* fue ajustado con los siguientes indicadores y descriptores:

- Procedimientos de resolución. No existe un enfoque predecible o explícito en la tarea, pero se puede anticipar posibles caminos de solución a partir de razonamientos geométricos deductivos.
- Nivel de esfuerzo. El estudiante requiere de una exploración y comprensión profunda de la naturaleza de los conceptos, procesos y relaciones geométricas.
- Contenidos implícitos. El estudiante aplica los hechos geométricos en situaciones que implican el uso del TFP.
- Explicaciones. El estudiante profundiza en argumentos geométricos para realizar las justificaciones de sus construcciones.
- Autonomía del estudiante. El estudiante no depende de intervenciones o juicios del profesor.

La articulación de ambas teorías posibilita un análisis más completo: mientras la TSD centra la atención en los procesos didácticos que emergen en la interacción estudiante-medio, el modelo de demanda cognitiva permite dotar de continuidad cognitiva las tareas diseñadas. De esta manera, se logra no solo describir el desarrollo de las situaciones propuestas, sino también valorar su potencial para promover el aprendizaje por adaptación del TFP en tareas desarrolladas en geometría dinámica.

Referencias

- [1] BROUSSEAU. *Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques*. Reserches en Didactique des Mathématiques, 7(2) (1986):33–115.
- [2] GONZALEZ, Y. *Diseño de tareas autónomas en DGPad para la división de un segmento en partes iguales usando el Teorema Fundamental de la Proporcionalidad [Tesis de pregrado]*. Universidad Industrial de Santander, 2024.
- [3] MARGOLINAS, C., *La importancia de lo verdadero y de lo falso en la clase de matemáticas* (M. Acosta y J. Fiallo, Trans.). Universidad Industrial de Santander, 2009. (Trabajo original publicado en 1993).
- [4] RESTREPO-OCCHOA, J., GUALDRÓN-PINTO, E., ÁVILA-ASCANIO, L., *Improving the Learning of Geometric Proportionality Using van Hiele's Model, Mathematical Visualization, and GeoGebra*. Eurasia J. Math. Sci. Technol. Educ. 19(9) (2023):em2324.

- [5] RIASCOS, Y., CURBEIRA, D. *La enseñanza de la Geometría en Colombia desde la perspectiva de Ciencia, Tecnología y Sociedad..* Revista Metropolitana de Ciencias Aplicadas, **1**(2) (2018):53–61.
- [6] STEIN, M., SMITH, M. *Mathematical Tasks as a Framework for Reflection: from research to practice.* Mathematics teaching in the middle school. **3**(1998):268–275

4.12 ¿Cómo enseñamos finanzas en la escuela? Diseño y validación de un formulario sobre prácticas docentes

Jenny Alejandra Díaz Carreño¹, Maria Camila Rueda Herrera², Sandra Evelyn Parada Rico³

Resumen

Presentamos una investigación cuyo objetivo fue diseñar y validar un formulario para identificar aproximaciones prácticas de profesores de matemáticas en servicio del departamento de Santander frente a contenidos de educación financiera. El marco teórico articuló la estructura técnica de construcción de formularios (García, 2004), las categorías de práctica docente (Ponte & Serrazina 2004; Parada, 2011) y los ámbitos financieros propuestos por el MEN. El estudio, cualitativo-descriptivo, combinó juicio de expertos y pilotaje para refinar el instrumento y analizar evidencias de validez de contenido y claridad. Los resultados muestran que el formulario permite caracterizar experiencias, tareas y discursos asociados a la enseñanza de temas financieros, a la vez que revela brechas formativas en didáctica de las finanzas (enfoque de contexto, uso de datos reales y evaluación de toma de decisiones). Se concluye con un instrumento robusto y bases para iniciar la fundamentación de criterios que orienten la formación continua y el diseño curricular en educación matemática con enfoque financiero

Palabras & frases claves: Aproximaciones prácticas, educación financiera, profesores de matemáticas.

1. ¿Qué sabemos y qué falta por resolver?

La Educación Financiera (EF) representa una necesidad fundamental para los jóvenes, ya que les brinda conocimientos y habilidades para tomar decisiones responsables en torno al manejo del dinero, el ahorro, la inversión y el uso del sistema financiero (OCDE, 2014; MEN, 2014). Su enseñanza adquiere mayor relevancia al considerar que los temas financieros hacen parte de la vida cotidiana de todas las personas, incluidos los estudiantes.

Dado que existe una relación cercana entre las matemáticas y las finanzas (Liern, 2013; Alfonso, 2024), son los profesores de matemáticas quienes, en la mayoría de los casos, asumen la tarea de enseñar estos contenidos en las instituciones educativas. Sin embargo, estudios recientes muestran que estos docentes no siempre cuentan con la preparación suficiente en EF (Tapia, 2020; Muñoz et al., 2018). Esto hace necesario crear espacios de formación para los profesores, como lo plantea Alfonso (2024).

Antes de pensar en esos espacios de formación, es importante conocer cómo está la situación actualmente, es decir, qué prácticas han desarrollado los docentes de matemáticas en relación con la EF. De ahí surge la pregunta de investigación: ¿cómo identificar aproximaciones prácticas en profesores de matemáticas en ejercicio de Santander con temas relacionados a las finanzas? Para responder a

¹Universidad Industrial de Santander. Correo: alejandradiaz0324@gmail.com

²Universidad Industrial de Santander. Correo: mariacamilaruedaherrera@gmail.com

³Universidad Industrial de Santander. Correo: sanevepa@correo.uis.edu.co

esta pregunta, se trazó como objetivo diseñar y valorar un formulario para identificar aproximaciones prácticas de profesores de matemáticas en servicio de Santander con temas relacionados a las finanzas.

2. ¿Qué conceptos clave orientan el estudio?

Para el desarrollo de la investigación se establecieron los siguientes referentes teóricos y conceptuales: la estructura técnica, es decir, el diseño y valoración del formulario; las prácticas de los profesores de matemáticas; y los temas relacionados con finanzas.

En esta investigación, el formulario se entendió como un conjunto organizado de preguntas que permite obtener datos precisos y comparables sobre un fenómeno (García, 2004). Para su diseño se tuvieron en cuenta los siguientes elementos: encabezado, título, datos de control, presentación, instrucciones, solicitud de cooperación y preguntas (García, 2004), y las preguntas se formularon con una escala tipo Likert de frecuencias (nunca, casi nunca, a veces, casi siempre y siempre).

Para la valoración del instrumento se consideraron las herramientas propuestas por García (2004): validez, confiabilidad, adaptabilidad y comparabilidad, con el fin de asegurar su utilidad como herramienta de investigación. La validez se estableció mediante juicio de expertos (Carretero-Dios y Pérez, 2005); la confiabilidad, a través de herramientas estadísticas como el alfa de Cronbach; y la adaptabilidad, mediante la aplicación de una prueba piloto.

En lo referente a las prácticas de los profesores de matemáticas, estas se entienden como el conjunto de conocimientos, interacciones con los estudiantes, consideraciones del contexto, aspectos didácticos y procesos de actualización frente a reformas educativas como la EF. Dichas prácticas se organizaron a partir de las categorías propuestas por Ponte y Serrazina (2004) y Parada (2011), quienes las definen en acciones tales como seleccionar, usar y diseñar recursos; proponer tareas; comunicarse en el aula; evaluar; realizar adaptaciones curriculares; colaborar y profesionalizarse.

Por último, respecto a los temas relacionados con finanzas, se adoptó la definición de Educación Financiera propuesta por la OCDE (2014), así como los ámbitos conceptuales planteados por el MEN (2014), que incluyen: conceptos clave de finanzas, ahorro e inversión, presupuesto, manejo de deudas y sistema financiero.

3. ¿Cómo diseñamos y validamos el formulario?

La investigación se enmarcó en una investigación cualitativa-descriptiva tipo encuesta. Para el desarrollo de la investigación, se establecieron las siguientes fases metodológicas: i) revisión de la literatura y delimitación conceptual, donde se establecieron los elementos teóricos y conceptuales; ii) definición de las características del instrumento; iii) diseño del formulario, donde se consideraron los criterios propuestos por García (2004); iv) valoración y rediseño del instrumento, mediante juicio experto y pilotaje; y v) reporte de resultados, donde se establecieron tres categorías de análisis: estructura técnica, versión final del formulario e identificación de aproximaciones prácticas.

4. ¿Qué evidenció el formulario sobre las prácticas docentes en educación financiera?

Los resultados se organizaron en tres categorías: valoración del instrumento según su estructura técnica, identificación de aproximaciones prácticas y versión final del formulario.

- i. En cuanto a la valoración de la estructura técnica, la validación por juicio de expertos permitió depurar la primera versión del formulario, reduciendo los ítems de 27 a 22 y presentando las preguntas de manera más atractiva mediante el uso de imágenes. Posteriormente, en la segunda versión del instrumento, se aplicó el coeficiente Alfa de Cronbach, alcanzando un nivel de fiabilidad excelente ($\alpha = 0,985$). El pilotaje evidenció algunos sesgos, lo que llevó a la construcción de una tercera versión del formulario.
- ii. Con relación a las aproximaciones prácticas, el pilotaje permitió identificar que los docentes suelen emplear contextos relacionados con el presupuesto y el ahorro para la enseñanza de finanzas. Sin embargo, se evidenció que casi no abordan situaciones vinculadas al manejo de deudas y que rara vez utilizan herramientas digitales como Excel o GeoGebra para trabajar estos temas. Además, gran parte de los encuestados manifestó no haber recibido capacitación en Educación Financiera. Al mismo tiempo, reconocen la necesidad de contar con espacios de formación en este campo, tanto en la universidad como en procesos de actualización profesional.
- iii. Del mismo modo, las respuestas de los profesores señalaron la importancia de que las universidades promuevan espacios de formación docente en EF, con el fin de impulsar la enseñanza de estos temas desde la educación primaria.

5. ¿Qué se pudo concluir?

La investigación permitió consolidar una versión del formulario que permite identificar aproximaciones prácticas en Educación Financiera. Su validación, a través de juicio de expertos, análisis estadísticos (alfa de Cronbach) y pilotaje, garantizó la pertinencia, fiabilidad y adaptabilidad del instrumento. El uso de la escala Likert resultó adecuado para la recolección de información y el ajuste de la estructura técnica. Finalmente, los resultados evidencian que, si bien existen prácticas docentes relacionadas con temas como presupuesto y ahorro, persiste la necesidad de generar espacios de formación en Educación Financiera tanto en la universidad como en la actualización profesional de los profesores.

Referencias

- [1] ALFONSO, J., *Actividad Matemática posibilitada mediante el estudio de situaciones económicas y/o financieras en una población vulnerable*. Tesis de Maestría en Educación Matemática, Universidad Industrial de Santander, 2024.
- [2] GARCÍA, F. G., *El cuestionario: recomendaciones metodológicas para el diseño de cuestionarios*. Limusa, 2004.
- [3] PARADA, S., *Reflexión y acción en comunidades de práctica: Un modelo de desarrollo profesional*. Tesis de doctorado, Centro de Investigaciones y Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, 2011.

- [4] OECD, *Recommendation on Principles and Good Practices for Financial Education and Awareness*. Organisation for Economic Co-operation and Development, 2005. Disponible en: <https://legalinstruments.oecd.org/en/instruments/OECD-LEGAL-0338>.

4.13 Creencias de profesores de Santander sobre el uso de situaciones del contexto financiero en clase de Matemática

León Ardila Ludwing Daniel¹, Suaterna Abril Andrey Felipe² Parada Rico Sandra Evely³

Resumen

Esta investigación analiza las creencias de profesores de matemáticas sobre el uso del contexto financiero en la enseñanza, con el propósito de fortalecer la conexión entre las matemáticas y la realidad cotidiana. A través de un cuestionario validado por juicio de expertos y pilotaje previo, se recopilieron percepciones de docentes en ejercicio. Los hallazgos evidencian que los profesores consideran la educación financiera como una herramienta clave para la toma de decisiones, la generación de cultura financiera y la formación de ciudadanos críticos. Además, destacan beneficios didácticos como el aumento de la motivación y el aprendizaje significativo, pero también identifican desafíos, como la falta de formación en el área y restricciones institucionales. Estos resultados se discuten en relación con marcos teóricos y documentos internacionales, resaltando la necesidad de fortalecer la capacitación docente para integrar eficazmente la educación financiera en la enseñanza de las matemáticas.

Palabras & frases claves: Creencias de profesores, Educación financiera, Educación Matemática

1. Introducción

La enseñanza de las matemáticas en Colombia enfrenta el reto de conectar los conceptos escolares con situaciones de la vida cotidiana. En este contexto, la educación financiera surge como un recurso didáctico que permite dar significado a nociones matemáticas, favoreciendo un aprendizaje significativo. Sin embargo, las creencias de los profesores influyen de manera decisiva en la incorporación de estas situaciones en el aula, ya que determinan la manera como valoran, aceptan o rechazan la inclusión de contextos financieros en su práctica docente. Este trabajo presenta un estudio realizado con docentes de Matemáticas del departamento de Santander, orientado a identificar y describir sus creencias respecto al uso de contextos financieros en la enseñanza de la disciplina.

2. Revisión Bibliográfica

La revisión bibliográfica permitió identificar tres ejes fundamentales: el uso de contextos en la enseñanza de las matemáticas, las creencias de los profesores y la relevancia de la educación financiera. Diversos autores coinciden en que situar los contenidos en contextos reales facilita la comprensión y otorga sentido al aprendizaje, pero en la práctica este recurso sigue siendo poco utilizado en las aulas. Investigaciones como las de Freudenthal (1981), Arrieta y Díaz (2015) y Hoffman y Even (2023) evidencian que los contextos significativos, en especial los financieros, pueden actuar como puentes entre las matemáticas y la vida cotidiana, aunque su implementación depende en gran medida de las creencias docentes. Estas, como muestran Gainsburg (2008) y Sere (2023), influyen en la toma de

¹Universidad Industrial de Santander. Correo: ludwin2210144@correo.uis.edu.co

²Universidad Industrial de Santander. Correo: ,

³Universidad Industrial de Santander. Correo: sanevepa@uis.edu.co

decisiones pedagógicas y explican tanto la disposición de los profesores a emplear conexiones reales como las resistencias derivadas de limitaciones personales e institucionales.

3. Aspectos teóricos y conceptuales

En esta investigación se entiende por creencias los juicios de un individuo acerca de la verdad o falsedad de una proposición, que además orientan su forma de actuar (Villoro, 1996; Pajares, 1992). Estas pueden expresarse de manera explícita en el discurso, denominándose creencias profesadas, o inferirse de las valoraciones y emociones manifestadas por los sujetos, en cuyo caso se consideran creencias implícitas (Hernández, Arellano y Martínez, 2020). Por otra parte, el contexto financiero se define como el conjunto de situaciones relacionadas con la administración del dinero y la toma de decisiones económicas cotidianas (MEN, 2022). Este se organiza en cinco ámbitos: i) contextualización financiera, que introduce conceptos básicos como tasa de interés o ingreso per cápita; ii) presupuesto, como herramienta de planificación de recursos; iii) ahorro e inversión, que promueve metas a corto, mediano y largo plazo; iv) manejo de deudas, para comprender y usar responsablemente el crédito; y v) sistema financiero, que abarca el funcionamiento de las instituciones bancarias y sus servicios. Para identificar las creencias docentes frente a este contexto, se diseñaron formularios con preguntas abiertas, cuya construcción y validación siguió criterios de claridad, pertinencia y coherencia, permitiendo recoger tanto expresiones directas como inferencias sobre las prácticas y valoraciones de los profesores en torno a la relación entre matemáticas y finanzas.

4. Metodología

El proceso metodológico incluyó varias fases: primero, la revisión bibliográfica, que permitió delimitar el problema y fundamentar teóricamente la investigación; luego, el diseño de un instrumento de recolección de datos en forma de formulario con preguntas abiertas, elaborado con base en los criterios de claridad, pertinencia y coherencia, y validado mediante juicio experto. Posteriormente, se realizó un pilotaje inicial con profesores en formación, que permitió ajustar la redacción y reducir el número de preguntas para favorecer la calidad de las respuestas. La recolección de información se llevó a cabo con docentes en ejercicio del departamento de Santander, quienes respondieron el formulario a través de la aplicación WhatsApp, lo que les brindó flexibilidad en el tiempo y formato de respuesta. Finalmente, las respuestas fueron sistematizadas y analizadas a partir de la clasificación de creencias profesadas e implícitas, con el fin de identificar tendencias, dificultades y oportunidades en torno a la integración de la educación financiera en la enseñanza de las matemáticas.

5. Resultados

El análisis de las respuestas de los docentes permitió identificar un conjunto de creencias en torno a la incorporación de la educación financiera en las clases de Matemáticas. En primer lugar, los profesores destacaron que la educación financiera fomenta una cultura financiera, contribuye a la construcción de un mejor futuro, promueve la conciencia crítica sobre el uso del dinero y favorece la toma de decisiones informadas. Estas creencias se alinean con los Objetivos de Desarrollo Sostenible y con lineamientos de entidades como Asobancaria, que promueven la inclusión de la educación financiera desde la escuela. En segundo lugar, se evidenció que los docentes consideran que el contexto financiero ofrece aprendizajes significativos en Matemáticas, ya que hace las clases

más dinámicas, motiva a los estudiantes y les permite relacionar los conceptos abstractos con su vida cotidiana. Sin embargo, también reconocen que este enfoque representa un reto, pues requiere mayor preparación y formación docente en temas financieros. Finalmente, emergieron creencias sobre las mutuas contribuciones entre ambas áreas: por un lado, la educación financiera favorece el desarrollo del pensamiento matemático, y por otro, las matemáticas se conciben como una herramienta esencial para comprender y gestionar situaciones financieras reales.

6. Conclusiones

En este estudio se logró identificar las creencias de los profesores de Matemáticas del departamento de Santander frente a la incorporación de la educación financiera en el aula, a partir de un proceso metodológico flexible y cuidadosamente diseñado. El uso de formularios con preguntas abiertas, validados mediante juicio experto y ajustados tras un pilotaje inicial, permitió obtener respuestas claras, espontáneas y de gran riqueza conceptual. La recolección de datos a través de WhatsApp facilitó la participación de los docentes y contribuyó a que expresaran sus puntos de vista sin presiones de tiempo ni sobrecarga de preguntas. Estos resultados evidencian que, además de la importancia de los hallazgos sobre las creencias docentes, el diseño de instrumentos adecuados y el uso de herramientas tecnológicas accesibles representan factores clave para garantizar la calidad de la información y, en consecuencia, la solidez de la investigación.

Referencias

- [1] ARRIETA VERA, J., & DÍAZ MORENO, L. *Una perspectiva de la modelación desde la Socioepistemología*. Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa, **18**(1) (2015):19–48.
- [2] FREUDENTHAL, H. *Major Problems of Mathematics Education*. Educational Studies in Mathematics, **12**(2) (1981):133–150.
- [3] GAINSBURG, J. *Conexiones del mundo real en la enseñanza de matemáticas en secundaria*. Revista de formación de profesores de matemáticas, **11** (2008):199–219.
- [4] HERNÁNDEZ MORENO, A., ARELLANO GARCÍA, Y., & MARTÍNEZ SIERRA, G. *Creencias matemáticas profesadas e implícitas de profesores universitarios de matemáticas*. Educación matemática, **32**(2) (2020):99–121.
- [5] HOFFMANN, A. & EVEN, R. *The mutual contribution between mathematics and other fields: Mathematicians' and teachers' views*. ZDM-Mathematics Education, **55**(4) (2023):909–021.
- [6] MEN. . *Mi plan, mi vida, mi futuro: orientaciones pedagógicas para la educación económica y financiera*. Bogotá, Colombia, 2022.
- [7] PAJARES, MF *Creencias de los docentes e investigación educativa: Limpiando un constructo desordenado*. Revista de Investigación Educativa, **62**(3) (1992):307–332.
- [8] VILLORO, L., *Creer, saber, conocer*. Siglo XXI. España, 1996.

4.14 Del campo al mercado: una experiencia de resolución de problemas matemáticos en estudiantes de segundo grado

Silvia Juliana Esteban Moreno¹

Resumen

El ser humano se caracteriza por su naturaleza social. A lo largo de su vida se enfrenta a diversas situaciones en distintos contextos donde requiere la toma de decisiones informadas y con sentido. En este marco, la resolución de problemas adquiere relevancia como una habilidad que permite afrontar los desafíos del mundo actual. La presente investigación tiene como objetivo contribuir al fortalecimiento de la competencia de resolución de problemas mediante el diseño de situaciones problema de adición y sustracción contextualizadas en el entorno del campo, dentro de una propuesta interdisciplinar para segundo grado. La metodología se enmarca en un enfoque cualitativo bajo la investigación-acción. Los resultados evidencian mejoras en la resolución de problemas cuando el trabajo se realiza de manera guiada y conjunta, aunque persisten limitaciones en el abordaje individual. Estos avances se lograron a partir de la aplicación del método de Pólya y del uso del material didáctico *tren de resolución de problemas*.

Palabras & frases claves: Resolución de problemas, Método Pólya.

1. Introducción

La resolución de problemas constituye una habilidad esencial en la formación de los estudiantes, no solo como una competencia matemática, sino también como una herramienta clave para enfrentar los desafíos del mundo actual. No obstante, este proceso implica una alta complejidad. Gaulin (2001) sostiene que las situaciones problema requieren reflexión, búsqueda e investigación, dado que no admiten respuestas inmediatas o automáticas.

Asimismo, la resolución de problemas involucra diversos factores. Según Juidías y Rodríguez (2007), estos se relacionan con el problema matemático, el estudiante que lo resuelve y el contexto en el cual aprende o ejecuta el proceso de resolución.

2. Planteamiento del problema

En educación matemática, la UNICEF define la resolución de problemas como la capacidad para identificar un problema, tomar medidas lógicas para resolverlo y evaluar la solución implementada. Por su parte, el MEN (2006) establece que resolver problemas matemáticos implica analizar situaciones, identificar lo relevante y establecer relaciones entre sus componentes.

En el grado 202 de la Institución Educativa Técnico Dámaso Zapata se ha evidenciado interés por la resolución de problemas; sin embargo, persisten dificultades en operaciones básicas y en la organización escrita de los procedimientos, lo que justifica la necesidad de fortalecer esta competencia desde un contexto significativo.

¹Semillero STEAM+H, Universidad Industrial de Santander. Correo: silvia2200239@correo.uis.edu.co

3. Referentes teóricos

Pólya (1965) plantea que resolver un problema implica buscar una acción adecuada para alcanzar un objetivo que no se logra de forma inmediata, proponiendo cuatro fases: comprensión del problema, concepción de un plan, ejecución del plan y visión retrospectiva. Complementariamente, Mayer (1986) identifica conocimientos lingüísticos, semánticos, esquemáticos, operativos y estratégicos como fundamentales en este proceso.

4. Resultados y conclusiones

La implementación del enfoque de investigación–acción permitió identificar avances significativos en la resolución de problemas cuando se utilizó el *tren de resolución de problemas* como recurso didáctico. El contexto del campo facilitó la comprensión de las situaciones planteadas y favoreció la participación activa de los estudiantes. No obstante, se evidenciaron dificultades en el trabajo individual, asociadas principalmente a la comprensión lectora y a la selección de la operación adecuada.

Referencias

- [1] GAULIN, C. *Tendencias actuales de la resolución de problemas*. Sigma, **19**(1) (2001):51–63.
- [2] JUIDÍAS BARROSO, J., RODRÍGUEZ ORTIZ, I. R., *Dificultad de aprendizaje e intervención psicopedagógica en la resolución de problemas matemáticos*. Rev. Educ. **342** (2007):257–286.
- [3] MAYER, R. E. *Pensamiento, resolución de problemas y cognición*. Paidós, 1986.
- [4] Pólya, G. *¿Cómo plantear y resolver problemas?* Trillas, 1965.
- [5] Ministerio de Educación Nacional. *Estándares Básicos de Competencias*. MEN, 2006.

4.15 Desarrollo Histórico y Epistemológico de la Geometría y la Enseñanza de la Geometría

Laura Helena García García¹

Resumen

El presente trabajo expone los avances de una investigación orientada a analizar el desarrollo histórico y epistemológico de la geometría y la enseñanza de la geometría, como fundamento para el diseño de una estrategia didáctica centrada en el desarrollo del pensamiento geométrico en el plano y el espacio para estudiantes de básica secundaria. Para ello, se realiza un análisis documental de literatura especializada con enfoque de contenido temático, de textos científicos recientes publicados entre 2015 y 2024, complementado con un análisis de referentes clásicos que permiten contextualizar los fundamentos históricos y epistemológicos de la disciplina. El corpus consolidado evidencia cuatro tendencias articuladas: (1) una aproximación histórica a la geometría, (2) el papel de la lúdica y la mediación didáctica en el aprendizaje, (3) la relevancia de las transformaciones y relaciones en el pensamiento geométrico y (4) la necesidad de replantear los enfoques tradicionales de enseñanza. Estas tendencias constituyen un marco teórico que sustentan la estrategia didáctica propuesta y brindan los elementos conceptuales necesarios para orientar la estrategia hacia el desarrollo del pensamiento geométrico en el plano y el espacio.

Palabras & frases claves: pensamiento geométrico, epistemología de la matemática, historia de la geometría, enseñanza de la geometría.

1. Introducción

La geometría se ha desarrollado a lo largo del tiempo en diversos contextos culturales y científicos. Es, por tanto, uno de los fundamentos históricos de la matemática que ha adquirido un papel importante en el desarrollo del pensamiento [14].

Sin embargo, en la educación matemática ha sido un desafío la enseñanza de la geometría debido a la persistencia de enfoques tradicionales centrados en la memoria, la verbalización y las limitaciones de representaciones, cuanto más este descarnado el estudiante se garantiza el éxito en las matemáticas. Este enfoque descontextualiza al estudiante y dificulta comprensión de las nociones fundamentales del pensamiento geométrico, especialmente en los niveles de básica secundaria.

Aunque el Ministerio de Educación Nacional [16] reconoce la importancia del desarrollo del pensamiento geométrico, en la práctica diversas instituciones ignoran la geometría como una asignatura más del currículo. Estudios han mostrado que en la prueba ICFES los estudiantes presentan dificultades significativas en la interpretación de relaciones espaciales, las figuras y representaciones en el plano.

En ese sentido, es menester del docente replantear las prácticas de enseñanza y analizar la geometría y su enseñanza desde lo histórico y epistemológico para el diseño de una estrategia didáctica orientada al desarrollo del pensamiento geométrico en el plano y el espacio.

¹Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia. Correo: laura.garcia16@uptc.edu.co

2. Metodología

La investigación es de tipo cualitativo, descubre, construye e interpreta la literatura de la historia, la epistemología y asociados a la enseñanza de la geometría. Usa el enfoque de teoría fundamentada, la que sigue las etapas sugeridas por Strauss y Corbin (1998). El objetivo es generar un marco teórico que integre las dimensiones: histórica, epistemológica de la geometría y la enseñanza de la geometría.

Etapas	Descripción y acciones clave
1. Muestreo Inicial y Re-copilación Intencionada	Selección de documentos iniciales de autores clásicos de la historia de la geometría, referentes epistemológicos y artículos sobre pensamiento geométrico y estudios sobre la enseñanza de la geometría (2015-2024).
2. Inmersión Analítica y Codificación Abierta	Análisis línea a línea de los textos y codificación de conceptos emergentes como: “desarrollo histórico”, “conceptos primitivos”, “demostración axiomática”, “obstáculos epistemológicos”, “pensamiento geométrico”, “currículo escolar”, “enfoques pedagógicos”, “visualización” y “uso de herramientas”.
3. Codificación Axial y Desarrollo de Categorías	Agrupación de los códigos para formar categorías amplias (históricas, epistemológicas, curriculares, cognitivas y didácticas). Identificación de relaciones entre ellas: causales, secuenciales, jerárquicas y contextuales.
4. Muestreo Teórico Iterativo	Búsqueda de nuevos documentos en función de las categorías emergentes, con el fin de contrastarlas, ampliarlas o afinarlas.
5. Codificación Selectiva y Categoría Central	Las categorías se articulan en torno a una categoría núcleo: la relación entre los fundamentos históricos y epistemológicos y el desarrollo del pensamiento geométrico.
6. Saturación Teórica	Los nuevos documentos no añaden información significativa a las categorías, indicando que sistema categorial se ha consolidado.
7. Elaboración del Marco Teórico (Teorización)	Se construye el marco teórico conceptual final que integra las categorías desarrolladas y articuladas hacia la propuesta didáctica.

Cuadro 1: Fuente: Elaboración propia.

3. Resultados

El análisis documental identifica cuatro tendencias centrales construidas a partir de las categorías consolidadas que permiten comprender el desarrollo histórico y epistemológico de la geometría y su enseñanza.

1. Una aproximación histórica a la geometría.

La revisión documental muestra que la geometría se ha construido históricamente como un saber en constante transformación. Desde la formalización axiomática de Euclides, que dio estructura al razonamiento deductivo, hasta la revolución conceptual introducida por Descartes con la geometría analítica, la disciplina ha redefinido sus métodos y objetos. Posteriormente, las geometrías no euclidianas desarrolladas por Gauss, Lobachevsky y Riemann evidenciaron que la geometría no es un conjunto fijo de verdades, sino una construcción histórica que evoluciona y por ende se transforma. Estas perspectivas, recogidas por autores como Kline (1972), permiten comprender que la enseñanza actual de la geometría debe reconocer su trayectoria histórica que han configurado sus significados.

2. El papel de la lúdica y la mediación didáctica en el aprendizaje.

La literatura reciente destaca que la lúdica y las mediaciones didácticas favorecen la construcción del pensamiento geométrico, especialmente en estudiantes de básica secundaria. Autores como Castelnuovo, Laborde y Gutiérrez resaltan que el juego, la manipulación y el uso de herramientas como la geometría dinámica potencian la visualización, el razonamiento espacial y la comprensión de relaciones. No lejano con los planteamientos de Vasco, quien señala la necesidad de trabajar con “objetos vivos”, es decir, con materiales, acciones y representaciones dinámicas que permitan a los estudiantes construir significado a partir de la experiencia directa y no de figuras estáticas o descontextualizadas.

3. La relevancia de las transformaciones y relaciones en el pensamiento geométrico.

Los estudios analizados muestran que las transformaciones geométricas como simetrías, rotaciones y traslaciones, constituyen un eje esencial del pensamiento geométrico contemporáneo. Investigadores como Duval, Gutiérrez y Jones señalan que el aprendizaje geométrico se fortalece cuando los estudiantes analizan invariantes, comparan representaciones y establecen relaciones entre figuras en el plano y el espacio. En esta misma línea D'Ambrosio enfatiza que la comprensión del espacio depende de la capacidad de establecer relaciones entre objetos, interpretarlas y usarlas en contextos reales.

4. La necesidad de replantear los enfoques tradicionales de enseñanza.

El análisis documental muestra una crítica constante hacia los enfoques tradicionales que reducen la enseñanza de la geometría a la memorización, la copia de figuras y la aplicación mecánica de procedimientos. Autores como Godino, Brousseau, Skemp y D'Amore advierten que estas prácticas obstaculizan la comprensión conceptual y limitan el desarrollo del razonamiento geométrico. En respuesta, la literatura destaca enfoques pedagógicos orientados a la exploración, la argumentación y el uso de diversas representaciones que promuevan procesos de construcción activa. Esta tendencia pone de manifiesto la necesidad de transformar las prácticas de aula para favorecer aprendizajes geométricos más significativos y coherentes con las demandas formativas actuales.

Referencias

- [1] BATTISTA, M. T., *The development of geometric and spatial thinking*. LESTER, F.K. (Ed.). Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning. Charlotte, NC: Information Age Publishing. **9** (2007):843–908.
- [2] BOERO, P., *Epistemological and historical perspectives in mathematics education*. ZDM - The International Journal on Mathematics Education. **39** (2007):3–14.
- [3] BROUSSEAU, G., *Theory of didactical situations in mathematics: Didactique des mathématiques*. Springer, 1997.
- [4] CASTELNUOVO, E., *Didáctica de la matemática*. Oikos-Tau, 1981.
- [5] D'AMBROSIO, U., *Ethnomathematics and the Challenge of Globalization*. EN: GREER, B. ET AL. (Eds.), *Culturally Responsive Mathematics Education*, pp. 25–44. Routledge, 2008.

- [6] D'AMORE, B. *El sentido de la argumentación en la didáctica de la matemática*. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, **18**(3) (2015):307–334.
- [7] FREUDENTHAL, H., *Didáctica Realista de las Matemáticas*. Reidel Publishing Company, 1983.
- [8] GODINO, J. D. *Un enfoque ontosemiótico de la cognición matemática*. Recherches en Didactique des Mathématiques, **22**(2–3) (2002):237–284.
- [9] GUTIÉRREZ, A., *Visualization in 3-Dimensional Geometry: In Search of a Framework*. En: PUIG, L., GUTIÉRREZ, A. (Eds.), *Proceedings of the 20th PME Conference*, Vol. 1, pp. 3–19, 1996.
- [10] HERNÁNDEZ SAMPIERI, R., AND FERNÁNDEZ COLLADO, C., AND BAPTISTA LUCIO, M. P. *Metodología de la investigación (6th ed.)* McGraw-Hill, 2014.
- [11] HERBST, P. AND FUJITA, T. AND HALVERSCHEID, S. AND WEISS, M., *The Learning and Teaching of Geometry in Secondary Schools: A Modeling Perspective*. Routledge, 2017.
- [12] JONES, K., *Issues in the Teaching and Learning of Geometry*. En: HAGGARTY, L. (Ed.), *Aspects of Teaching Secondary Mathematics: Perspectives on Practice*, pp. 121–139. RoutledgeFalmer, 2002.
- [13] KINACH, B. M., *Understanding spatial and metric thinking in geometry*. Journal of Mathematical Behavior. **31** (2012):30–38.
- [14] KLINE, M., *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*. Oxford University Press. **9** (1972):501–517.
- [15] LABORDE, C., *The Hidden Role of Diagrams in Students' Construction of Meaning in Geometry*. En: KILPATRICK, J., HOYLES, C., SKOVSMOSE, O., VALERO, P. (Eds.), *Meaning in Mathematics Education*, pp. 159–180. Springer, 2005.
- [16] MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACIONAL, *Derechos Básicos de Aprendizaje en Matemáticas*. Bogotá: MEN. **9** (2016):1–40.
- [17] RADFORD, L., *At the crossroads of culture, history, and mathematics: A cultural-historical approach to mathematics education*. Educational Studies in Mathematics. **85** (2014):79–98.
- [18] RADFORD, L., *The Theory of Objectification*. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa. **17** (2014):7–38.
- [19] SKEMP, R. R., *Relational understanding and instrumental understanding*. Mathematics Teaching. **77** (1976):20–26.
- [20] STRAUSS, A., CORBIN, J., *Basics of Qualitative Research: Techniques and Procedures for Developing Grounded Theory*. 2nd ed. Sage Publications, 1998.
- [21] VALERO, O., *Rethinking mathematics education curricula: diversity and epistemic pluralism*. For the Learning of Mathematics. **39** (2019):17–23.
- [22] VAN HIELE, P. M., *Estructuras del pensamiento en la enseñanza de la geometría*. International Journal of Mathematical Education in Science and Technology. **17** (1986):29–41.

4.16 Dos Estrategias Lúdicas que Impulsan la Innovación Docente en Matemáticas

Xavier Antonio Terán Batista¹

Resumen

En el campo de la innovación educativa en matemáticas, uno de los desafíos más complejos es lograr que los estudiantes realmente se apropien del conocimiento que construyen, superando la idea común de que las matemáticas son un lenguaje complejo. Este obstáculo no solo afecta la comprensión conceptual, sino que también impacta la motivación y el rendimiento académico, llegando en muchos casos a influir en la deserción, especialmente en los niveles de educación superior. Este proyecto nace para abordar esta problemática desde una perspectiva práctica, partiendo de la experiencia con dos herramientas lúdicas: Xafradrian's Room, que está orientado a desarrollar el razonamiento lógico y la resolución de problemas algebraicos, y Calculus in the Sudoku, que busca mejorar tanto la motivación como el desempeño en cálculo diferencial. La propuesta consistió en comparar el impacto pedagógico y el potencial innovador de ambos recursos a través de un Análisis Multicriterio, que evaluó aspectos como la motivación, la accesibilidad y el rendimiento académico, utilizando para ello escalas validadas por expertos. Al integrar datos cuantitativos y cualitativos en un modelo de decisión, fue posible identificar con claridad las fortalezas y limitaciones de cada juego. Los resultados preliminares mostraron que Calculus in the Sudoku facilita la comprensión de procedimientos clave en cálculo, mientras que Xafradrian's Room contribuye a estimular el pensamiento crítico y la resolución de problemas de forma autónoma y colaborativa. Ambos aumentan el rendimiento académico, aunque uno de ellos destaca más en cuanto a la motivación. Lejos de ser conclusivo, este estudio abre caminos para la mejora continua de las estrategias de aprendizaje lúdico, aportando elementos importantes para la innovación educativa y el diseño de materiales didácticos que respondan a la diversidad de contextos y realidades en las aulas.

Palabras & frases claves: Estrategias educativas, juego educativo, y proceso de aprendizaje.

1. Introducción

La enseñanza de las matemáticas continúa enfrentando desafíos significativos debido a la percepción predominante entre los estudiantes de que esta disciplina es difícil de aprender, condición que reduce la motivación y afecta negativamente el rendimiento académico, especialmente en niveles superiores de educación (Ashcraft & Krause, 2007; Maloney et al. 2015). Esta realidad demanda el diseño e implementación de estrategias pedagógicas que propicien una apropiación activa y significativa del conocimiento matemático, favoreciendo el compromiso estudiantil y el desarrollo de habilidades cognitivas esenciales (Boaler, 2013).

En este contexto, la incorporación de recursos lúdicos ha mostrado potencial para mejorar la experiencia de aprendizaje y fomentar el pensamiento crítico en matemáticas (Ke, 2016; Papastergiou, 2009). El presente proyecto se centra en dos propuestas: Xafradrian's Room, orientada al fortalecimiento del razonamiento lógico y la resolución de problemas algebraicos, que nace de un proyecto de

¹Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Correo: xateranb@udistrital.edu.co

investigación enmarcado e implementado en la Universidad Pedagógica Dominicana de la República Dominicana, y Calculus in the Sudoku, cuyo objetivo es aumentar la motivación y el rendimiento en cálculo diferencial, este juego fue creado e implementado en la Escuela Superior de Empresa, Ingeniería y Tecnología ESEIT de la ciudad de Bogotá, Colombia (Astudillo-Villalba et al. 2022; Terán-Batista & De Oleo-Comas, 2025). Ambas estrategias están fundamentadas en un profundo análisis de las necesidades de los estudiantes y contextos educativos, incorporando un enfoque innovador en la enseñanza matemática.

2. AMC entre dos juegos

La estrategia metodológica del estudio se fundamenta en el enfoque del Análisis Multicriterio (AMC), en particular a través del Proceso de Jerarquía Analítica (AHP por sus siglas en inglés), técnica robusta para cuantificar criterios múltiples de manera estructurada mediante comparaciones por pares y juicios de expertos (Saaty, 1980). Este método permite ponderar y analizar dimensiones específicas como usabilidad, impacto en el aprendizaje, motivación, accesibilidad y potencial innovador, apoyándose en escalas validadas previamente por expertos en educación. Además, se reconoce la creciente prevalencia del AHP en contextos educativos, especialmente en la enseñanza superior y entornos de e-learning (Yüksel et al. 2023), lo que ratifica su idoneidad para esta investigación centrada en juegos pedagógicos. El empleo del AHP no solo otorga transparencia al proceso de ponderación, sino que facilita la integración de perspectivas tanto cuantitativas como cualitativas en un modelo de decisión, lo cual enriquece la interpretación de los hallazgos y ayuda a construir un perfil diferencial de cada recurso lúdico en función de sus fortalezas y debilidades.



Los avances preliminares revelan que Calculus in the Sudoku favorece la comprensión de procedimientos esenciales del cálculo diferencial, mientras que Xafradrian's Room estimula el pensamiento crítico y la resolución autónoma y colaborativa de problemas matemáticos. La aplicación del AMC ha permitido detectar patrones diferenciales en los aprendizajes promovidos por cada enfoque, lo

que ha motivado la propuesta de ajustes orientados a maximizar su eficacia en diversos contextos educativos. En cuanto a resultados parciales, se observa que uno de los juegos exhibe un efecto motivacional más pronunciado, justificando su implementación ampliada. Ambos recursos, además, contribuyen al aumento del rendimiento académico en las asignaturas correspondientes. No obstante, se identificaron limitaciones en cuanto a la accesibilidad tecnológica, que varía según el contexto institucional, y dificultades en la alineación curricular en uno de los casos, aspectos que requieren rediseño o adaptación de estrategias y criterios evaluativos.

Aunque el proyecto aún no finaliza, estos hallazgos ofrecen insumos valiosos para la innovación educativa, particularmente en el diseño e integración de juegos didácticos que respondan a la diversidad y complejidad de las realidades educativas actuales. Se espera que al terminar las etapas restantes se consoliden conclusiones más robustas que orienten decisiones futuras en la investigación y práctica pedagógica en matemáticas.

Referencias

- [1] ASHCRAFT, M. H., & KRAUSE, J. A. *Working memory, math performance, and math anxiety*. *Psychonomic Bulletin & Review*, **14**(2) (2007):243–248. <https://doi.org/10.3758/BF03194059>
- [2] ASTUDILLO-VILLALBA, F. R., TERAN-BATISTA, X., DE OLEO-COMAS, A., *Diseño de un Juego Serio como Estrategia Didáctica para la Enseñanza de las Matemáticas a Estudiantes de Educación Superior*. EN: ARIZA, ROUQUETTE, RAMÍREZ (Eds.), *Resúmenes del 17° Ciclo de Investigación de las Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales: “Matemáticas que sirven a todos”*, p. 98. Universidad Autónoma Metropolitana, Unidad Xochimilco, México, 2022.
- [3] BOALER, J. *Ability and mathematics: The mindset revolution that is reshaping education*. *Forum*, **55**(1) (2013):143–152. <https://doi.org/10.2304/forum.2013.55.1.143>
- [4] KE, F. *Designing and integrating purposeful learning in game play: A systematic review*. *Educational Technology Research and Development*, **64**(2) (2016):219–244. <https://doi.org/10.1007/s11423-015-9418-1>
- [5] MALONEY, E. A., WAECHTER, S., RISK, E. F., & FUGELSANG, J. A. *Mathematics anxiety and mathematical performance: The mediating role of math-related working memory*. *Cognition and Emotion*, **29**(3) (2015):501–514. <https://doi.org/10.1080/02699931.2014.953314>
- [6] PAPASTERGIOU, M. *Digital game-based learning in high school computer science education: Impact on educational effectiveness and student motivation*. *Computers & Education*, **52**(1) (2009):1–12. <https://doi.org/10.1016/j.compedu.2008.06.004>
- [7] SAATY, T. L., *The Analytic Hierarchy Process: Planning, Priority Setting, Resource Allocation*. 2nd ed., RWS Publishing, 1980.
- [8] TERÁN-BATISTA, X. A. & DE OLEO-COMAS, A. *Sudoku bajo el lente del cálculo: una perspectiva de evaluación en matemáticas*. *Praxis*, **21**(2) (2025):1–21. <https://doi.org/10.21676/23897856.6500>
- [9] YÜKSEL, F. Ş., KAYADELEN, A. N., & ANTMEN, F. *A systematic literature review on multi-criteria decision making in higher education*. *International Journal of Assessment Tools in Education*, **10**(1) (2023):12–28. <https://doi.org/10.21449/ijate.1104005>

4.17 Educación Financiera en la Formación de Licenciados en Matemáticas: Una Propuesta Curricular

Edwin Sneyder Serrano Rojas¹, Jorge Enrique Fiallo Leal², Sandra Evely Parada Rico³

Resumen

En esta presentación se expondrán los avances del trabajo de investigación “Finanzas para Enseñar: curso de Educación Financiera para futuros docentes de Matemáticas” cuyo objetivo es “plantear una propuesta curricular de un curso de Educación Financiera para licenciados en matemáticas”. Para el diseño se retoman, por un lado, los elementos financieros definidos por el Ministerio de Educación Nacional (MEN) y, por otro, la estructura curricular propuesta por la Universidad Industrial de Santander (UIS). Asimismo, se adopta el modelo de Meza (2012) para el diseño del curso. El propósito central en esta ponencia es mostrar la organización, estructura y forma del curso propuesto.

Palabras & frases claves: Educación Financiera, Educación Matemática, Diseño Curricular.

1. Introducción

La Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico (OCDE, 2005) plantea que la Educación Financiera es una necesidad global a la que se debe prestar atención, pues es indispensable que los ciudadanos desarrollen habilidades para la toma de decisiones ante situaciones financieras presentes en la cotidianidad. Sin embargo, los resultados de la prueba PISA de 2012 (OCDE, 2014), así como de la encuesta internacional sobre alfabetización financiera en los adultos (OCDE, 2020), muestran que Colombia se encuentra en los últimos puestos, lo que evidencia un nivel de formación financiera considerablemente bajo. Esto pone en evidencia la necesidad de formar a los ciudadanos colombianos en cuestiones financieras y, por lo tanto, el profesor toma un papel fundamental en este proceso de formación.

Debido a las conexiones que existen entre las finanzas y las Matemáticas, el profesor de matemática tiene un papel importante en el desarrollo de competencias financieras, buscando promoverlas desde la formación en Matemáticas (Velásque, 2024). Por lo anterior, en el trabajo de investigación se tiene como objetivo *plantear una propuesta curricular razonada de un curso de Educación Financiera para licenciados en matemáticas de la Universidad Industrial de Santander*.

2. Referentes Conceptuales

Para diseñar el curso de Educación Financiera es necesario considerar dos aspectos fundamentales: i) Los *elementos financieros* que se abordarán en el curso, y ii) Los *elementos curriculares* necesarios para plantear formalmente un curso siguiendo los parámetros de la universidad.

¹Universidad Industrial de Santander. Correo: edwinrojas0203@gmail.com

²Universidad Industrial de Santander. Correo: jfiallo@uis.edu.co

³Universidad Industrial de Santander. Correo: sanevepa@uis.edu.co

2.1. Elementos Financieros

Es importante comprender que el curso que se está diseñando está enfocado en utilizar los contextos financieros para que los profesores de matemáticas en formación reconozcan la utilidad que estos tienen para el desarrollo de los conocimientos matemáticos. Por lo tanto, es necesario definir los elementos financieros que serán la base para orientar el curso.

El MEN (2022) plantea que la Educación Económica y Financiera se desarrolla a partir de tres ejes: Economía, Finanzas y Gestión del Riesgo. Para cada uno de estos ejes plantea ámbitos conceptuales, entendidos como el “conjunto de saberes vinculados entre sí, propios de cada eje, que se encuentran agrupados y organizados de manera lógica y coherente.” (p. 53). Puntualmente, para el eje de las Finanzas, los cinco ámbitos que se buscan desarrollar son: contextualización financiera, presupuesto, ahorro e inversión, manejo de deudas y sistema financiero. Estos ámbitos son justamente los que orientan la organización del curso planteado, con la intención de abordar situaciones de cada uno de estos ámbitos y dar a conocer no solo los contenidos financieros sino también cómo esto permite desarrollar los objetos matemáticos.

2.2. Elementos Curriculares

Los elementos curriculares para establecer el curso son tomados por lo planteado por la UIS en el Acuerdo 023 de 2022. Este acuerdo define los referentes institucionales para la creación, la reforma y la modificación de Programas académicos. Los elementos que deben contener las actividades académicas son: justificación, propósito, resultados de aprendizaje, competencias (macro y micro), contenidos, estrategias de enseñanza y aprendizaje, evaluación del aprendizaje (estrategias, indicadores, equivalencia cuantitativa) y referencias bibliográficas.

Los *resultados de aprendizaje* expresan lo que el estudiante debe saber, comprender y hacer al momento de terminar su proceso de formación en el programa académico (Consejo Académico, 2022). Estos resultados deben ser concretos y observables pues orientan el desarrollo y la evaluación del curso, así como la base para los demás elementos. Las *competencias* son las “capacidades para responder a exigencias para realizar una actividad o tarea desde una combinación de habilidades prácticas y cognitivas interrelacionadas” (Consejo Académico, 2022, p. 51). La idea de competencia va más allá de la adquisición de conocimientos, pues implica la integración de saberes diversos para enfrentar situaciones reales, evidenciando las capacidades que deben desarrollar los futuros profesionales.

Las *estrategias de enseñanza y aprendizaje* se establecen como los procedimientos que se utilizan para llevar a cabo un plan de acción con el objetivo de que los estudiantes logren realizar una tarea determinada. Estas estrategias son entendidas por Díaz-Barriga y Hernández (2002) como los “procedimientos que el agente de enseñanza utiliza en forma reflexiva y flexible para promover el logro de aprendizajes en los alumnos” (p. 141).

3. Estructura de la propuesta curricular

El modelo por el que se orienta el diseño curricular del curso es el planteado por Meza (2012), donde establece que los componentes del currículo se constituyen alrededor de cuatro preguntas: ¿qué enseñar?, ¿cuándo enseñar?, ¿cómo enseñar? y ¿qué, cómo y cuándo evaluar? Estas preguntas constituyen una ruta para organizar el curso, donde, en primer lugar, se definen los elementos que se van

a enseñar. Estos primeros elementos obedecen a los establecidos por el MEN (2022), principalmente alrededor del desarrollo de los ámbitos conceptuales de las Finanzas.

Luego de esto, se organizan los elementos de manera cronológica, presentando una secuencia de contenidos y competencias a desarrollar. En esta segunda etapa se pretende seleccionar los contenidos pertinentes de la primera etapa, teniendo en cuenta la disponibilidad de tiempo y el enfoque con el que se busque desarrollar el curso. Una vez organizado, es necesario definir las estrategias de enseñanza. Para esto, el docente “selecciona las acciones que deberá realizar en su proceso de enseñanza, los recursos que va a necesitar y cómo los va a utilizar en el aula” (Meza, 2012, p. 29). Finalmente, se procede a establecer la forma de evaluación, donde se definen los tipos de evaluación, los métodos y la valoración cualitativa y cuantitativa de cada actividad.

En concreto, el curso se organiza en cinco módulos, uno por cada ámbito conceptual definido por el MEN. Cada módulo se organiza en un libro virtual de Geogebra, en el que los licenciados de matemáticas en formación se enfrentan a situaciones financieras, para identificar la importancia de estos contextos en la enseñanza de las matemáticas y consolidar sus conocimientos en finanzas. Estos módulos se desarrollan en dos momentos principales: un primer momento de aproximación a los simuladores e indagación de conocimientos previos y un segundo momento donde se prioriza la resolución de problemas, promoviendo los diferentes procesos de la actividad matemática. Estos módulos se orientan a partir de preguntas y la socialización con los compañeros y profesor. De esta manera se promueve la discusión, la argumentación de respuestas, la reflexión sobre el uso de estos contextos y la profundización de elementos financieros.

Referencias

- [1] CONSEJO ACADÉMICO DE LA UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER, *Acuerdo n.º 023 de 2022: Por el cual se aprueban los referentes institucionales para la creación, la reforma y la modificación de programas académicos de la Universidad Industrial de Santander*. 25 de enero de 2022.
- [2] DÍAZ-BARRIGA, F., HERNÁNDEZ, G., *Estrategias de enseñanza para la promoción de aprendizajes significativos*. En: *Estrategias docentes para un aprendizaje significativo: una interpretación constructivista*, 2º ed., pp. 137–146. McGraw-Hill Interamericana, 2002.
- [3] MEZA, J., *Diseño y desarrollo curricular*. 1a ed. Red Tercer Milenio, 2012.
- [4] MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACIONAL (MEN), *Mi plan, mi vida y mi futuro: Orientaciones pedagógicas para la educación económica y financiera*. MEN, Bogotá, 2022.
- [5] ORGANIZACIÓN PARA LA COOPERACIÓN Y EL DESARROLLO ECONÓMICO (OCDE). *Improving Financial Literacy. Analysis of Issues and Policies*. OECD Publishing, 2005.
- [6] ORGANIZACIÓN PARA LA COOPERACIÓN Y EL DESARROLLO ECONÓMICO (OCDE), *Resultados de PISA 2012: Lo que los alumnos saben a los 15 años de edad y lo que pueden hacer con lo que saben*. OCDE, 2014.
- [7] ORGANIZACIÓN PARA LA COOPERACIÓN Y EL DESARROLLO ECONÓMICO (OCDE), *OECD/INFE 2020 International Survey of Adult Financial Literacy*. OECD Publishing, 2020.

- [8] VELÁSQUEZ, M. *Perspectivas sobre la Alfabetización Financiera en las Escuelas Colombianas y su relación con la Educación Matemática*. Tesis de Maestría, Universidad Nacional de Colombia, 2024.

4.18 Educación STEM en territorios rurales y urbanos en la provincia de Ubaté como inclusión de equidad y transformación

Monica Lorena Torres Forigua

Resumen

La presente ponencia estudia la importancia de implementar estrategias didácticas que permitan fortalecer las áreas STEM (ciencia, tecnología, ingeniería y matemáticas) en contextos rurales y provinciales, tomando como referencia un estudio de caso desarrollado en la provincia de Ubaté (Cundinamarca, Colombia). Mediante experiencias de aprendizaje con robótica educativa basadas en el uso de simulador Vexcode, Arduino y Lego, se propuso la enseñanza de conceptos de física, matemáticas y tecnología articulados con los conocimientos previos del aula. La investigación reflexiona sobre los retos de implementación relacionados con la conectividad, la infraestructura y la formación docente, así como sobre las oportunidades identificadas en la contextualización del aprendizaje, la motivación estudiantil y la innovación social.

Palabras & frases claves: Educación STEM, robótica educativa, territorios rurales, equidad educativa.

1. Introducción

En los últimos años la educación STEM se ha consolidado como un ambiente de aprendizaje que permite fortalecer competencias en matemáticas, ciencias y tecnología. Además, se constituye como una herramienta pedagógica innovadora para las instituciones interesadas en promover la resolución de problemas y la integración del conocimiento en sus propios contextos. Generalmente, los proyectos STEM se han desarrollado principalmente en el sector urbano, donde se cuenta con conectividad, recursos tecnológicos y formación docente adecuada.

Sin embargo, en los territorios rurales persiste una brecha digital asociada a la falta de infraestructura y de metodologías innovadoras, lo que limita las oportunidades de los estudiantes para desarrollar habilidades disciplinares e interdisciplinares. En este contexto, la provincia de Ubaté constituye un estudio de caso relevante para reflexionar sobre la implementación de estrategias STEM mediante robótica educativa en territorios no urbanos.

2. Sección de desarrollo

2.1. Retos de llevar STEM a los territorios rurales y provinciales

En los contextos rurales se identificaron dificultades asociadas a la infraestructura tecnológica, la conectividad y la formación docente. No obstante, las experiencias de aprendizaje desarrolladas permitieron obtener resultados significativos aun con recursos limitados, convirtiendo estos retos en oportunidades de fortalecimiento institucional y formativo.

Se consolidó un ambiente de trabajo colaborativo entre las instituciones educativas participantes y la Universidad de Cundinamarca, liderado por el programa de Ingeniería de Sistemas y Computación.

Las actividades con Lego, Arduino y el simulador Vexcode permitieron a los estudiantes resignificar el estudio de las matemáticas, la física y la tecnología, al observar la aplicación práctica de conceptos teóricos.

Estas experiencias favorecieron la equidad educativa al permitir que estudiantes rurales y urbanos participaran de manera similar en los procesos de aprendizaje. Asimismo, se fortaleció la motivación, el razonamiento lógico y la integración de conocimientos STEM.

3. Resultados y análisis

Los resultados evidenciaron que los estudiantes rurales y urbanos obtuvieron promedios cercanos en actividades desarrolladas con el simulador Vexcode. En el caso de las intervenciones con Arduino, se observó una ligera ventaja en los estudiantes urbanos, atribuida a una mayor familiaridad con entornos tecnológicos. No obstante, el progreso de los estudiantes rurales fue significativo, considerando que se trataba de su primer acercamiento a la programación y a la metodología STEM.

3.1. Discusión

Las experiencias de robótica educativa demostraron ser estrategias didácticas viables y eficaces para la innovación pedagógica. La participación activa de los estudiantes favoreció la comprensión profunda de los contenidos, la motivación por el aprendizaje y el interés por continuar procesos formativos en ciencias, tecnología y matemáticas.

3.2. Conclusiones

Las experiencias desarrolladas en la provincia de Ubaté permitieron evidenciar que, al brindar condiciones de equidad y acceso a recursos educativos, los estudiantes rurales logran una comprensión significativa de los procesos académicos. La metodología STEM contribuyó al fortalecimiento de competencias transversales, a la innovación social y a la generación de nuevas oportunidades vocacionales en los territorios.

Referencias

- [1] C. A. GUEVARA MUÑOZ, *Aplicando STEM+G: la influencia de la robótica educativa en las percepciones de género en algunas zonas rurales de Colombia*, Ciencia Latina Revista Científica Multidisciplinar. **8** (1) (2024):7315–7331.
- [2] M. U. BERS, *Coding, robotics and socio-emotional learning: Developing a palette of virtues*, Pixel-Bit. Revista de Medios y Educación. **62** (2021):7–36.
- [3] BASUMATARY, D., MAITY, R., *The Potential of Augmented Reality in Indian Rural Primary Education*. IEEE Potentials. **43**(4) (2024):26–31.

4.19 El algoritmo: ¿entidad platónica o proceso ejecutable?

Campo Elías Flórez-Pabón¹

Resumen

Esta ponencia aborda una pregunta filosófica crucial para la educación matemática contemporánea: la naturaleza del algoritmo. Tradicionalmente, la filosofía de la matemática ha debatido si las entidades matemáticas son objetos abstractos y atemporales o construcciones humanas. La irrupción del pensamiento computacional introduce una nueva entidad en esta discusión, obligándonos a reconsiderar la relación entre conocimiento teórico y práctica. Se analizan dos perspectivas contrastantes: una visión platónica, que concibe el algoritmo como una idea abstracta, y una visión procesual, que sostiene que el algoritmo existe solo en su ejecución. Finalmente, se propone una síntesis basada en la relación dialéctica entre Tipo y Token, legitimando el pensamiento computacional como un laboratorio epistemológico para la educación matemática.

Palabras & frases claves: Algoritmo; Filosofía de la educación matemática; Pensamiento computacional.

1. Introducción

La irrupción del pensamiento computacional en la educación contemporánea ha suscitado un debate filosófico fundamental sobre la naturaleza de los objetos matemáticos y computacionales. Tradicionalmente, la filosofía de la matemática ha abordado la existencia de entidades abstractas; sin embargo, el auge de la informática y de tecnologías como las inteligencias artificiales generativas introduce el algoritmo como una nueva entidad de análisis. Esto plantea una pregunta central: ¿es el algoritmo una entidad abstracta e inmutable o un proceso concreto que solo existe a través de su ejecución?

Esta problematización impacta directamente la forma en que se conciben, enseñan y aprenden las matemáticas, pues redefine el rol del error, la ejecución y la construcción del conocimiento.

2. Marco teórico

La naturaleza del algoritmo puede abordarse desde dos perspectivas extremas: una visión platónica y una visión procesual inspirada en la filosofía pragmática.

2.1. La visión platónica

Desde la perspectiva platónica, el algoritmo existe como una verdad abstracta independiente de cualquier implementación concreta. El algoritmo de Euclides, por ejemplo, representa una relación lógica inmutable que reside en el mundo de las ideas matemáticas. En este enfoque, el conocimiento algorítmico es un acto de descubrimiento, no de invención.

¹Universidad de Pamplona, Programa de Filosofía, Grupo de investigación CONQUIRO. Correo: ceflorez@unipamplona.edu.co

2.2. La visión procesual

En contraste, la visión procesual sostiene que el algoritmo solo existe en su ejecución concreta. Inspirada en las ideas de Wittgenstein, esta postura concibe el algoritmo como un conjunto de acciones observables dentro de un contexto específico. El conocimiento algorítmico se construye activamente a través de la interacción, la programación y la depuración.

3. El pensamiento computacional como laboratorio epistemológico

La implementación de algoritmos exige una operacionalización del conocimiento que va más allá de la comprensión abstracta. La programación demanda procedimientos explícitos, revelando vacíos conceptuales y resignificando el error como una fuente de aprendizaje. Así, el pensamiento computacional se convierte en un entorno privilegiado para la construcción activa del conocimiento matemático.

4. Conclusiones

El debate sobre la naturaleza del algoritmo permite replantear la educación matemática desde una perspectiva epistemológica renovada. El conocimiento algorítmico emerge de la relación entre el Tipo abstracto y el Token ejecutable, posicionando la programación como un medio fundamental para el desarrollo de un pensamiento crítico y reflexivo en las ciencias y las humanidades.

Referencias

- [1] ORTUÑO MESEGUER, G., SERRANO, J. L. *Implementación y formación del profesorado en pensamiento computacional*. RIED, **27**(1) (2024):255–287.
- [2] TRIANTAFYLLOU, S. A., SAPOUNIDIS, T., FARHAOUI, Y., *Gamification and Computational Thinking in Education: A Systematic Literature Review*. Salud, Ciencia y Tecnología – Serie de Conferencias. **3** (2024):659.
- [3] WITTGENSTEIN, L. *Philosophical Investigations*. Blackwell Publishing, 1953.
- [4] LAKATOS, I. *Proofs and Refutations*. Cambridge University Press, 1976.

4.20 El concepto de derivada desde una perspectiva histórico-epistemológica para el desarrollo de las competencias matemáticas en estudiantes de educación media

Helber Adrian Caballero Jaimes¹, Edith Johanna Mendoza Higuera²

Resumen

Esta investigación en Educación Matemática diseñó, implementó y evaluó una secuencia didáctica orientada al aprendizaje de la derivada como razón de cambio desde una perspectiva histórica-epistemológica para potenciar el pensamiento variacional en estudiantes de educación media. Este estudio cualitativo se realizó con 23 estudiantes del Semillero Matemático Euler de la Universidad Industrial de Santander. Se aplicó una prueba diagnóstica, dos talleres y una evaluación final. Los resultados evidencian la resignificación de los conceptos de función, razón de cambio, noción de límite, recta tangente y derivada. Además, el uso de GeoGebra facilitó la comprensión y visualización de los objetos matemáticos.

Palabras y frases claves: Derivada, histórico-epistemológico, Educación Matemática.

1. Introducción

Actualmente la enseñanza y aprendizaje de la derivada representan un reto escolar en la educación media. Diversas investigaciones en el campo de la Educación Matemática han reportado serias problemáticas en la enseñanza y aprendizaje del Cálculo (Artigue, 1995; Sánchez-Matamoros, et al., 2008; Dubarbie, 2024; Neira, 2012, entre otros). En general, los estudiantes al finalizar la educación media (décimo y undécimo grado) no logran conceptualizar la derivada como razón de cambio y valor de la pendiente de la recta tangente, como exigen los referentes curriculares nacionales (MEN, 1998, 2006, 2016), desencadenando serias dificultades en su formación académica y profesional. Hechos como los descritos motivaron esta investigación a desarrollar una aproximación al concepto de derivada desde el componente histórico y epistemológico para dar sentido a la expresión ser matemáticamente competente (MEN, 2006). Por tanto, se investiga: *¿cómo favorecer el aprendizaje de la derivada desde un acercamiento histórico-epistemológico que potencie el desarrollo de las competencias matemáticas en estudiantes de décimo y undécimo grado?*

2. Resultados

Se analizó el progreso de 17 estudiantes porque fueron quienes participaron en la mayoría de las actividades a diferencia de los restantes que por motivos personales no asistieron a algunas sesiones. Es importante tener en cuenta que la muestra no es representativa, así que los datos son muy sensibles y el porcentaje se aplica sobre los estudiantes analizados.

¹ Universidad Industrial de Santander: Facultad de ciencias, Escuela de Matemáticas, Bucaramanga, Colombia. Correo: helber2210139@correo.uis.edu.co

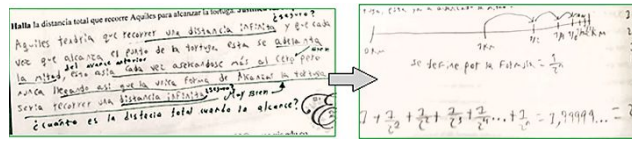
² Universidad Industrial de Santander, Bucaramanga, Colombia. Correo: edith.mendoza@correo.uis.edu.co

En la prueba diagnóstica, el 53 % de los estudiantes se ubicaron en los niveles de insuficiente y mínimo, es decir, que evidenciaron serias dificultades en los objetos básicos del cálculo (números reales, funciones, noción de límite). Por ello, el primer taller consistió en reforzar el concepto de función, de razón de cambio, de recta tangente y la noción de límite desde problemas históricos con Galileo, Euclides y Zenón. En cambio, el segundo taller se orientó hacia la noción de derivada como el límite del cociente incremental desde episodios históricos de Fermat, Newton y Leibniz. Finalmente, se realizó una evaluación final, donde se observa que el 53.9 % de los estudiantes se ubicaron en los niveles de satisfactorio y excelente, es decir que lograron determinar razones de cambio instantáneas en problemas cinemáticos.

Los resultados en la prueba diagnóstica y final, pueden atribuirse a la profunda complejidad de las nociones propias del cálculo y al amplio esquema de dificultades iniciales que presentaban los estudiantes frente a un tiempo dispuesto para las actividades, que no fue suficiente para el desarrollo de todas las actividades, revelando la necesidad de ajustes curriculares para su implementación.

De acuerdo con la sistematización y evaluación de los talleres, los resultados más relevantes son:

1. En cuanto al concepto de razón de cambio, el 88 % de los estudiantes determinaron la rapidez de cambio mediante el cociente entre la distancia recorrida y el tiempo transcurrido.
2. Con respecto a la función, el orden de las preguntas: (a) ¿Qué magnitudes varían al hacer rodar las pelotas? ... (d) ¿Cuántos centímetros avanza cada pelota en cada segundo? ... (f) Establece la razón entre la posición y el tiempo recorrido de cada pelota (g) Expresa la distancia de cada pelota en función del tiempo, entre otras. Condujo a que 7/17 estudiantes interpretaran el ítem (g) como “expresar la velocidad” al escribir $f(x)=x/t$ o “despejar el tiempo de la ecuación de la velocidad”, al expresar $t=x/30$, donde “x” es la distancia y “t” el tiempo.
3. Referente al concepto de recta tangente, los resultados son significativos, pues, en la prueba diagnóstica con esta misma situación problemática se encontró que 16 estudiantes (94,1 %) comprendían la noción de recta tangente como aquella que “toca en un punto específico y no la atraviesa”, donde ninguno contemplo ideas de cambio. En cambio, en la implementación del taller, cuando el estudiante Est12 camina sobre una cuerda puesta en el piso, simulando un “camino con curvas” y ubica en diferentes puntos una recta con la misma dirección de la curva, se logró que 12 estudiantes (71 %) en efecto reconocieran la recta tangente a una curva como aquella que pasa por un punto y comparte la misma dirección de la curva en ese punto.
4. En relación con el límite, la actividad de “Aquiles y la tortuga” fomentó la discusión de diversos procedimientos y estrategias que llegan a la misma solución. Las preguntas claves fueron: ... (c) Si la distancia entre Aquiles y la tortuga se reduce a la mitad en cada paso ¿A qué valor se aproxima los términos a medida que Aquiles se acerca a la tortuga? (d) Si sumamos todos los intervalos de distancia $(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots)$ ¿A qué valor se aproxima esta suma?. 5/14 estudiantes pasaron de considerar una distancia infinita a que se aproxima a 2km. Por ejemplo, el estudiante Est12 (ver figura).



140. Grupo Editorial Iberoamericano, 1995.
- [2] CANTORAL, R., *Desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional*. México: Secretaría de Educación Pública, 2013.
 - [3] CARLSON, M., JACOBS, S., COE, E., LARSEN, S., HSU, E., *Razonamiento covariacional aplicado a la modelación de eventos dinámicos: un marco conceptual y un estudio* (Trad. P. Perry y H. Alfonso). EMA. **8**(2) (2003):121–156. (Trabajo original publicado en 2002).
 - [4] DUBARBIE, L., *Las dificultades de aprendizaje en análisis matemático según el profesorado de Ecuador y Colombia: Su origen y estrategias didácticas para su enseñanza*. El cálculo y su enseñanza, **20**(1) (2024):79–102.
 - [5] FIALLO LEAL, J. E., Y PARADA RICO, S. E., *Estudio dinámico del cambio y la variación: curso de precálculo mediado por GeoGebra*. Ediciones UIS, 2018.
 - [6] GARCÍA, M. & DOLORES, D., *Diseño de una situación de aprendizaje para la comprensión de la derivada*. Unión. Revista Iberoamericana de Educación Matemática. **12**(46) (2016):49–70.
 - [7] GONZÁLEZ, J., MORALES, A. & SIGARRETA, J. M., *Concepciones sobre el infinito: Un estudio a nivel universitario*. Revista Digital: Matemática, Educación e Internet, **13**(2) (2013):1–12,
 - [8] GUACANEME, E., *Potencial formativo de la historia de la teoría de la proporción en la constitución del conocimiento del profesor de matemáticas*. Tesis doctoral, Universidad Pedagógica Nacional, 2016.
 - [9] MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACIONAL, *Lineamientos curriculares para el área de matemáticas*. MEN, 1998.
 - [10] MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACIONAL, *Estándares básicos de competencias en lenguaje, matemáticas, ciencias y ciudadanas. Guía sobre lo que los estudiantes deben saber y saber hacer con lo que aprenden*. MEN, 2006.
 - [11] MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACIONAL, *Derechos básicos de aprendizaje*. Colombia, 2016.
 - [12] MOLINA, M., CASTRO, E., MOLINA, J., CASTRO, E., *Un acercamiento a la investigación de diseño a través de los experimentos de enseñanza*. Enseñanza de las Ciencias: Revista de Investigación y Experiencias Didácticas. **29**(1) (2011):75–88.
 - [13] NEIRA, G., *Del álgebra al cálculo: ¿transición o ruptura? Notas para una reflexión epistemológica y didáctica*. En: *Pensamiento, epistemología y lenguaje matemático*, pp. 13–42, 2012.
 - [14] SÁNCHEZ-MATAMOROS, G., GARCÍA, M. & LLINARES, S., *La comprensión de la derivada como objeto de investigación en didáctica de las matemáticas*. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, **11**(2) (2008):267–296.
 - [15] VEGA-AGREDO, S., *El desarrollo histórico-epistemológico de la derivada en el paso de lo geométrico a lo analítico*. Tesis de maestría, Universidad del Valle, 2019.
 - [16] VRANCKEN, S. Y ENGLER, A., *Estudio de la derivada desde la variación y el cambio. Análisis histórico-epistemológico*. UNIÓN – REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA, **9**(33) (2013):53–70.

4.21 Enseñanza y aprendizaje de la Regresión Lineal Múltiple mediada por Inteligencia Artificial en un ámbito universitario

Andrés H. Borda Muñoz¹, Óscar I. Rodríguez Cardoso²

Resumen

Esta ponencia presenta la propuesta pedagógica implementada para la enseñanza de la Regresión Lineal Múltiple (RLM) en el espacio académico “Estadística Inferencial” impartido a estudiantes de tercer semestre de Economía en la Universidad Católica de Colombia (UCC), en el marco del convenio “Maestros a la U. Católica Con-Ciencia” entre dicha institución y la Universidad Pedagógica Nacional (UPN) que facilita espacios de práctica profesional para estudiantes de último semestre de la Licenciatura en Matemáticas de la UPN bajo la tutoría de profesores de la UCC.

La propuesta didáctica integró Google Colaboratory con su reciente integración con Gemini AI como herramientas mediadoras del proceso de enseñanza-aprendizaje. Esta integración permitió a los estudiantes ejecutar análisis estadísticos mediante código Python a un *dataset* de indicadores económicos que inciden en la inflación del país, generando una interpretación y el análisis crítico de los resultados obtenidos.

Palabras & frases claves: Inteligencia Artificial, Regresión Lineal Múltiple, Educación Matemática.

1. Introducción

La irrupción de la inteligencia artificial en el ámbito educativo es uno de los desafíos más significativos para la pedagogía contemporánea. En el ámbito de la educación matemática y estadística, estas herramientas ofrecen posibilidades sin precedentes para abordar problemas complejos, visualizar conceptos abstractos y analizar grandes volúmenes de datos con enorme eficiencia. [1]

La estadística inferencial, constituye un área esencial en la formación de profesionales de las ciencias económicas capaces de interpretar fenómenos y tomar decisiones basadas en evidencia. Sin embargo, su enseñanza tradicional enfrenta desafíos considerables: desde la complejidad conceptual hasta la dificultad para conectar los fundamentos teóricos con aplicaciones prácticas significativas [2].

2. Desarrollo

Bajo este panorama, la propuesta didáctica utilizó Google Colaboratory con su reciente incorporación de Gemini AI [3] como herramientas mediadoras del proceso de enseñanza-aprendizaje. Los estudiantes lograron ejecutar análisis estadísticos utilizando código Python (sin tener experiencia previa) a un *dataset* de indicadores económicos que inciden en la inflación del país, facilitando la visualización de los datos, la formulación del modelo de RLM, la validación de los supuestos asociados al modelo (linealidad, independencia de los errores, homocedasticidad, normalidad de los

¹Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá - Colombia. Correo: abordam@upn.edu.co

²Universidad Católica de Colombia, Bogotá - Colombia. Correo: oirodriguez@ucatolica.edu.co

errores, no multicolinealidad), la interpretación de dicho modelo y el análisis crítico de los resultados obtenidos. La elección del tema de la inflación constituye un fenómeno económico de profunda relevancia social y aún mas para estudiantes de Economía en formación, cuyo estudio permite establecer conexiones entre los métodos estadísticos y la comprensión de dinámicas económicas que afectan la vida cotidiana de la población colombiana [4].

3. Conclusiones

Esta experiencia demuestra que la integración de Gemini IA en la enseñanza de estadística inferencial ofrece oportunidades valiosas para enriquecer el proceso educativo. La mediación de la IA facilitó las conexiones entre la teoría estadística y su aplicación práctica en contextos económicos relevantes, facilitando que los estudiantes desarrollaran tanto competencias técnicas como habilidades de razonamiento estadístico [5].

Sin embargo, la incorporación de IA requiere un enfoque pedagógico reflexivo que considere sus limitaciones, promueva el pensamiento crítico y mantenga el rigor conceptual [6]. El rol del docente resulta fundamental como diseñador de experiencias de aprendizaje mediadas por IA y como facilitador del desarrollo de competencias para evaluar críticamente los resultados generados, ya que no todo los resultados generados por IA son correctos deben ser contrastados.

Referencias

- [1] T. BAKER, *Artificial intelligence in statistics education: A review of challenges and opportunities*, Journal of Statistics Education, **29**(1) (2021):89–104.
- [2] GAL, I., GARFIELD, J., *Teaching and Assessing Statistical Reasoning*. En: *The Teaching and Learning of Mathematics at University Level*, pp. 107–121, 2017.
- [3] GOOGLE, *Data Science Agent in Colab: The future of data analysis with Gemini*, Google for Developers, 2025.
- [4] M. URRUTIA, *Historia del Banco de la República y la inflación*. Editorial Planeta, 2012.
- [5] J. ENGEL, *Statistical literacy and society: What is civic statistics?*, Statistics Education Research Journal. **18**(1) (2019):70–82.
- [6] PFANNKUCH, M., WILD, C., *Towards an Understanding of Statistical Thinking*. En: BEN-ZVI, D., GARFIELD, J. (Eds.), *The Challenge of Developing Statistical Literacy, Reasoning and Thinking*, pp. 17–46. Kluwer Academic Publishers, 2004.

4.22 Estrategia pedagógica mediada por TIC, utilizando herramientas tecnológicas y recursos educativos digitales, para estimular el aprendizaje lógico-matemático de los estudiantes de básica secundaria del colegio Panamericano de Bucaramanga

Alba Rossi Rocha V.¹, Laura Marcela Cavarique A.², Nelson Daniel Vasquez L.³, Ana Isabel Vizcaino C.⁴

Resumen

Esta investigación propone una estrategia pedagógica mediada por TIC para fortalecer el aprendizaje lógico-matemático en estudiantes de séptimo y octavo grado del Colegio Panamericano de Bucaramanga. A partir de un diagnóstico inicial se identificaron dificultades en el razonamiento matemático y limitaciones en el uso de tecnologías en el aula. La intervención se diseñó con base en el modelo ADDIE (Análisis, Diseño, Desarrollo, Implementación y Evaluación) e integró herramientas digitales interactivas que favorecen una enseñanza más dinámica. La metodología combinó enfoques cualitativos como entrevistas, grupos focales, diarios de campo y observación, con el uso de recursos tecnológicos y análisis de contenido educativo. Los resultados evidencian que la incorporación estratégica de TIC en la enseñanza de las matemáticas no solo mejora el aprendizaje, sino que también contribuye a cerrar brechas educativas y tecnológicas, respondiendo a las exigencias del siglo XXI.

Palabras & frases claves: Lógico-matemático, Estrategia pedagógica, Modelo ADDIE.

1. Introducción

La presente investigación se fundamenta en el modelo ADDIE (Análisis, Diseño, Desarrollo, Implementación y Evaluación), el cual constituye una metodología sistemática para el diseño de estrategias pedagógicas innovadoras mediadas por herramientas tecnológicas y recursos educativos digitales. Desde un enfoque cualitativo y participativo se busca no solo diagnosticar las necesidades específicas de los estudiantes, sino también implementar y evaluar intervenciones que potencien su razonamiento lógico-matemático.

2. Ponencia corta

Durante la experiencia docente desarrollada en el año escolar 2024–2025 en el Colegio Panamericano de Bucaramanga, se observó que los estudiantes de séptimo grado presentan dificultades recurrentes en el desarrollo de competencias lógico-matemáticas. Estas dificultades afectan su razonamiento matemático, su comprensión lectora y su capacidad para resolver problemas. A pesar de

¹UDI, Colombia. Correo: arocha1@udi.edu.co

²UDI, Colombia. Correo: lcavarique1@udi.edu.co

³UDI, Colombia. Correo: nvasquez4@udi.edu.co

⁴UDI, Colombia. Correo: avizcaino1@udi.edu.co

la creciente presencia de las TIC en la educación, su integración en la enseñanza de las matemáticas continúa siendo limitada, desaprovechando su potencial pedagógico.

Frente a esta problemática surge la necesidad de replantear el enfoque pedagógico, incorporando herramientas tecnológicas y recursos educativos digitales que respondan a los desafíos actuales de la educación. En consecuencia, se formula la siguiente pregunta de investigación:

¿Cómo estimular el aprendizaje lógico-matemático mediante el uso de herramientas tecnológicas y recursos educativos digitales en el proceso de enseñanza-aprendizaje de los estudiantes de séptimo y octavo grado del Colegio Panamericano de Bucaramanga?

Referencias

- [1] MUÑOZ RIVAS, B. J., MENDOZA MOREIRA, F. S., *El pensamiento lógico-matemático y la didáctica creativa: caso del circuito educativo*. Rev. San Gregorio. **52** (2022):126–143.
- [2] LOPEZ-SANCHEZ, A. Y., Y GONZALEZ-LARA, A. L. Desarrollo de un juego serio para fortalecer el razonamiento lógico matemático con implementación de un sistema basado en lógica difusa. *Revista Internacional de Investigación e Innovación Tecnológica*, **10**(55) (2022):79–97.
- [3] VALBUENA BOHORQUEZ, A. R., Y ALVARADO ORTIZ, J. J. (2020). La interactividad de las herramientas tecnológicas en el desarrollo del pensamiento lógico en educación básica secundaria. *Revista de Ciencias de la Comunicación e Información*, **25**(3) (2020):1–17.
- [4] ALVERNIA QUINTERO, L., Y ANAYA BECERRA, Y. *Fortalecimiento del pensamiento lógico matemático a través de Moodle para sexto grado*. Tesis de Maestría, Universidad de Santander UDES, 2020.
- [5] DURANGO-WARNES, C., Y RAVELO-MENDEZ, R. E. Beneficios del programa Scratch para potenciar el aprendizaje significativo de las matemáticas en tercero de primaria. *Trilogía Ciencia Tecnología y Sociedad*, **12**(23) (2020):163–186.
- [6] ACEVEDO BELTRAN, C. A., Y ORTIZ RAMIREZ, E. J. *Gamificación como estrategia de aprendizaje para el mejoramiento de operaciones básicas y fundamentales en el área de matemáticas*. Tesis de Maestría, Universidad de Santander UDES, 2021.

4.23 Explorando la doble naturaleza de los números complejos: Un estudio basado en la Teoría APOE

Luzdari Rangel Ruiz¹, Juan Eduardo González Ramírez², Solange Roa Fuentes³

Resumen

Se presentan los avances de una investigación en curso cuyo objetivo es caracterizar la comprensión que logran estudiantes de ingeniería sobre los números complejos en su dualidad como escalares y vectores. El estudio tiene un enfoque cualitativo bajo un diseño de estudio de casos y de alcance descriptivo; se toma como población un grupo de 18 estudiantes de ingeniería matriculados en un curso de álgebra lineal que orienta la investigadora. Como instrumentos se emplean tareas matemáticas diseñadas en el marco de la teoría APOE (Acrónimo de Acción, Proceso, Objeto y Esquema) complementadas con entrevistas semiestructuradas y observación de clase. Los resultados esperados incluyen la identificación de las estructuras y mecanismos mentales que emergen en la comprensión de los números complejos, así como el tipo de mecanismos mentales necesarios para pasar de una estructura a otra. Lo que implica desde la perspectiva teórica el desarrollo de la comprensión de los conceptos involucrados en la investigación.

Palabras & frases claves: Teoría APOE; Números complejos; Escalar; Vector; Formación de Ingenieros.

1. Introducción

En la formación de ingenieros, la matemática cumple un rol esencial no solo como herramienta técnica, sino como eje estructurador del pensamiento analítico, crítico y creativo. El desarrollo de formas de pensar matemáticamente involucra el desarrollo de procesos, como la abstracción, la generalización, la modelación y el razonamiento lógico, que son clave para abordar y resolver problemas en diversos contextos de la ingeniería. En este marco, los números complejos representan un contenido importante por su aplicabilidad en el procesamiento de señales, análisis de circuitos y corrientes alternas, análisis de vibraciones, modelado de sistemas dinámicos, diseño de estructuras, entre otros.

Diferentes investigadores han centrado la atención en la comprensión de los números complejos como sistema numérico identificando dificultades persistentes relacionados con la desconexión entre las representaciones algebraicas y geométricas, así como en el tránsito entre sus distintas formas (binómica, polar, exponencial), lo cual limita la comprensión profunda y su aplicabilidad en contextos reales (Arce et al., 2024; Caro et al., 2024; Taliban et al., 2020; Randolph & Parraguez, 2019) [1, 3, 6, 5]. Sin embargo, no se han reportado investigaciones centradas en la dualidad que presentan los números complejos, por un lado, como escalares, es decir, elementos del campo matemático sobre el cual se define un espacio vectorial, y por otro, como vectores, ya que el conjunto de los números complejos tiene la estructura de espacio vectorial con un campo definido.

Esta doble naturaleza tiene especial relevancia en la formación de ingenieros, ya que, en distintos cursos, como álgebra lineal, análisis de señales o electromagnetismo, se le exige al estudiante

¹Universidad Autónoma de Bucaramanga. Correo: lrange1583@unab.edu.co

²Universidad Cuauhtemoc. Correo: tutead166@ucuahuemoc.edu.mx

³Universidad Industrial de Santander. Correo: doraroaf@uis.edu.co

manipular e interpretar los números complejos bajo ambas perspectivas, aunque frecuentemente no exista una articulación clara entre ellas. Esta falta de integración puede generar confusión conceptual, obstaculizar aprendizajes posteriores y limitar la articulación de conocimientos entre áreas. En este sentido, surge esta investigación, la cual busca caracterizar la comprensión de los números complejos como escalares y como vectores en estudiantes de ingeniería, a partir del análisis de su desempeño en tareas fundamentadas en los principios de la Teoría APOE, para fortalecer una formación matemática coherente y en contexto.

Frente a este panorama, la Teoría APOE ofrece un marco teórico potente para analizar cómo los estudiantes construyen estructuras y mecanismos mentales en torno a un concepto matemático. A su vez ofrece un paradigma claro para el diseño de estrategias de enseñanza que promuevan la comprensión del objeto matemático en estudio (Arnon et al., 2014; Estrada et al., 2025) [2, 4].

2. Avances de la investigación

A la fecha, la investigación ha consolidado importantes desarrollos teóricos y metodológicos; se ha construido un marco teórico robusto que articula la comprensión de los números complejos como escalares y como vectores, en el contexto de la formación matemática de ingenieros. El desarrollo teórico se fundamenta en la Teoría APOE, que se ha adoptado como marco orientador para comprender las estructuras y mecanismos mentales involucrados en la construcción del concepto de número complejo; en este sentido, se han definido con claridad las estructuras y mecanismos mentales asociadas a dicha construcción, y se ha propuesto una descomposición genética preliminar (DG) que integra la dualidad del número complejo, esta DG constituye un insumo clave para el diseño de las tareas que serán diseñadas e implementadas durante el trabajo de campo (Trigueros & Oktaç, 2019) [7].

A su vez, en el componente metodológico orientado desde los principios de la Teoría APOE, se adopta un enfoque cualitativo, bajo un diseño de estudio de casos con alcance descriptivo. La muestra es no probabilística, y se selecciona como caso de estudio un grupo de 18 estudiantes de ingeniería matriculados en el curso de Álgebra Lineal que orienta la investigadora.

Referencias

- [1] ARCE, A., KANOBEL, M. C., & BEHERENS, N., *Los Números Complejos en las Carreras de Ingeniería: Enfoque por Competencias y Nuevas Tecnologías en el diseño de Tareas Académicas*. UNIÓN - REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. **20** (72) (2024):72.
- [2] ARNON, I., COTTRILL, J., DUBINSKY, E., OKTAÇ, A., ROA FUENTES, S., TRIGUEROS, M., & WELLER, K., *APOS Theory: A Framework for Research and Curriculum Development in Mathematics Education*. Springer New York, 2014:
- [3] CARO, D. C. G., GARCÍA, C. V., GONZÁLEZ, M. DEL S. G., & SANZ, M. T., *Concepciones sobre los Números Complejos de Alumnos que Inician sus Estudios Universitarios: Una Caracterización desde la Teoría APOE*. Bolema: Boletim de Educação Matemática. **38** (2024): e210207.

- [4] ESTRADA, M. N. R., MAESTRE PACHECO, A. K., JUAN CARLOS VALDIVIESO SÁNCHEZ, MAESTRE FONSECA, Y. E., MENDOZA DE LA CRUZ, T. C., & ALVARADO GUZMAN, J. D., *Analysis of Teaching Practices in Mathematics and Language Teachers of Public Institutions in Valledupar*. Journal of Information Systems Engineering and Management. **10** (11s) (2025):587–593.
- [5] RANDOLPH, V. N., & PARRAGUEZ, M. C., *Comprensión del Sistema de los Números Complejos: Un Estudio de Caso a Nivel Escolar y Universitario*. Formación Universitaria. **12** (6) (2019):57–82.
- [6] TALIBAN, E., ENG CHIN, K., & FONG JIEW, F., *The Transition from Real Numbers to Complex Numbers*. ASM Science Journal. **13** (2020).
- [7] TRIGUEROS, M. & OKTAÇ, A., *Task design in APOS Theory*. AIEM - Avances de Investigación En Educación Matemática. **15** (2019):43–55.

4.24 Geometrías no euclidianas a través de GeoGebra

Héber Mesa Palomino¹

Resumen

Mediante el software de geometría dinámica GeoGebra se presentan modelos acotados del plano hiperbólico y del espacio de de Sitter bidimensional.

Palabras & frases claves: Espacio hiperbólico, espacio de de Sitter, geodésicas.

1. Introducción

La geometría euclidiana, tal como la conocemos hoy en día, se fundamenta en el tratado matemático escrito por Euclides alrededor del año 300 a.C. en Alejandría, obra conocida como *Los Elementos* [3]. En el primer libro, Euclides establece: los elementos base de la geometría (punto, línea, superficie, entre otros), cinco nociones comunes del razonamiento y cinco postulados geométricos en los cuales reposa todo el sistema axiomático. Los primeros cuatro postulados son de carácter operativo: permiten realizar construcciones geométricas y establecen propiedades intrínsecas de los objetos geométricos. Todas estas aserciones gozan de una “evidencia inmediata”, en contraste con el quinto postulado que aparentaba ser de naturaleza demostrativa. Este postulado enuncia:

si una línea recta al caer sobre dos rectas hace los ángulos interiores de un mismo lado menores que dos ángulos rectos, entonces las dos rectas, si son prolongadas indefinidamente, se encontrarán por el lado en el que están los ángulos menores que dos rectos.

Durante siglos se intentó demostrar el quinto postulado a partir de los otros cuatro con el objetivo de excluir esta afirmación del listado de proposiciones admitidas sin demostración. Los resultados de algunos de estos trabajos condujeron al desarrollo de sistemas axiomáticos donde el quinto postulado resultaba falso. De esta manera surgieron las geometrías no euclidianas, entre las cuales se destacan el espacio hiperbólico y el espacio de de Sitter. Estos espacios se enmarcan dentro de una teoría moderna que construye sus conceptos a través del análisis, el álgebra lineal y la topología, conocida como *geometría de variedades*.

El objetivo principal de esta comunicación es exhibir representaciones isométricas del plano hiperbólico y del espacio de de Sitter bidimensional, a través de modelos visualmente acotados y susceptibles de ser trabajados en un entorno de geometría dinámica como GeoGebra.

2. Modelación usando GeoGebra

A partir del concepto de variedad diferencial es posible extrapolar los elementos definidos por Euclides (recta, círculo, ángulo, distancia, etc.), permitiendo la existencia de espacios donde la geometría

¹Universidad del Valle. Correo: heber.mesao@correounivalle.edu.co

se permite variar de punto a punto, resultando en ocasiones contraintuitiva. Ejemplos de estas geometrías son el espacio hiperbólico o el espacio de de Sitter, este último empleado como modelo de espacio-tiempo en la teoría de la relatividad general.

En el estudio del plano hiperbólico, concebido como variedad diferencial, se construyen diversos modelos que permiten caracterizar algunos objetos geométricos como geodésicas u horoesferas en términos de elementos euclidianos (rectas y circunferencias). Estas representaciones y caracterizaciones pueden ser usadas en una construcción dinámica del plano hiperbólico a través de GeoGebra; logrando simular algunas herramientas de construcción de este software, como por ejemplo, la construcción de segmentos, rectas (geodésicas) y círculos (geodésicos). Inspirados en estos modelos del espacio hiperbólico, se presentará un modelo análogo para el espacio de de Sitter, donde las geodésicas se caracterizan como arcos de circunferencia [1, 2]. Esto posibilita también una representación dinámica del espacio de de Sitter bidimensional en GeoGebra.

3. Enseñanza de geometrías no euclidianas

El trabajo de Euclides ha constituido, durante más de veinte siglos, un referente histórico de fundamentación y rigor teórico, tanto en matemáticas como en otras ciencias. Sin embargo, muchas de las proposiciones derivadas de esta geometría y que han sido esenciales para su enseñanza y aprendizaje, dependen lógicamente del quinto postulado. La exploración de geometrías no euclidianas mediante GeoGebra ofrece nuevas oportunidades para la enseñanza y aprendizaje de estas geometrías en contextos académicos de todo nivel educativo. La experiencia de manipulación dinámica de estas geometrías permite a los estudiantes contrastar, validar y formular conjeturas sobre sus conocimientos de geometría euclidiana [4].

4. Conclusiones

La representación de geometrías no euclidianas en un entorno de geometría dinámica como GeoGebra constituye una herramienta didáctica y visualmente poderosa. Los modelos acotados del plano hiperbólico y del espacio de de Sitter bidimensional permiten explorar propiedades geométricas complejas mediante construcciones accesibles, facilitando su comprensión. Desde el punto de vista pedagógico, estas visualizaciones abren la posibilidad de integrar en el aula conceptos avanzados de la geometría moderna, usualmente reservados a contextos universitarios, favoreciendo procesos de razonamiento, validación y conjeturación. En este sentido, GeoGebra no solo enriquece la enseñanza de la geometría euclidiana, sino que también amplía el horizonte hacia nuevas geometrías, fortaleciendo la formación matemática en distintos niveles educativos.

Referencias

- [1] BENAVIDES, J., *Hipersuperficies espaciales del espacio de de Sitter*. Tesis de maestría, Universidad del Valle, 2024.
- [2] BENAVIDES, J. Y MESA, H., *Las geodésicas del espacio de de Sitter*. Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones, **25** (2022):141–145.

- [3] EUCLIDES, *Elementos*. Editorial Gredos, 1991.
- [4] PALACIOS, A., *Caracterización de los niveles de razonamiento de Van Hiele en el aprendizaje de algunos conceptos básicos de la geometría hiperbólica con la mediación de geogebra*. Tesis de pregrado, Universidad del Valle, 2024.

4.25 La geometría deconstruida: Un recurso para el desarrollo del pensamiento espacial en primaria

Angy Juliana Pineda Torres¹

Resumen

El proceso de aprendizaje de la geometría en el aula constituye un eje fundamental para el desarrollo de competencias, habilidades y destrezas acordes con el nivel cognitivo y educativo de los estudiantes. A partir de esta premisa surge la presente investigación, cuyo objetivo principal es determinar la eficacia del diseño y la implementación de un recurso multisensorial enfocado en el fortalecimiento del pensamiento geométrico mediante la construcción y descomposición de cuerpos y figuras geométricas.

La metodología se fundamenta en un enfoque cualitativo bajo el diseño de Investigación-Acción. Como principales resultados se obtuvo una revisión de literatura que sirvió de base para el diseño del kit de recursos *La geometría deconstruida*, así como la construcción de una secuencia didáctica dirigida a estudiantes de cuarto grado. Dicha secuencia incluye cinco actividades estructuradas bajo el modelo de Van Hiele, promoviendo el desarrollo de habilidades relacionadas con la construcción y descomposición de cuerpos y figuras geométricas.

Palabras & frases claves: Modelo de Van Hiele, enseñanza de la geometría, recurso multisensorial.

1. Introducción

El desarrollo del pensamiento espacial en las aulas de educación primaria es fundamental para la adquisición de habilidades relacionadas con la visualización, la orientación espacial y el reconocimiento de cuerpos y figuras geométricas en la vida cotidiana. En este sentido, la enseñanza de la geometría debe implementarse de forma integral y significativa para que los estudiantes logren establecer relaciones entre figuras planas y cuerpos geométricos.

Diversos estudios evidencian dificultades en los estudiantes frente a la construcción y descomposición de cuerpos y figuras geométricas, lo que genera vacíos conceptuales y procedimentales. Ante esta problemática, resulta necesario implementar estrategias innovadoras que favorezcan el desarrollo del pensamiento geométrico desde los primeros niveles de formación.

En este contexto, la investigación tiene como objetivo determinar la efectividad de un recurso multisensorial orientado al fortalecimiento de las habilidades de construcción y descomposición de cuerpos y figuras geométricas en estudiantes de cuarto grado, así como proponer una secuencia didáctica atractiva y significativa.

2. Planteamiento del problema

La educación primaria en Colombia enfrenta diversos desafíos en la enseñanza de la geometría, especialmente en lo relacionado con el desarrollo de habilidades espaciales. Aunque los Estándares

¹Universidad Industrial de Santander. Correo: angy2221062@correo.uis.edu.co

Básicos de Competencias plantean el fortalecimiento del pensamiento espacial desde los primeros grados, en la práctica se evidencian dificultades en estudiantes de cuarto y quinto grado para identificar, clasificar y relacionar cuerpos geométricos con objetos de su entorno.

Estas limitaciones dificultan el avance hacia niveles de razonamiento más complejos, ya que los estudiantes presentan dificultades para aplicar conocimientos previos en contextos que implican interpretación, construcción o modificación de formas tridimensionales. Además, se observa una escasez de recursos multisensoriales adaptados, particularmente para estudiantes con discapacidad visual, lo que incide negativamente en la motivación y el aprendizaje.

Por ello, se hace necesario implementar estrategias metodológicas efectivas que promuevan el desarrollo de habilidades espaciales relacionadas con la construcción y descomposición de cuerpos y figuras geométricas, favoreciendo un aprendizaje significativo y una base sólida para niveles educativos posteriores.

3. Referentes teóricos

Esta investigación se sustenta en dos conceptos fundamentales. En primer lugar, el Modelo de Van Hiele, el cual, según Vargas y Gamboa (2013), se centra en cómo los estudiantes aprenden geometría a través de cinco niveles de razonamiento que se desarrollan progresivamente durante la escolaridad. Cada nivel se aborda mediante cinco fases de enseñanza: información, orientación dirigida, explicitación, orientación libre e integración.

En segundo lugar, se considera el uso de material concreto como un elemento clave en el aprendizaje. De acuerdo con Marín et al. (2017), este tipo de material permite modificar concepciones previas y favorece la comprensión de conceptos geométricos, además de facilitar adaptaciones para la inclusión de estudiantes con discapacidad visual en el aula regular.

4. Resultados

Desde el enfoque de investigación-acción, los resultados obtenidos corresponden a las fases del estudio. En la primera fase se realizó una revisión de literatura que permitió identificar propuestas relevantes sobre la construcción y descomposición de cuerpos y figuras geométricas en primaria, destacando el trabajo de Clavijo (2018).

En la segunda fase se diseñó el kit de recursos *La geometría deconstruida*, compuesto por un tablero sensorial con texturas adaptadas y un pentominó con bordes de silicona para la descomposición de figuras. Además, se incluyeron fichas tipo arma-todo y pirámides elaboradas en porcelanocrón para la construcción de cuerpos geométricos.

Finalmente, se diseñó una secuencia didáctica basada en el modelo de Van Hiele, conformada por cinco actividades que integran los recursos del kit y promueven el desarrollo de habilidades de construcción y descomposición geométrica.

5. Conclusiones

Los resultados evidencian que el uso de recursos concretos y adaptables favorece el desarrollo del

pensamiento geométrico y mejora la comprensión de los estudiantes respecto a la construcción y descomposición de cuerpos y figuras geométricas. El kit *La geometría deconstruida* promueve la interacción, la motivación y el trabajo colaborativo en el aula.

Asimismo, la implementación de una secuencia didáctica innovadora y contextualizada contribuye a un aprendizaje significativo y fomenta la inclusión de estudiantes con discapacidad visual en contextos educativos regulares, resaltando la importancia de diseñar estrategias que atiendan la diversidad y favorezcan el desarrollo integral de todos los estudiantes.

Referencias

- [1] CLAVIJO PALACIOS, J. *Aprendizaje de las formas geométricas en estudiantes de grado cuarto: una propuesta desde el entorno sociocultural*. Tesis de pregrado, Universidad del Valle, 2018.
- [2] MARÍN, S., OJEDA, P., PLAZA, C. Y RUBILAR, M. *Promover la importancia del uso de material concreto en primer ciclo básico*. Trabajo de grado, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, 2017.
- [3] MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACIONAL. *Estándares Básicos de Competencias en Lenguaje, Matemáticas, Ciencias y Ciudadanas*. MEN, Bogotá, 2006.
- [4] VARGAS, G. Y GAMBOA, R. *El modelo de Van Hiele y la enseñanza de la geometría*. Uniciencia, 27(1) (2013):74–94.

4.26 O conhecimento matemático especializado do professor de matemática evidenciado na resolução de problemas de proporcionalidade

Roberta dos Santos Rodrigues¹, Francisco Eteval da Silva Feitosa²

Resumen

Este estudo investigou o conhecimento especializado mobilizado por licenciandos em Matemática na resolução de problemas de proporcionalidade. A atividade, fundamentada na Teoria das Situações Didáticas (TSD) e analisada pelo modelo MTSK, revelou a ativação de saberes nos subdomínios KoT – Procedimentos e KoT – Registro de Representações, ainda que em diferentes níveis de compreensão. Conclui-se que formações baseadas na TSD favorecem a mobilização desse conhecimento, contribuindo para uma prática docente mais crítica, contextualizada e conceitualmente sólida para o ensino de proporcionalidade.

Palabras & frases claves: Formação de Professores. Pensamento Proporcional. MTSK.

1. Introdução

A proporcionalidade constitui um conceito unificador da Matemática, presente em conteúdos como razões, porcentagens, escalas, funções lineares e trigonometria, além de aparecer em diferentes áreas do conhecimento e em situações do cotidiano, o que a torna fundamental para compreender fenômenos do mundo real. No entanto, pesquisas indicam que certos tipos de problemas envolvendo o pensamento proporcional permanecem pouco explorados em livros didáticos e em práticas de ensino, apesar de fazerem parte das estratégias cotidianas dos estudantes (Lesh, Post & Behr, 1988).

As dificuldades nesse processo estão ligadas também à formação docente, marcada por lacunas que favorecem abordagens mecanizadas e limitam a compreensão conceitual (Burgos et al., 2018). Considerando que o conhecimento do professor é decisivo para a aprendizagem (Hill; Chin, 2018), o modelo Mathematics Teacher's Specialized Knowledge – MTSK (Carrillo et al., 2018) tem se destacado por articular dimensões matemáticas e didáticas permeadas por concepções e crenças. Nesse contexto, este estudo busca investigar que conhecimentos especializados são mobilizados por futuros professores de Matemática ao resolverem problemas de proporcionalidade em uma atividade formativa fundamentada na Teoria das Situações Didáticas – TSD (Brousseau, 1986).

2. Mathematics Teacher's Specialized Knowledge - MTSK

O modelo MTSK (Carrillo et al., 2018) busca compreender o conhecimento do professor de Matemática a partir da articulação entre diferentes saberes. O modelo distingue dois domínios principais:

¹Discente do Programa de Pós Graduação em Ensino de Ciências e Matemática (PPGECIM-UFAM) e bolsista do Programa de Apoio à Pós-Graduação Stricto Sensu (POSGRAD-FAPEAM/2024-2025). Correo: roberta.rodrigues@ufam.edu.br

²Universidade Federal do Amazonas, Docente do Programa de Pós Graduação em Ensino de Ciências e Matemática (PPGECIM-UFAM) e bolsista do Programa de Bolsas de Pós-Doutorado (PROPOSDOC-UEA/2025-2026). Correo: sfeitosa@ufam.edu.br

o Mathematical Knowledge (MK), que envolve a compreensão da matemática enquanto disciplina científica e inclui os subdomínios Knowledge of Topics (KoT), Knowledge of the Structure of Mathematics (KSM) e Knowledge of Practices in Mathematics (KPM); e o Pedagogical Content Knowledge (PCK), voltado ao ensino e à aprendizagem de matemática, composto pelos subdomínios Knowledge of Mathematics Teaching (KMT), Knowledge of Features of Learning Mathematics (KFLM) e Knowledge of Mathematics Learning Standards (KMLS). Transversalmente, o domínio das Crenças abrange as concepções docentes sobre a matemática e seu processo de ensino e aprendizagem.

Neste estudo, o foco recai sobre o subdomínio KoT, que diz respeito à compreensão aprofundada do conteúdo matemático, indo além do esperado dos estudantes. Entre suas categorias, discutiremos a de Registros de Representações, que se refere à diversidade de formas de expressar conceitos matemáticos (gráficas, algébricas, tabulares, pictóricas ou em linguagem natural), e a de Procedimentos, que envolve o conhecimento e a fundamentação de algoritmos e estratégias de resolução, incluindo o uso adequado do raciocínio multiplicativo ou aditivo e a compreensão conceitual da “regra de três” em problemas de proporcionalidade.

Embora as pesquisas com o MTSK priorizem o MK, também é importante considerar o PCK, especialmente o KMT, que envolve decisões sobre organização das aprendizagens, mediação e escolha de estratégias. Neste estudo, tais aspectos foram contemplados em uma sequência didática baseada na TSD, mas as análises específicas ficaram para trabalhos futuros.

3. Metodologia

Este é um estudo de caso instrumental com abordagem qualitativa (Stake, 2005), cujos dados foram coletados por observação participante, gravações, notas de campo e produções escritas e analisados mediante Análise de Conteúdo (Bardin, 2011) à luz das categorias próprias do MTSK, buscando identificar estratégias e representações utilizadas pelos participantes. A sequência didática de três horas, da qual participaram 3 discentes de Licenciatura em Matemática, de uma universidade pública do Amazonas, foi organizada segundo as etapas da TSD (Brousseau, 1986): ação, formulação, validação e institucionalização, utilizando dois problemas de proporcionalidade – um de transformação e outro de média (Lesh, Post & Behr, 1988). A seguir apresentamos os dois problemas, os quais os participantes primeiro resolveram individualmente, depois discutiram em grupos e, por fim, apresentaram soluções, refletindo sobre estratégias e justificativas matemáticas.

Problema	Categoria
[1] Dona Ana precisa voltar para casa com as compras do mês que acabou de fazer no supermercado. Ela está em dúvida se chama um táxi ou um motorista de aplicativo para fazer a corrida. O taxista cobra R\$ 20,00 a cada 4 quilômetros rodados, enquanto pelo aplicativo, o valor cobrado é R\$ 18,00 para cada 5 quilômetros rodados. Considerando que a distância da casa de dona Ana ao supermercado seja a mesma para ambos os serviços, de quanto cada motorista precisaria alterar o valor de sua corrida para que o custo final para dona Ana fosse o mesmo, independentemente da escolha?	Problema de transformação
[2] Considere o trapézio $ABDC$ de base maior com medida 6cm e base menor com medida 4cm. Qual é a medida do segmento EF se os trapézios $ABFE$ e $EFDC$ são semelhantes? (Adaptado de Bianchini e Lima, 2023)	Problema de média



Figura 1: Problemas utilizados na pesquisa

As atividades visaram evidenciar, em especial, o KoT – Procedimentos e KoT – Registros de Representação. Durante a institucionalização, os pesquisadores consolidaram conceitos de proporcio-

nalidade em diferentes contextos, destacando estratégias distintas de resolução (Scheller & Bonotto, 2020) e promovendo a reflexão sobre relações entre os problemas e o pensamento proporcional mais amplo, assim como apresentaram formalmente as etapas da TSD como recurso para o ensino desse conteúdo (KMT). Os resultados apresentados referem-se à análise centralizada nas estratégias de resolução e representações mobilizadas pelos futuros professores.

4. Resultados e considerações finais

A análise revelou a mobilização de diferentes categorias do conhecimento matemático especializado, com destaque para KoT – Procedimentos, especialmente a estratégia de busca pelo valor unitário, e KoT – Registros de Representação, evidenciada na transição entre tabelas, expressões algébricas e análises contextuais dos resultados. No Problema 1, voltado à transformação de valores monetários, os participantes se utilizaram de diferentes procedimentos ao ajustarem quantidades para chegar a uma equivalência; no Problema 2, relacionado à semelhança de figuras, aplicaram corretamente a regra de três e reconheceram relações proporcionais entre segmentos, sendo que um estudante chamou a atenção para o fator de proporcionalidade direta entre os segmentos EF e CD e AB e EF, evidenciando compreensão da definição de grandezas diretamente proporcionais.

Dessa forma, a sequência didática baseada na TSD favoreceu a mobilização de estratégias e representações matemáticas diferenciadas, permitindo aos futuros professores refletir sobre conceitos e contextos que envolvem o pensamento proporcional. Conclui-se que propostas formativas articuladas ao MTSK e fundamentadas na TSD são promissoras para aprofundar o conhecimento docente e estimular reflexões críticas sobre o ensino da proporcionalidade. Pesquisas futuras podem ampliar experiências desse tipo na formação inicial, priorizando a análise de tarefas, as discussões coletivas e a integração entre teoria e prática.

Referencias

- [1] BARDIN, L., *Análise de conteúdo*. São Paulo: Edições 70, 2011.
- [2] BIANCHINI, B.L. & LIMA, G.L., *O pensamento matemático e os diferentes modos de pensar que o constituem*. São Paulo: Livraria da Física, 2023.
- [3] BROUSSEAU, G., *Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques*. Recherches en didactique des mathématiques (Revue). **7** (1986):33–115.
- [4] BURGOS, M., BELTRÁN-PELLICER, P., GIACOME, B. & GODINO, J., *Conocimientos y competencia de futuros profesores de matemáticas en tareas de proporcionalidad*. Educação e Pesquisa. **44** (2018):e182013.
- [5] CARRILLO, J., CLIMENT, N., MONTES, M., CONTRERAS, L., FLORES-MEDRANO, E., ESCUDERO-ÁVILA, D., ... & MUÑOZ-CATALÁN, M. C. , *The mathematics teacher's specialised knowledge (MTSK) model*. Research in Mathematics Education. **20** (2018):236–253.
- [6] HILL, R. & CHIN, M., *Connections between teachers' knowledge of students, instruction, and achievement outcomes*. American Educational Research Journal. **55** (2018):1076–1112.

- [7] LESH, R., POST, T. R., BEHR, M., *Proportional Reasoning*. En: *Number Concepts and Operations in the Middle Grades*, pp. 93–118. Lawrence Erlbaum Associates y National Council of Teachers of Mathematics, 1988.
- [8] SCHELLER, M. & BONOTTO, D., *Estratégias de resolução de situação problema de modelagem matemática e o pensamento proporcional: um estudo com estudantes de pedagogia*. Amazônia: Revista de Educação em Ciências e Matemáticas. **16** (2020):197–223.
- [9] STAKE, R.E., *Qualitative case studies*. New York: Oxford University Press, 2005.

4.27 Prácticas Variacionales en el Estudio de la Derivada como Razón de Cambio. Diseño de una Situación de Aprendizaje

Brayan Andrey Guerrero Suárez¹, Ludwin Jaimes Espinoza², Edith Johanna Mendoza Higuera³, Haided Lised Arciniegas Rueda⁴

Resumen

En este avance de investigación se presenta el diseño de una situación de aprendizaje (SA) para incentivar el estudio de la derivada como razón de cambio a partir del desarrollo de las prácticas variacionales. Los elementos teóricos se sustentan desde la Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa, las Prácticas Variacionales y la derivada como razón de cambio promedio e instantánea. El estudio se plantea desde un experimento de enseñanza para el diseño y análisis retrospectivo de la conjetura; y la SA se propone desde la etapa factual, procedimental y simbólica. Los resultados revelan que la SA incentiva la construcción de significados de la derivada al comparar, seriar, predecir y estimar.

Palabras & frases claves: Derivada, Razón de cambio, Prácticas Variacionales, Socioepistemología.

1. Introducción

Al precisar la importancia de la formación de estudiantes de educación media matemáticamente preparados para el ingreso a la educación superior, el Ministerio de Educación Nacional (MEN, 2003) distingue 3 competencias relacionadas con el concepto de derivada, en donde se destaca principalmente la derivada como razón de cambio. Sin embargo, se ha evidenciado que los estudiantes en los primeros semestres de la educación superior revelan dificultades en competencias relacionados a la comprensión de conceptos como la función, límites o la derivada, causando falencias en el curso de Cálculo Diferencial (Fiallo y Parada, 2018).

Por otro lado, la Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa (TSME) establece que la construcción del conocimiento matemático surge del estudio de prácticas sociales, donde el saber se construye desde situaciones de la cotidianidad que se pueden relacionar desde la matemática a partir de la modelación de situaciones de variación y el cambio que permita de manera significativa el desarrollo del pensamiento variacional (Cantoral, et al., 2014). Así mismo, Caballero (2018) propone las prácticas variacionales, como formas de razonar y operar el cambio y la variación en una situación, en la medida que se caracterizan las variables que cambian, cómo cambian, cuánto cambian y por qué cambian de esa manera. Por tanto, el uso de las prácticas variacionales favorecería la interpretación de la derivada como razón de cambio, debido a que se caracteriza el cambio en las diferencias de las variables para predecir el comportamiento de las variables presentes en la situación planteada.

¹Universidad Industrial de Santander. Correo: brayan2211981@correo.uis.edu.co

²Universidad Industrial de Santander. Correo: ludwin2211980@correo.uis.edu.co

³Universidad Industrial de Santander. Correo: edith.mendoza@correo.uis.edu.co

⁴Universidad Industrial de Santander. Correo: harcirue@correo.uis.edu.co

2. Aspectos teóricos

Desde los principios de la TSME se hace énfasis en que los educandos exploren los conceptos matemáticos en actividades dentro y fuera del aula a través de “prácticas”, que son definidas como “actividades humanas consientes e intencionales”, las cuales permiten construir el conocimiento matemático a través de experiencias cercanas a los estudiantes. (Caballero, 2018).

Por su parte, las prácticas variacionales se centran en abordar y operar el cambio y la variación con el propósito de saber lo que puede llegar a pasar o lo que pasará en una situación, además de consolidar tres grandes elementos que caracterizan la variación y que son mencionados como: “la medición del cambio, el análisis de la forma como esta medida evoluciona y el reconocimiento de por qué las variables cambian de la forma que lo hacen” Las prácticas descritas son la comparación, seriación, predicción y estimación (Caballero y Cantoral, 2018).

La comparación: Es una acción consciente que pretende establecer diferencias y semejanzas ya sea entre dos estados diferentes de un fenómeno o dos estados de diferente fenómeno con el fin de cuantificar el cambio.

La seriación: Consiste en realizar un análisis a más de dos estados consecutivos con el fin de establecer relaciones o patrones que permitan, definir o establecer el comportamiento que determinan el cambio del fenómeno.

La predicción: Esta acción busca encontrar un valor de forma anticipada, dicho valor normalmente esta cuantificado.

La estimación: Consiste en anticipar tendencias, caracteres o comportamiento del fenómeno de estudio normalmente en un intervalo.

Además, al centrar la atención en la derivada, la razón de cambio consiste en el cociente que existe entre las diferencias de dos puntos diferentes de la abscisa y la ordenada (promedio) y en efecto, cuando la diferencia entre las abscisas es infinitamente pequeña se trata de razón de cambio instantánea. En ambos casos el cambio se cuantifica a partir de las diferencias como modelo matemático para medir la variación y el cambio, el cual permite predecir el comportamiento variacional de las funciones modeladas.

Luego, la razón de cambio puede verse reflejada en contextos donde las prácticas variacionales intervienen a través de comparaciones entre dos datos o estados obtenidos del fenómeno de estudio (Comparación), estas permiten establecer las diferencias entre 2 estados futuros y buscar el cambio entre ellos, reflejando la razón de cambio promedio en el proceso. Buscando reconocer e interpretar el cambio, se propone la extracción y comparación entre más datos que permitan establecer patrones, relaciones o comportamientos del fenómeno (Seriación), estos comportamientos se establecen gracias al cambio reflejado en la razón de cambio promedio. A partir de las prácticas anteriores se pueden realizar predicciones de estados futuros o pasados a los obtenidos (Predicción), esto gracias a que el cambio se ve reflejado en un único punto, mostrando el paso de la razón de cambio promedio a la razón de cambio instantánea, puesto que se busca el cambio en un único estado a futuro. Basados en el comportamiento que se logró establecer en la seriación, se determinan comportamientos futuros del fenómeno (Estimación) gracias a la razón de cambio instantánea, que generaliza para cada punto el comportamiento en cualquier estado futuro.

3. Metodología

En la investigación se empleó una estrategia investigativa de diseño centrada en el desarrollo de la derivada como razón de cambio. La SA está orientada por tres etapas secuenciales: factual, procedimental y simbólica (Ministerio de Educación, Cultura, Ciencia y Tecnología, 2019). Las fases metodológicas para el diseño de la SA fueron: (1) Discusión teórica para el abordaje de la derivada como razón de cambio promedio e instantánea desde el desarrollo de las prácticas variacionales, (2) Relación de las etapas de la SA y (3) Diseño de las tareas en la SA.

4. Resultados

Cabe mencionar que para las fechas de envío de esta propuesta el diseño de la SA no se ha culminado, por ende, se mencionaran aspectos generales que caracterizaran los resultados.

Teniendo en cuenta las premisas del Pensamiento y Lenguaje Variacional, la SA articula códigos variacionales y una estructura variacional específica que incentivan la construcción y validación de argumentos en el desarrollo de las prácticas variacionales, cuando se enfrentan tareas relacionadas con la tabulación como variación numérica, el análisis de datos en tablas numéricas y, la construcción y análisis gráfico considerando la variación como punto de referencia. Luego, al reconocer las potencialidades de GeoGebra para el estudio de situaciones variacionales desde diversas representaciones del objeto matemático, se propone vincular el aula virtual como espacio para el desarrollo de las tareas e interacción dinámica. Cabe recalcar, que las actividades que se diseñaron en GeoGebra estarán divididas en tres momentos:

Momento 1 (Etapla factual): los estudiantes comienzan a identificar las magnitudes que intervienen y obtienen los datos correspondientes de la SA para construir de manera significativa la razón de cambio constante (Promedio e instantánea) a través de las practicas variacionales, llegando a relacionar la razón de cambio con la pendiente de una recta.

Momento 2 (Etapla procedimental): En este momento los estudiantes con la ayuda del software de GeoGebra pueden calcular la razón de cambio promedio e instantánea, tomando incrementos infinitamente pequeños, con el propósito de identificar que la razón de cambio es variable, por lo cual se tiene la expectativa de que determinen el comportamiento de la razón de cambio promedio e instantánea a través de las prácticas variacionales.

Momento 3 (Etapla simbólica): En esta etapa se realizan análisis e interpretaciones formales con base en resultados obtenidos en los momentos anteriores, además de generalizar procedimientos o propiedades trabajados. Una vez se llega a este momento, el estudiante comprende procedimientos y establece conclusiones teóricamente justificadas sobre el uso de la derivada para identificar el cambio de una magnitud.

En general, en cada uno de los momentos se incentiva la derivada como razón de cambio a partir de las prácticas variacionales. De modo que, la razón de cambio promedio se puede obtener de la comparación y la seriación teniendo en cuenta los datos correspondientes a la situación y progresivamente llegar a la razón de cambio instantánea a partir de la predicción y estimación.

5. Conclusiones

Se espera que la SA incentive el desarrollo de las prácticas variacionales para la significación de la derivada, partiendo de la razón de cambio promedio y llegando a la razón de cambio instantánea.

Referencias

- [1] ARCINIEGAS, H., *Aula inclusiva de matemáticas: Un estudio de situaciones de variación y cambio*. Tesis de maestría, Universidad Industrial de Santander, 2022.
- [2] CABALLERO, M., *Causalidad y temporización entre jóvenes de bachillerato. La construcción de la noción de variación y el desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional*. Tesis de doctorado, Centro de Investigación y de Estudio Avanzados del IPN, 2018.
- [3] CANTORAL, R., REYES-GASPERINI, D., Y MONTIEL, G., *Socioepistemología, Matemáticas y Realidad*. Revista Latinoamericana de Etnomatemática **7** (2014):91–116.
- [4] CARDONA, R., *Una propuesta para la enseñanza de la derivada como razón de cambio a estudiantes de grado undécimo*. Tesis de maestría, Universidad Nacional de Colombia, 2012.
- [5] MEN, *Estándares básicos de competencias en lenguaje, matemáticas, ciencias y ciudadanas*. Ministerio de Educación Nacional, 2006.
- [6] MINISTERIO DE EDUCACIÓN, CULTURA, CIENCIA Y TECNOLOGÍA, *Predecir. ¿Qué cambia? y ¿cómo cambia? Para saber qué pasa y que pasará*. Equipo del Programa Interdisciplinario para el Desarrollo Profesional Docente en Matemáticas (PIDPDM), 2019.

4.28 Procesos de razonamiento y demostración al desarrollar tareas propiciadas por el Software de Geometría Dinámica.

Jennifer Guarín¹, Jorge Fiallo²

Resumen

En este documento se presentan los elementos fundamentales de un trabajo de investigación en educación matemática, cuyo objetivo es analizar las formas de razonamiento y los tipos de demostración que los estudiantes de un curso de Geometría Euclidiana exhiben al estudiar las propiedades y elementos del círculo mediante tareas de simulación, construcción, lugares geométricos y cajas negras. Para ello, se emplean como base teórica la tipología de demostraciones de Marrades y Gutiérrez (2000), adaptada por Fiallo (2011), y las formas de razonamiento descritas por Arzarello et al. (2012) y Pedemonte (2005). Asimismo, se utiliza como método de investigación el experimento de enseñanza descrito por Camargo (2021). Finalmente, se espera obtener como resultados una secuencia de enseñanza mejorada que evidencie un avance en los tipos de demostración y que involucre diversas formas de razonamiento.

Palabras & frases claves: Demostración, razonamiento, geometría.

1. Introducción

El uso del Software de Geometría Dinámica (SGD) favorece la articulación entre la percepción y la teoría, permitiendo a los estudiantes generar diferentes tipos de demostraciones (Olivero et al., 2003; MEN, 2004; Marrades y Gutiérrez, 2000; Laborde, 2001). Para esto, Nirode (2012), Joubert (2017) y Komatsu y Jones (2019) subrayan la importancia de diseñar tareas en el SGD que aprovechen las capacidades del entorno, fomenten la actividad estudiantil deseada y provoque la exploración, experimentación, conjeturación y demostración. Estas tareas generan una interacción entre distintas formas de razonamiento, la cual suele ser compleja al transitar de demostraciones empíricas a teóricas (Meyer, 2004; Arzarello et al., 2012). El MEN (2004) y Galindo (1998) destacan las tareas de simulación, construcción, lugares geométricos y cajas negras para generar diversos tipos de demostraciones. Sin embargo, Prieto y Gutiérrez (2024) concluyen que las investigaciones privilegian las tareas de construcción, dejando interrogantes sobre las demostraciones y razonamientos que surgen al integrar otras tareas para enseñar contenidos geométricos. Por tanto, el objetivo de la investigación es aportar información sobre las formas de razonamiento y los tipos de demostración que surgen de los alumnos al estudiar las propiedades del círculo en tareas de construcción, lugares geométricos, cajas negras y de simulación.

2. Método y resultados del trabajo de investigación

El trabajo se desarrolló mediante el uso del experimento de enseñanza, planteado por Camargo (2021) como método de investigación. Se formuló una conjetura acerca de qué teoremas y propiedades del círculo conviene enseñar y de qué manera hacerlo, articulando las tareas mencionadas

¹Universidad Industrial de Santander. Correo: jennifer2248064@correo.uis.edu.co

²Universidad Industrial de Santander. Correo: jfiallo@uis.edu.co

previamente. Con base en ello, se diseñó e implementó una secuencia de enseñanza centrada en las propiedades del círculo y orientada al desarrollo de la demostración, con el propósito de realizar posteriormente un análisis retrospectivo sobre las formas de razonamiento y los tipos de demostración que los estudiantes ponen en juego al enfrentarse a las tareas propuestas.

Para realizar los análisis se utilizaron como lentes teóricos la estructura analítica de demostraciones de Marrades y Gutiérrez (2000), adaptada por Fiallo (2011), y las formas de razonamiento planteadas por Pedemonte (2005).

La estructura analítica se divide en dos categorías principales, **Demostraciones empíricas y deductivas**, dependiendo si la demostración se realizó comprobando ejemplos o no. Según como se seleccionen y se usen los ejemplos las demostraciones empíricas y deductivas tienen subcategorías. Las empíricas se dividen en: *Empirismo ingenuo*; *Experimento crucial* constructivo o basado en el ejemplo; *Ejemplo genérico* analítico o intelectual. Las deductivas se dividen en: *Experimento mental* y *deducción formal*, ya sea transformativo o estructural.

De Pedemonte (2005) se infieren tres formas de razonamiento: *Inductivo*, a partir de un conjunto de casos se infiere una regla que se cree se cumple; *Abductivo*, derivación de la más plausible explicación para un conjunto dado de hechos y *deductivo*, cuando se aplica una ley conocida a unas premisas conocida para obtener la conclusión.

Con lo anterior, se concluyó que, en las tareas de simulación, los estudiantes tendieron a coordinar las tres formas de razonamiento: el inductivo, al formular conjeturas; y el abductivo y deductivo, al elaborar demostraciones. Además, dado que estas tareas brindaron la oportunidad de explorar y construir elementos auxiliares, los estudiantes presentaron distintos tipos de demostraciones empíricas.

En las tareas de construcción, se evidenció que, en ocasiones, los estudiantes razonaron inductivamente durante el proceso de construcción. Sin embargo, al ser conscientes de que estas construcciones tenían un fundamento teórico, al intentar demostrarlas predominó el razonamiento deductivo; por lo tanto, las demostraciones fueron mayoritariamente deductivas formales.

En las tareas de cajas negras, predominó el razonamiento inductivo, dado que los estudiantes realizaron construcciones por ensayo y error hasta obtener la figura que representaba la caja negra. Una vez lograda, generalizaron la construcción sin considerar necesaria la elaboración de una demostración formal.

Finalmente, en las tareas de lugares geométricos se observó la coordinación de los tres tipos de razonamiento: inductivo, al identificar la figura que representaba el lugar geométrico; abductivo, al buscar razones plausibles que dieran sustento a lo observado; y deductivo, al buscar los datos que permitieran aplicar los permisos de inferir establecidos en el razonamiento abductivo. En estas tareas, los estudiantes presentaron inicialmente demostraciones empíricas ingenuas; sin embargo, en algunas ocasiones lograron elaborar demostraciones deductivas.

Referencias

- [1] F. ARZARELLO, M. BARTOLINI, A. LEUNG, M. MARIOTTI, I. STEVENSON, *Experimental approaches to theoretical thinking: Artefacts and proofs*. Proof and proving in mathematics education: The

- 19th ICMI Study. **97** (2012):97–143.
- [2] L. CAMARGO, *Estrategias cualitativas de investigación en educación matemática: Recursos para la captura de información y el análisis*. Editorial Universidad de Antioquia, 2021.
 - [3] J. E. FIALLO, *Estudio del proceso de demostración en el aprendizaje de las Razones Trigonométricas en un ambiente de Geometría Dinámica*. Tesis doctoral, Universitat De València, 2011.
 - [4] E. GALINDO, *Implementing the Assessment Standards for School Mathematics: Assessing Justification and Proof in Geometry Classes Taught Using Dynamic Software*. The Mathematics Teacher. **91**(1) (1998):76–82.
 - [5] M. JOUBERT, *Revisiting Theory for the Design of Tasks: Special Considerations for Digital Environments*. En A. Leung y A. Baccaglini-Frank (eds.), Digital Technologies in Designing Mathematics Education Tasks, (pp. 17–40). Springer, 2017.
 - [6] K. KOMATSU, K. JONES, *Task design principles for heuristic refutation in dynamic geometry environments*. International Journal of Science and Mathematics Education. **17**(4) (2019):801–824.
 - [7] C. LABORDE, *Dynamic geometry environments as a source of rich learning contexts for the complex activity of proving*. Educational Studies in Mathematics. **44** (2001):151–161.
 - [8] R. MARRADES, Á. GUTIÉRREZ, *Proofs produced by secondary school students learning geometry in a dynamic computer environment*. Educational Studies in Mathematics. **44** (2000):87–125.
 - [9] MEYER, M., *Using Abduction for Characterizing the Process of Discovery*. En: MAGNANI, L. (Ed.), *Handbook of Abductive Cognition*, pp. 557–583. Springer Nature Switzerland, 2023.
 - [10] MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACIONAL (MEN), *Pensamiento Geométrico y Tecnologías Computacionales*. Enlace Editores LTDA, 2004.

4.29 Secuencia de enseñanza enfocada en la modelación de situaciones covariacionales con tecnología digital

Luis Fernando Muñoz¹, Jorge Enrique Fiallo²

Resumen

Esta ponencia presenta una secuencia de enseñanza del cálculo basada en la modelación de situaciones covariacionales con apoyo de tecnologías digitales. La propuesta, implementada con estudiantes de ingeniería de la UIS, promueve el desarrollo del razonamiento covariacional y habilidades de modelación matemática, mediante actividades contextualizadas y dinámicas. De esta manera, la secuencia favorece una comprensión más profunda y funcional de las matemáticas. Asimismo, la intervención didáctica utiliza el potencial de las tecnologías digitales, reconocido y recomendado en la literatura, para dar mayor dinamismo y múltiples formas de representación a los conceptos estudiados en un curso de cálculo diferencial.

Palabras clave: secuencia de enseñanza, modelación, covariación.

1. Introducción

El estudio epistemológico de los conceptos fundamentales del cálculo muestra que el enfoque covariacional ha estado presente de forma intrínseca en su origen y desarrollo (Thompson y Carlson, 2017). En consecuencia, su incorporación en la enseñanza del cálculo resulta relevante, de modo que los estudiantes recorran procesos similares a los que dieron lugar a estos conceptos. Desde la didáctica de las matemáticas, esto implica diseñar situaciones que simulen los contextos en los que surgieron dichas ideas. En esta línea, se promueve el diseño de secuencias didácticas basadas en el enfoque covariacional que, según Carlson et al. (2002), facilita una comprensión dinámica de las relaciones de interdependencia entre cantidades que varían conjuntamente y de los modos en que cambian.

Por otra parte, la modelación, concebida como una herramienta didáctica (Trigueros, 2014), fomenta un aprendizaje activo y significativo de las matemáticas. Al construir modelos a partir de situaciones reales, los estudiantes desarrollan una visión funcional de las matemáticas y fortalecen su capacidad para conectarla con otros contextos y disciplinas (Carreira y Baioa, 2011; Niss, 2012).

Ahora, respecto al uso de la tecnología en la enseñanza del cálculo, Moreno (2014) sostiene que “el medio digital permite conjugar lo discreto con el movimiento y de ese modo, proporciona modelos adecuados de la variación que poseen los procesos temporales propios del Cálculo” (p. 112). Este mismo autor afirma que los medios digitales permiten recuperar el dinamismo que el cálculo había perdido por causa del rigor introducido con el análisis matemático.

Teniendo en cuenta lo anterior, se presenta una secuencia de enseñanza centrada en la modelación de situaciones covariacionales contextualizadas en la vida real, la ciencia o la ingeniería, con apoyo de tecnologías digitales. La secuencia aborda los conceptos básicos del cálculo (función, límite y

¹Universidad Industrial de Santanderl. Correo: luis2248066@correo.uis.edu.co

²Universidad Industrial de Santanderl. Correo: Jfiallo@uis.edu.co

derivada) desde un enfoque covariacional y práctico, utilizando herramientas como GeoGebra y sitios web que permiten simular fenómenos contextualizados.

2. Marco conceptual

Se utiliza el marco conceptual para el estudio del razonamiento covariacional de Carlson et al. (2002) que propone las siguientes cinco acciones mentales: Coordinación de variables, Coordinación de la dirección de cambio, Coordinación de la cantidad de cambio, Coordinación de la razón de cambio promedio y Coordinación de la razón de cambio instantánea.

Por otra parte, la modelación matemática se utiliza como una herramienta didáctica que permea el diseño de las actividades implementadas, tomando como referente el ciclo de modelación de Berrío et al. (2021). Por tanto, las actividades descritas más adelante siguen una estructura que permite pasar por cada una de las etapas del ciclo de modelación, al mismo tiempo en que se promueve la activación de cada una de las acciones mentales de manera progresiva.

3. Metodología

Este estudio siguió una metodología de corte cualitativo, apoyado en la estrategia denominada experimento de enseñanza que, “consiste en el diseño, implementación y evaluación de una secuencia de enseñanza organizada con la meta de poner en funcionamiento una conjetura sobre un aprendizaje específico.” (Camargo 2021, p. 86). Por ello, las etapas de la investigación están basadas en el plan de ejecución para la estrategia experimento de enseñanza.

El experimento se llevó a cabo con 35 estudiantes de primer semestre de un programa de ingeniería de la UIS, en estrecha colaboración entre el investigador principal y un equipo de profesores e investigadores, quienes contribuyeron críticamente al diseño, experimentación y análisis de la secuencia de enseñanza.

4. Resultados

Se ha diseñado una secuencia de enseñanza constituida por una serie de cinco talleres, cada uno de ellos enfocado en un tipo de variación (directa-inversa, acelerada-desacelerada, convergente, cíclica y escalonada) y en un contexto o situación específica.

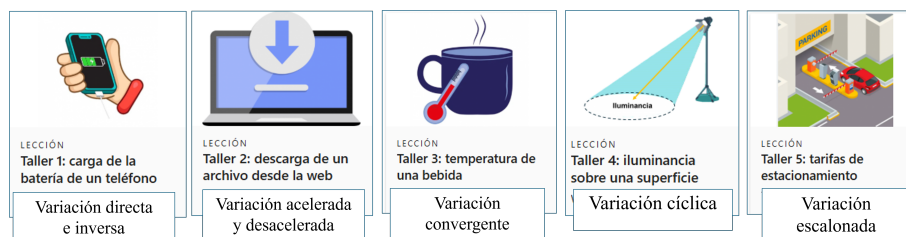


Figura 1. Estructura de la secuencia de enseñanza.

Cada taller se constituye por tres actividades principales, siguiendo una estructura que combina las etapas del ciclo de modelación y la propuesta curricular de Fiallo y Parada (2018). La primera, denominada información y exploración libre, permite conocer el contexto o situación que se va a abordar; algunos datos importantes, como los instrumentos de medición requeridos para las magnitudes involucradas, sus unidades de medida, entre otros. La segunda actividad, llamada exploración dirigida, se divide en dos partes, una en la que se realiza la experimentación y la toma de datos de la situación abordada, y otra en la que formulan y validan el modelo matemático encontrado. Allí, principalmente se plantean preguntas para que los estudiantes exhiban comportamientos asociados a las acciones mentales del razonamiento covariacional de forma más explícita. Finalmente, la tercera actividad, denominada tarea retadora, está enfocada en la resolución de un nuevo problema a partir de lo aprendido en el taller. Allí, se espera también que, con la ayuda del profesor, el estudiante logre conceptualizar el tipo de variación en el cual estuvo enfocado el taller, así como las características covariacionales asociadas.

Para la etapa de formulación del modelo matemático se hizo uso de la herramienta análisis de regresión de dos variables de GeoGebra, la cual ofrece diferentes modelos matemáticos para representar los datos recopilados tras cada experimentación. Para la etapa de validación del modelo, se propuso un applet de GeoGebra a los estudiantes, con el cual podían analizar la relación de interdependencia, la dirección de cambio, cantidades de cambio, razón promedio y razón instantánea de sus modelos matemáticos. Con estas características junto a otros criterios establecidos por los estudiantes, determinaban la pertinencia del modelo para los datos y la situación.

5. Conclusiones

La implementación de la secuencia de enseñanza permitió comprobar su potencial para favorecer el desarrollo del razonamiento covariacional y de habilidades de modelación matemática, promoviendo una comprensión profunda y contextualizada del cálculo. Además, este recurso aborda las nociones básicas del cálculo (funciones, límites y derivadas) de manera conjunta y recursiva, al proponer el estudio de las funciones no por su clasificación tradicional (polinómicas, racionales, trigonométricas, etc.), sino por el tipo de variación que las caracteriza.

Referencias

- [1] BERRÍO, J., PEÑA, Z. Y TORRENEGRA, M., *Desarrollo del proceso de modelación matemática en licenciados en formación*. Revista Interamericana de Investigación Educación y Pedagogía. **14** (2021):79–101.
- [2] CAMARGO, L., *Estrategias cualitativas de investigación en Educación Matemática*. Editorial Universidad de Antioquia, 2021.
- [3] CARLSON, M., JACOBS, S., COE, E., LARSEN, S. & HSU, E., *Applying covariational reasoning while modeling dynamic events: a framework and a study*. Journal for Research in Mathematics Education, **33**(5) (2002):352–378.
- [4] CARREIRA, S., BAIOA, A., *Students' Modelling Routes in the Context of Object Manipulation and Experimentation in Mathematics*. EN: KAISER, G., BLUM, W., BORROMEO FERRI, R., STILLMAN, G.

- (Eds.), *Trends in Teaching and Learning of Mathematical Modelling*, pp. 211–220. Springer, 2011.
- [5] FIALLO, J. Y PARADA, S., *Estudio dinámico del cambio y la variación. Curso de precálculo mediado por GeoGebra*. Ediciones UIS, 2018.
- [6] NISS, M., *Models and Modelling in Mathematics Education*. EMS Newsletter, **86** (2012):49–52.
- [7] THOMPSON, P. W., & CARLSON, M. P., *Variation, covariation, and functions: Foundational ways of thinking mathematically*. En J. Cai (Ed.), *Compendium for research in mathematics education* (pp. 421–456). National Council of Teachers of Mathematics, 2017.
- [8] TRIGUEROS, M., *Vínculo entre la modelación y el uso de representaciones en la comprensión de los conceptos de ecuación diferencial de primer orden y de solución*. *Revista Educación Matemática*, **26**(1) (2014):207–226.

4.30 Secuencia de enseñanza sobre propiedades y congruencia de triángulos

Sergio Caicedo¹, Jorge Fiallo²

Resumen

Se presenta una secuencia de enseñanza enfocada en promover el uso de ejemplos como estrategia para la resolución de problemas de demostración sobre propiedades y congruencia de triángulos. Esta secuencia está sustentada en las sugerencias dadas por Ellis et al. (2019) sobre los criterios, propósitos y estrategias para seleccionar y usar de manera productiva los ejemplos en procesos de demostración. Para su implementación se siguió la metodología del experimento de enseñanza. Los resultados de la implementación dan cuenta de un avance en la forma de razonamiento empírico hacia uno deductivo en los estudiantes, de la evocación del uso de ejemplos y cómo estos usos favorecieron la construcción de demostraciones deductivas.

Palabras claves: ejemplos, demostración, geometría euclidiana.

1. Introducción

De acuerdo con Zaslavsky (2019), en la última década ha habido un creciente interés entre la comunidad de investigadores en educación matemática por estudiar los roles, el uso y las oportunidades de los ejemplos en el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas, en todos los niveles. En ese sentido Knuth et al. (2019), Ellis et al. (2019) y Aricha-Metzer y Zaslavsky (2019) concluyen que el razonamiento basado en ejemplos desempeña un papel esencial en el desarrollo, la exploración y la comprensión de las conjeturas; así como en los intentos posteriores para desarrollar sus demostraciones.

No obstante, si los estudiantes no analizan ni usan estratégicamente los ejemplos cuando se enfrentan a problemas de demostración, esto puede conllevar a más dificultades para aprender a demostrar. Por tanto, se sugiere que se oriente a los estudiantes en aprender a pensar estratégicamente y usar ejemplos de manera productiva en estos problemas para facilitar el aprendizaje de la demostración (Knuth et al., 2019).

En consecuencia, ante esta necesidad de diseñar y probar intervenciones destinadas a ayudar a los estudiantes a aprender a pensar estratégicamente y usar ejemplos de manera productiva en actividades relacionadas con la demostración, se diseñó una secuencia de enseñanza. Esta secuencia buscó promover el uso de ejemplos como estrategia para la demostración de problemas referentes a las propiedades y congruencia de triángulos.

2. Marco Teórico

La secuencia de enseñanza tiene dos dimensiones: una matemática, sobre el qué enseñar; y otra didáctica, sobre el cómo enseñar. Para la dimensión matemática se tomó como referencia las ideas

¹Universidad Industrial de Santander. Correo: sergio2248065@correo.uis.edu.co

²Universidad Industrial de Santander. Correo: jfiallo@uis.edu.co

de Clemens et al. (1998), Marrades y Gutiérrez (2000) y Samper y Molina (2013) para sustentar la selección de conceptos y teoremas de la secuencia. En consecuencia, los conceptos que comprenden la secuencia son: circunferencia, punto medio, rectas paralelas, rectas perpendiculares, altura, mediana, mediatriz y bisectriz. Y los teoremas son: teorema del ángulo exterior, teorema del triángulo isósceles, segundo teorema de Tales, teorema de la bisectriz, y teorema de ángulos opuestos por el vértice.

Para la dimensión didáctica se tomaron las sugerencias de Morales y Samper (2015), Zaslavsky y Knuth (2019) y Silva (2013) para la enseñanza de los conceptos y teoremas involucrados. Y para fundamentar las tareas de la secuencia y fomentar el uso de ejemplos, se tomaron las categorías de Criterios, Propósitos y Estrategias del marco CAPS de Ellis et al. (2019). Estas categorías permitieron instruir a los estudiantes sobre los usos productivos que pueden tener los ejemplos en el proceso de demostración.

3. Metodología

Para realizar este trabajo se usó como método de investigación el Experimento de enseñanza transformativo dirigido por la siguiente conjetura: la formulación y demostración de conjeturas se verá favorecida al implementar una secuencia de enseñanza que promueva el uso de ejemplos como estrategia para resolver los problemas de demostración. A partir de esta conjetura se diseñó la secuencia de enseñanza sobre propiedades y congruencia de triángulos en el aula virtual de GeoGebra, la cual se implementó durante seis semanas con estudiantes del programa de Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Industrial de Santander del curso de Geometría Euclidiana.

La recolección de información se realizó mediante grabaciones de audio y video de las pantallas de tres parejas de estudiantes que trabajaron en equipo. Luego, estas grabaciones se transcribieron y se analizaron a la luz de los elementos teóricos para obtener los datos de la investigación.

4. Resultados

Respecto a la secuencia de enseñanza se evidenció que en algunos casos el hecho de promover el uso de ejemplos posibilitó a los estudiantes obtener información para desarrollar conjeturas y construir demostraciones, permitiéndoles transitar de argumentos basados en el ejemplo a argumentos basados en aspectos genéricos del problema. Lo que sugiere que, los ejemplos pueden resultar útiles para que los estudiantes puedan transitar de demostraciones empíricas a deductivas (Zaslavsky y Knuth, 2019). Además de sugerir que la estructura, el contenido y la instrucción sobre el uso de ejemplos de la secuencia favoreció el razonamiento basado en ejemplos para la producción de demostraciones deductivas.

Sobre los usos de los ejemplos durante la implementación de la secuencia, se identificó que los usos más frecuentes en el proceso de demostración fue para formular y validar conjeturas, identificar/descartar información, refutar argumentos, concentrarse, y organizar sus ideas y argumentos. Estos usos resultaron productivos en tanto que apoyaron la formulación de conjeturas, las exploraciones en el software y papel, la identificación y generalización de propiedades, y la construcción de demostraciones deductivas.

Las sugerencias sobre cómo enseñar los conceptos y teoremas seleccionados resultaron positivas. Pues permitieron validar lo dicho por Silva (2013), quien dice que presentar situaciones en donde

se deban dar ejemplos y contraejemplos de conceptos permite que los estudiantes los comprendan mejor, los relacionen con otros conceptos y puedan usarlos con mayor facilidad en demostraciones.

5. Conclusiones

La secuencia de enseñanza permitió realizar una intervención en el aula en la que se valoraron dimensiones como el currículo, interacciones y contenido a enseñar, favoreciendo la observación del proceso de aprendizaje en los estudiantes en relación con el uso de ejemplos como estrategia para la resolución de problemas de demostración. Así mismo, favoreció la instrucción sobre el uso productivo de ejemplos y, en algunos estudiantes, la comprensión de las propiedades y congruencia de triángulos, cumpliendo sustancialmente con estos dos objetivos. Además, los usos del ejemplo fueron cada vez más sofisticados; lo que permitió que la mayoría de las demostraciones realizadas fueran deductivas.

Los usos de ejemplos que más favorecieron el proceso de construcción de demostraciones consistió en usarlos para explorar ideas, para generalizar argumentos y para organizar la información que obtenían a partir de las exploraciones. Estos usos, en su mayoría, fueron motivados por una toma de conciencia de los estudiantes por tener mayor concentración en las exploraciones para identificar/descartar información, por facilitar la redacción y organización de sus argumentos, y por generalizar los argumentos que presentaban para casos particulares.

Referencias

- [1] ARICHA-METZER, I., Y ZASLAVSKY, O., *The nature of students' productive and non-productive example-use for proving*. The Journal of Mathematical Behavior. **53** (2019):304–322.
- [2] CLEMENS, S., O'DAFFER, P., Y COONEY, T., *Geometry*. Addison Wesley Longman, 1998.
- [3] ELLIS, A., OZGUR, Z., VINSONHALER, R., DOGAN, M., CAROLAN, T., LOCKWOOD, E., LYNCH, A., SABOURI, P., KNUTH, E. Y ZASLAVSKY, O., *Student thinking with examples: The criteria-affordances-purposes-strategies framework*. The Journal of Mathematical Behavior. **53** (2019):263–283.
- [4] KNUTH, E., ZASLAVSKY, O., Y ELLIS, A., *The role and use of examples in learning to prove*. The Journal of Mathematical Behavior. **53** (2019):256–262.
- [5] LYNCH, A. Y LOCKWOOD, E., *A comparison between mathematicians' and students' use of examples for conjecturing and proving*. The Journal of Mathematical Behavior. **53** (2019):323–338.
- [6] MARRADES, R., Y GUTIÉRREZ, Á., *Proofs produced by secondary school students learning geometry in a dynamic computer environment*. Educational Studies in Mathematics. **44** (2000):87–125.
- [7] MORALES, S., Y SAMPER, C., *Dificultades en el aprendizaje de la demostración deductiva formal en geometría euclídea*. Amazonia Investiga. **4** (2015):55–68.
- [8] SAMPER, C., Y MOLINA, Ó., *Geometría plana. Un espacio de aprendizaje*. Fondo Editorial Universidad Pedagógica Nacional, 2013.

- [9] SILVA, L., *Argumentar para definir y definir para argumentar*. [Tesis de maestría no publicada]. Universidad Pedagógica Nacional, Departamento de Matemáticas, Bogotá, 2013.
- [10] ZASLAVSKY, O., *There is more to examples than meets the eye: Thinking with and through mathematical examples in different settings*. The Journal of Mathematical Behavior. **53** (2019):245–255.
- [11] ZASLAVSKY, O. Y KNUTH, E., *The complex interplay between examples and proving: Where are we and where should we head?* The Journal of Mathematical Behavior. **53** (2019):242–244.

4.31 Secuencia de problemas auténticos de ahorro y crédito para el desarrollo de competencias financieras mediante la modelación matemática

María Moreno¹, Carol Quintero², Jorge Fiallo³

Resumen

Se presenta una secuencia compuesta de tres problemas auténticos de ahorro y crédito en el formato libro del Aula Virtual de GeoGebra, basados en información y datos actuales de plataformas de bancos y un concesionario de motos. El proceso de la modelación desde la perspectiva del docente orientó el diseño de los problemas y cada pregunta se formuló considerando los momentos de la modelación desde la perspectiva del estudiante, los cuales se articulan con los procesos de la competencia financiera.

El objetivo de este diseño es potenciar la toma de decisiones en contextos reales de ahorro y crédito y promover una educación financiera crítica, inclusiva y transformadora en los futuros profesores de matemáticas.

Palabras & frases claves: educación financiera, competencia financiera, modelación matemática.

1. Introducción

Actualmente, existe un creciente interés por fortalecer la Educación Económica y Financiera (EEF) como medio para reducir las desigualdades en el acceso y uso de productos financieros, mediante el desarrollo de competencias básicas.

En Colombia, pese a los avances en políticas e iniciativas, persisten limitaciones en la comprensión de conceptos como el interés simple y compuesto, implicados en contextos de ahorro y crédito. Frente a esta situación, la modelación matemática surge como una herramienta para facilitar la comprensión de fenómenos reales mediante procesos de matematización, simulación y toma de decisiones.

No obstante, son escasos los estudios que articulan la modelación matemática con el desarrollo de competencias financieras, especialmente en la formación de docentes. Por ello, se propone una secuencia de problemas que integra la modelación matemática en contextos de ahorro y crédito, con el fin de desarrollar competencias financieras en los futuros docentes y proporcionar una guía para el fortalecimiento de dichas competencias a través de las prácticas pedagógicas.

2. Desarrollo de la ponencia

La educación financiera busca desarrollar competencias que permitan aplicar conocimientos para tomar decisiones informadas, teniendo en cuenta las características, posibilidades y limitaciones de los

¹Universidad Industrial de Santander. Correo: maria2200225@correo.uis.edu.co

²Universidad Industrial de Santander. Correo: carol2202088@correo.uis.edu.co

³Universidad Industrial de Santander. Correo: jfiallo@uis.edu.co

distintos productos y servicios financieros. Para evaluar esta competencia, PISA (2022) propone los siguientes procesos: identificar información financiera, analizar información y contextos financieros, evaluar asuntos financieros y aplicar el conocimiento y la comprensión de las finanzas.

Por otra parte, en esta investigación se asume la modelación matemática como el estudio de fenómenos o situaciones que pueden surgir tanto desde los contextos cotidianos, sociales y culturales de los estudiantes como de otras ciencias o disciplinas académicas. Este enfoque orienta la modelación a comprender la situación y encontrar soluciones efectivas a los problemas planteados.

El proceso de modelación del estudiante implica un ciclo que va desde la identificación y el análisis de un problema del mundo real, hasta la construcción, validación y ajuste de un modelo matemático que lo represente, repitiendo las etapas hasta lograr coherencia con el fenómeno.

El diseño de los problemas se fundamentó en el proceso de modelación desde la perspectiva del docente, considerando el contexto de los estudiantes para favorecer el desarrollo del conocimiento matemático, la interpretación y la toma de decisiones. Para la formulación de cada tarea se articulaban los momentos del ciclo de modelación con los procesos de la competencia financiera.

Adicionalmente, se tuvieron en cuenta las fases de información y exploración libre, socialización de resultados, exploración dirigida, explicación y tarea retadora, las cuales estructuraron la implementación de la secuencia didáctica, favoreciendo el aprendizaje significativo.

La secuencia fue valorada por estudiantes de posgrado y pregrado, quienes realizaron sugerencias que permitieron mejorar el diseño final. Posteriormente, se implementó con estudiantes de la Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Industrial de Santander, evidenciando el potencial de la modelación matemática para integrar conocimientos matemáticos y financieros y promover la toma de decisiones fundamentadas en contextos reales.

Referencias

- [1] COMISIÓN DE LAS COMUNIDADES EUROPEAS. *La educación financiera*. Bruselas, Bélgica, 2007.
- [2] FIALLO, J. & PARADA, S. *Estudio dinámico del cambio y la variación: curso de precálculo mediado por GeoGebra*. Ediciones UIS, 2018.
- [3] MINISTERIO DE EDUCACIÓN, FORMACIÓN PROFESIONAL Y DEPORTES. *PISA 2022. Competencia financiera: Informe español*. Instituto Nacional de Evaluación Educativa, 2024.
- [4] TENJO, M. F. & MEJÍA, D. *Encuesta de medición de capacidades financieras de Colombia 2019*. Superintendencia Financiera de Colombia, 2021.
- [5] VILLA, J. & ALENCAR, E. Un panorama de investigaciones sobre modelación matemática en Colombia y Brasil. *Revista de Educación Matemática*, **16**(21) (2019):18–37.
- [6] VILLA, J. A. *La modelación como proceso en el aula de matemáticas*. Tecno Lógicas. **19** (2007):63–85.
- [7] VILLA, J. A. *Modelación matemática escolar*. Relme 26, (2012):210–219.

- [8] VILLA OCHOA, J. A. & RUIZ VAHOS, H. M. *Modelación en educación matemática*. Revista Virtual Universidad Católica del Norte, **27** (2009):1–21.
- [9] VILLA-OCHOA, J., CASTRILLÓN-YEPES, A. & SÁNCHEZ-CARDONA, J. *Tipos de tareas de modelación para la clase de Matemáticas*. Espaço Plural, **18**(36) (2017):219–251.

4.32 Tipos de demostración emergentes en una secuencia de enseñanza de la regla de derivación de la función potencia y la función exponencial

Valentina Delgado Angarita¹

Resumen

Se reportan los tipos de demostración que construyen los estudiantes de un curso de didáctica del cálculo de la Licenciatura en Matemáticas de la UIS en una secuencia de enseñanza sobre las reglas de derivación de algunas funciones, incorporando las ideas de Fermat, donde además, se busca superar las limitaciones causadas por la mecanización de las reglas de derivación y su impacto en la comprensión conceptual. Este trabajo adopta como metodología de investigación el experimento de enseñanza, planteando como conjetura inicial que, la incorporación de las ideas de Fermat en el diseño de un libro en el Aula Virtual de GeoGebra, guiado por la exploración, conjeturación y argumentación, coadyuva a comprender y demostrar la regla de derivación de la función potencia y la función exponencial.

Palabras clave: Conjeturas, demostración, reglas de derivación.

1. Introducción

Entre los procesos generales en la enseñanza de las matemáticas se destaca el razonamiento y la demostración, fundamentales para el desarrollo del pensamiento lógico y la comprensión profunda de los conceptos (MEN, 1998). Los programas educativos, deben capacitar a los estudiantes en la formulación de conjeturas, el desarrollo de demostraciones y la aplicación de diversos tipos de razonamiento matemático (NCTM, 2003). Sin embargo, a pesar de la relevancia de estos lineamientos, varios estudios indican que los estudiantes presentan grandes obstáculos en el aprendizaje de este proceso. Varios estudios indican que los estudiantes presentan grandes obstáculos en el aprendizaje del razonamiento y la demostración. Al respecto, Stylianides, et al. (2013) señalan que los estudiantes enfrentan dificultades debido a la falta de ambientes adecuados y oportunidades suficientes en el aula para el aprendizaje del razonamiento y la demostración. Este desafío se ve reflejado en un problema clave y persistente: los estudiantes tienden a aceptar una afirmación como verdadera simplemente porque se cumple para algunos ejemplos, y continúan manteniendo esta idea errónea incluso después de una instrucción explícita por parte del docente. Además, no consideran suficiente la existencia de un contraejemplo que refute una generalización matemática falsa (Stylianides et al. 2017).

En un contexto universitario local, investigaciones como la de Antonio (2020) y Riaño (2023) reportan que la mayoría de demostraciones que los estudiantes construyen cuando se les pide plantear conjeturas y construir sus propias demostraciones son empíricas. En el aprendizaje del cálculo persiste la desconexión entre la mecanización de procedimientos, como las reglas de derivación, y la comprensión de sus significados. Esta brecha favorece el desarrollo de algoritmos sin un entendimiento claro de su propósito o contexto, lo que limita su aplicación efectiva en situaciones más

¹Universidad Industrial de Santander, Bucaramanga-Colombia. Correo: ivon2211370@correo.uis.edu.co

complejas. (Artigue, 1995; Hitt, 2003). En particular, en lo referente a las reglas de derivación, Conejo, Arce y Ortega (2014), presentan un estudio descriptivo sobre el tratamiento de la justificación de las reglas y técnicas de derivación en algunos libros de texto de secundaria. Además, establecen que la mecanización de estas reglas, ignorando su justificación, podría ser una de las causas por las que no se alcanza la comprensión de este concepto. Este es un punto vista con el que se coincide en este trabajo. En este contexto, las ideas de Fermat ofrecen una alternativa a través de su método de la subtangente. Para tratar de disminuir las deficiencias mencionadas que motivan este estudio, se diseñó, implementó y evaluó una secuencia de enseñanza en el formato libro del aula virtual de GeoGebra, incorporando las ideas de Fermat. En esta ponencia se reportan los tipos de demostración elegidos por los estudiantes al enfrentarse a tareas de plantear conjeturas y construir demostraciones de la regla de la potencia.

2. Marco de referencia

2.1. Demostración

Partiendo de que “la demostración es el proceso que incluye todos los intentos hechos por los estudiantes para explicar, verificar o justificar con miras a convencerse a sí mismo, a otros estudiantes y al profesor de la veracidad de una afirmación matemática” y de la siguiente estructura que caracteriza los tipos de demostración (Fiallo, 2011), se reconocen: Las demostraciones deductivas tipo experimento mental que hace uso de ejemplos para organizar la demostración, mientras que la deducción formal se basa exclusivamente en operaciones mentales abstractas, sin recurrir a ejemplos específicos. A su vez, tanto el experimento mental como la deducción formal se subdividen en dos tipos: transformativa, cuando se transforma el problema en otro equivalente y estructural, cuando se organiza la deducción a partir de secuencias lógicas derivadas de axiomas, definiciones y teoremas. Las demostraciones inductivas se basan en ejemplos como el principal o único elemento de convicción. En este tipo de razonamiento, los estudiantes aceptan la veracidad de una conjetura tras observar regularidades en ejemplos específicos. Estas demostraciones se dividen en varios tipos. El empirismo ingenuo utiliza ejemplos seleccionados sin criterio, se dividen en inductivo, que se basa en generalizaciones inductivas sobre los datos y el perceptivo, donde la justificación se realiza elementos visuales o táctiles. El experimento crucial usa un ejemplo cuidadosamente escogido que se presume representativo, y puede incluir tipos como el experimento crucial basado en ejemplo y el experimento crucial constructivo. Finalmente, el ejemplo genérico representa un caso específico de una clase y permite la producción de razonamientos abstractos. Este tipo de demostración se divide en ejemplo genérico analítico, basado en propiedades generales descubiertas en el ejemplo, y ejemplo genérico intelectual, donde se aplican propiedades matemáticas aceptadas sin derivarlas directamente del ejemplo.

2.2. La subtangente

En el método de las tangentes, Fermat hallaba la subtangente a una parábola haciendo uso de su método para máximos y mínimos.

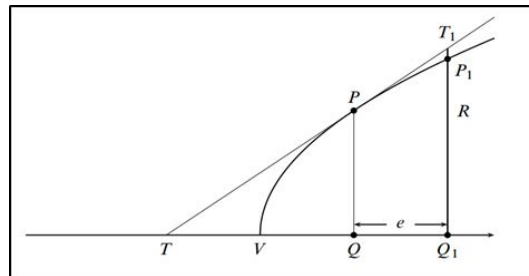


Figura 1: Cálculo de tangentes

Fermat desarrolló un método para calcular tangentes, utilizando puntos cercanos a la curva y estableciendo relaciones algebraicas entre las variables, obteniendo expresiones que en la actualidad son equivalentes a la derivada. Estas ideas se incorporaron en el diseño de un libro en el Aula Virtual de GeoGebra, titulado “Un viaje en el tiempo: Fermat y las reglas de derivación” (Link de acceso: <https://www.geogebra.org/m/ne8c9ruc>)

3. Metodología

El presente estudio desarrollado en el primer semestre del 2025 con 16 estudiantes de Licenciatura en Matemáticas de la UIS, siguió la metodología de una investigación de diseño, específicamente un experimento de enseñanza (Camargo, 2021), guiado por la conjetura de que la incorporación de las ideas de Fermat en el diseño de un libro en el Aula Virtual de GeoGebra favorece la exploración, conjeturación y argumentación, y coadyuva a comprender y demostrar la regla de derivación de la función potencia y a función exponencial.

4. Reflexiones finales

Los hallazgos sugieren que los estudiantes suelen recurrir principalmente a estrategias de carácter empírico; no obstante, el tránsito hacia un razonamiento deductivo puede favorecerse mediante tareas que impulsen la formulación de conjeturas y la construcción de demostraciones. En la ponencia se presentarán ejemplos concretos de los tipos de demostración elaborados por los estudiantes, así como algunas de las dificultades y errores emergentes que obstaculizaron el desarrollo del razonamiento deductivo esperado.

Referencias

- [1] ANTONIO, M., *Tipos de demostraciones que realizan los estudiantes en un curso de Precálculo*. Tesis de maestría, Universidad Industrial de Santander, 2020.
- [2] CAMARGO, L., *Estrategias cualitativas de investigación en Educación Matemática*. Universidad de Antioquia, 2021.

- [3] FIALLO, J., *Estudio del proceso de Demostración en el aprendizaje de las Razones Trigonómicas en un ambiente de Geometría Dinámica*. Tesis Doctoral. Universitat de València, España, 2011
- [4] HITT, F., *Dificultades en el aprendizaje del cálculo* XI Meeting of Middle Higher Level Mathematics Teachers. Michoacan University San Nicolas de Hidalgo, Morelia, México, 2003.
- [5] MEN, *Lineamientos Curriculares del área de Matemáticas*. Ministerio de Educación Nacional, 1998.
- [6] NCTM, *Principios y Estándares para la Educación Matemática*. Sevilla: Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales, 2003.
- [7] PÉREZ, J., *Orígenes del Cálculo. Historia de las Matemáticas*. Departamento de Análisis Matemático. Universidad de Granada, 2006.
- [8] RIAÑO, Á., *Tipos de demostración que realizan estudiantes de nuevo ingreso al curso de geometría euclidiana en las carreras de matemáticas y licenciatura en matemáticas de la Universidad Industrial de Santander*. Tesis de pregrado, Universidad Industrial de Santander, 2023.
- [9] STYLIANIDES, G. J., STYLIANIDES, A. J., & SHILLING-TRAINA, L. N., *Prospective teachers' challenges in teaching reasoning-and-proving*. International Journal of Science and Mathematics Education, **11** (2013):1463–1490.
- [10] STYLIANIDES, G. J., & STYLIANIDES, A. J., *Based interventions in the area of proof: the past, the present, and the future*. Educational Studies in Mathematics, **96** (2017):119–127.

4.33 Análisis probabilístico de la Ruina del Jugador

Maria Fernanda Araque Arenas¹

Resumen

El problema de la ruina del jugador es una de las cuestiones más famosas en la historia de la teoría de la probabilidad. Su primera mención se remonta al siglo XVII en un intercambio de cartas entre Blaise Pascal y Pierre Fermat, aunque la primera solución publicada aparece en el año 1657 en la obra de Huygens “*De Raticciniis in Ludo Algae*”.

Este problema se refiere a dos jugadores con capital inicial finito que participan en una sucesión de rondas donde, en cada una, se transfiere una unidad monetaria al ganador, las partidas son eventos independientes entre sí, y la probabilidad de que cualquiera de los dos gane en cada ronda es constante durante todo el juego. Se busca determinar la probabilidad de que un jugador arruine a su oponente antes de ser arruinado, así como el número esperado de rondas hasta que alguno de ellos se quede sin dinero.

En este trabajo, se presenta la solución de la versión más conocida del problema de la ruina del jugador, buscando comprender las implicaciones de las condiciones de este y planteando algunas estrategias de modelado para resolver otros problemas similares. Se expone la solución del modelo condicionando la probabilidad deseada al resultado de un suceso específico. Finalmente, se intenta analizar los resultados del modelo, buscando equilibrar cualquier conflicto entre la intuición y los resultados experimentales.

Palabras & frases claves: Resultados experimentales, probabilidad, ruina.

Referencias

- [1] LUIS RINCÓN, *Introducción a la probabilidad*. UNAM, 2013.
- [2] LUIS RINCÓN, *Introducción a los procesos estocásticos*. UNAM, 2012.

¹Universidad de Antioquia - Medellín, Colombia. Correo: maria.araque@udea.edu.co

4.34 Aprender con el Mundo en las Manos: Acompañamiento Educativo en Geometría Euclidiana

Nayarith Melissa Vásquez Ortiz¹, Jenny Patricia Acevedo Rincón²

Resumen

El objetivo de este trabajo es ofrecer recursos y prácticas con ajustes razonables para el acompañamiento de un estudiante con discapacidad visual de la Universidad Industrial de Santander que cursa la asignatura Geometría Euclidiana. Dicho acompañamiento se ejecutó durante clases y tutorías, donde a partir del uso de material concreto, como materiales táctiles y relieves, y del apoyo académico, se facilitó el desarrollo de procesos como la visualización, el razonamiento y la ejercitación, en coherencia con el enfoque del curso. Al finalizar el semestre, se evidenció que el estudiante potenció sus habilidades matemáticas, logrando construir significados matemáticos mediante el tacto, la verbalización y el razonamiento. Esta experiencia resalta que la inclusión no consiste únicamente en integrar al estudiante en el aula, sino en hacerlo partícipe de su proceso formativo mediante adaptaciones que garanticen igualdad de oportunidades de aprendizaje.

Palabras & frases claves: inclusión, geometría, discapacidad visual.

1. Introducción

Este trabajo presenta el proceso de acompañamiento aplicado a un estudiante con discapacidad visual de primer semestre de la Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Industrial de Santander, a quien se denomina E1. Se describe cómo se desarrolla el estudiante en su entorno académico, tanto con sus compañeros como con el docente, así como su desempeño en clases y tutorías correspondientes a la asignatura Geometría Euclidiana.

El proceso de enseñanza se apoyó en el uso de material didáctico elaborado específicamente para cada sesión, con el fin de analizar el ritmo de trabajo del estudiante y su comprensión de los conceptos geométricos abordados en el curso.

2. Objetivo

Diseñar estrategias didácticas inclusivas que favorezcan el aprendizaje de los conceptos fundamentales de la geometría por parte del estudiante E1, mediante el uso de materiales concretos accesibles y prácticas de acompañamiento orientadas a la atención a la diversidad.

3. Justificación

La intervención realizada es relevante porque se fundamenta en los lineamientos del Ministerio de Educación Nacional de Colombia, los cuales establecen que la educación inclusiva busca eliminar o minimizar las barreras que impiden el aprendizaje y la participación de todos los estudiantes. En

¹Estudiante, Universidad Industrial de Santander. Correo: nayarith2202864@correo.uis.edu.co

²Profesora, Escuela de Matemáticas, Universidad Industrial de Santander. Correo: jepaceri@uis.edu.co

este sentido, acompañar a un estudiante con discapacidad visual en un curso de Geometría Euclidiana permite poner en práctica estos principios, adaptando el entorno y los materiales para garantizar el acceso equitativo al conocimiento matemático.

Referencias

- [1] MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACIONAL. *Orientaciones para la educación inclusiva*. MEN, 2017.
- [2] GONZÁLEZ, E., VILLADIEGO, K. J., & RODRÍGUEZ, E. E. *Tiflotecnología en el aprendizaje de las matemáticas en estudiantes con discapacidad visual*. CIE, **2**(15) (2022):41–54.

4.35 Arte y matemáticas en la escuela primaria: Estrategias didácticas desde la experiencia de “Pinceladas Numéricas”

Jefersson Mendoza Serrano¹

Resumen

Se explora cómo las expresiones artísticas pueden utilizarse a favor de la enseñanza de las matemáticas en la educación básica primaria, promoviendo el uso de metodologías alternativas a las tradicionales. Se abordan temas como la identificación de figuras geométricas en dos dimensiones, conceptos como el área y el perímetro en pinturas cubistas realizadas por estudiantes de quinto grado, junto con el estudio de las proporciones a través de la silueta del cuerpo humano. La metodología se basa en ejemplos cotidianos desarrollados en el aula de clase, evidenciando resultados positivos en una institución educativa pública de Colombia durante la etapa de práctica de inmersión de la Licenciatura en Educación Básica Primaria. Los resultados contribuyen al uso de estrategias creativas alternativas para mejorar la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, así como a la formación docente.

Palabras & frases claves: Matemáticas; educación básica primaria; expresiones artísticas; STEAM.

1. Introducción

La educación básica primaria en la enseñanza de las matemáticas ha representado un desafío constante para los educadores, quienes buscan metodologías alternativas, creativas e innovadoras que faciliten el aprendizaje de los estudiantes más pequeños. En las prácticas de inmersión de la Licenciatura en Educación Básica Primaria se promueve el desarrollo de proyectos de aula transversales que articulen las áreas básicas con otros campos como el arte, convirtiéndolo en un elemento interdisciplinar motivador.

El propósito de esta experiencia es comunicar estrategias artísticas que permitieron dinamizar la comprensión de conceptos matemáticos clave en quinto grado de básica primaria del Instituto Técnico Dámaso Zapata de Bucaramanga.

2. La relacion del dibujo y las proporciones del cuerpo humano

En el aula de clase, el docente en formación junto con los estudiantes del grado 5-04 realizaron la silueta del cuerpo humano como herramienta para la enseñanza de las proporciones. Siguiendo a Acevedo y Ojeda (2016), el uso del dibujo del cuerpo humano favorece aprendizajes significativos en grados iniciales.

Los estudiantes trabajaron en grupos utilizando papel bond, metros de medición y marcadores. La actividad consistió en trazar la silueta del estudiante más pequeño del grupo y ajustar proporciones

¹Universidad Industrial de Santander. Correo: jefersson2211216@correo.uis.edu.co

cuando el tamaño superaba el papel disponible. Posteriormente, dibujaron sistemas del cuerpo humano dentro de la silueta, articulando contenidos de matemáticas y ciencias naturales, finalizando con exposiciones grupales.

3. Figuras geométricas, área y perímetro en obras de arte cubistas

En un segundo momento se exploró la relación entre el arte cubista y la geometría. Los estudiantes realizaron obras artísticas empleando figuras geométricas planas, identificando polígonos regulares e irregulares. A partir de estas representaciones, se asignaron medidas ficticias para calcular el área y el perímetro, reforzando conceptos matemáticos de manera lúdica y significativa.

Un ejemplo destacado fue el cálculo del perímetro de un cuadrado que representaba la cabeza de una figura humana, donde cada lado medía 40 cm, obteniendo un perímetro de 160 cm, actividad que generó participación y aprendizaje colectivo.

4. Agradecimientos

Esta comunicación fue asesorada y revisada en el marco del semillero de investigación STEAM+H, financiado por la Vicerrectoría de Investigación y Extensión de la Universidad Industrial de Santander.

Referencias

- [1] BISHOP, A. J. *Review of research on visualization in mathematics education*. Focus on Learning Problems in Mathematics, **11**(1) (1989):7–16.
- [2] ACEVEDO-RINCÓN, J. P., *Narrativas sobre las prácticas de enseñanza de las matemáticas*. CEI-PARI, Campinas, Brasil, 2016.

4.36 Concepciones y creencias docentes de Educación Básica Primaria sobre la enseñanza de la orientación espacial

Natalia Patiño Ramírez¹, Ashly Karolyna Puello Zuleta²

Resumen

La siguiente investigación aborda una problemática presente en la educación en Colombia relacionada con las concepciones y creencias que tienen los profesores acerca de la enseñanza de la orientación espacial en Educación Básica Primaria. El estudio se encuentra metodológicamente orientado por el modelo *Mathematics Teacher's Specialised Knowledge* (MTSK), a través del cual se busca analizar el conocimiento didáctico del contenido matemático desde la perspectiva docente.

Mediante la aplicación de entrevistas, los profesores participantes expresan sus percepciones, experiencias y valoraciones sobre la enseñanza de la orientación espacial, permitiendo caracterizar creencias, prácticas recurrentes y dificultades presentes en el aula. Esta investigación pretende aportar elementos de análisis que contribuyan al fortalecimiento de la enseñanza del pensamiento espacial en los primeros niveles educativos.

Palabras & frases claves: Modelo MTSK, orientación espacial, Educación Básica Primaria.

1. Introducción

Aunque la educación se encuentra en constante actualización, la reglamentación vigente presenta ambigüedades que generan vacíos en la práctica docente, la cual sigue centrada predominantemente en el uso de lápiz y papel. A pesar de que la educación a nivel nacional se encuentra reglamentada por entidades como el Departamento Nacional de Planeación (DNP) y el Ministerio de Educación Nacional (MEN), se evidencia que las prácticas escolares continúan siendo tradicionales.

Particularmente, la Ley 115 de 1994 y el Decreto 1278 de 2002 establecen que la función docente implica la mejora continua de la práctica pedagógica y la garantía de procesos sistemáticos de diagnóstico, planificación, ejecución y evaluación. No obstante, los resultados de evaluaciones nacionales e internacionales reflejan que dichas orientaciones no siempre se materializan en el aula.

2. Problema de investigación

La educación matemática en Colombia presenta resultados preocupantes tanto a nivel nacional como internacional. De acuerdo con el MEN (2023), en las pruebas PISA 2022 Colombia obtuvo puntajes inferiores en Matemáticas frente a Lectura y Ciencias. Asimismo, en las pruebas Saber 11° aplicadas en 2023, el 93 % de los estudiantes se ubicaron en los niveles 1, 2 y 3, correspondientes a los desempeños más bajos.

A esta situación se suman las creencias docentes sobre la enseñanza de las matemáticas. Según Gómez (2018), persiste una escasa integración entre los componentes epistemológicos y pedagógicos

¹Universidad Industrial de Santander. Correo: natalia2221390@correo.uis.edu.co

²Universidad Industrial de Santander. Correo: ashly2221768@correo.uis.edu.co

en la práctica educativa. En particular, se identifica un problema en la enseñanza de la orientación espacial, competencia clave del pensamiento espacial en Educación Primaria, relacionada con la ubicación, el movimiento y la comprensión del espacio.

En este contexto surge la pregunta de investigación: *¿Cuáles son las concepciones y creencias sobre la orientación espacial y su enseñanza en los profesores de Educación Básica Primaria?*

3. Justificación

Comprender los desafíos asociados a la enseñanza de la orientación espacial resulta fundamental para fortalecer el pensamiento espacial en los primeros ciclos educativos. De acuerdo con los Estándares Básicos de Competencia en Matemáticas (MEN, 2006), el desarrollo de esta competencia implica representar el espacio, establecer relaciones espaciales y reconocer movimientos como traslaciones y giros.

Asimismo, es necesario que los docentes articulen los contenidos matemáticos con el contexto y las experiencias cotidianas de los estudiantes, favoreciendo aprendizajes significativos. En este sentido, el estudio de las concepciones y creencias docentes permite identificar prácticas, dificultades y oportunidades de mejora en la enseñanza de la orientación espacial.

4. Marco teórico

La investigación se fundamenta en el modelo *Mathematics Teacher's Specialized Knowledge* (MTSK), el cual permite identificar el conocimiento que un profesor de matemáticas requiere para promover procesos de razonamiento, argumentación y modelación en sus estudiantes (Carrillo et al., 2015).

Este modelo se organiza en dos grandes dominios: el Conocimiento Matemático (MK) y el Conocimiento Pedagógico del Contenido (PCK), además de un dominio central relacionado con la identidad docente, las concepciones y las creencias. El presente estudio se centra en el dominio PCK y sus subdominios: Conocimiento de las Características del Aprendizaje de las Matemáticas (KFLM), Conocimiento de la Enseñanza de las Matemáticas (KMT) y Conocimiento de los Estándares de Aprendizaje de las Matemáticas (KMLS).

5. Anuncios metodológicos

El estudio adopta un enfoque cualitativo y se desarrolla en cuatro fases: aproximación teórica, aproximación empírica con docentes, creación de un *online focus group* y análisis anidado de las interacciones. La entrevista se emplea como técnica principal de recolección de información.

Los resultados se obtendrán a partir del análisis de las entrevistas, permitiendo identificar experiencias, ideas, valoraciones, estrategias, emociones y dificultades que emergen en el proceso de enseñanza de la orientación espacial.

Referencias

- [1] CARRILLO, J., MUÑOZ, M., CONTRERAS, L., ROJAS, N., MONTES, M. & CLIMENT, N. *Conocimiento especializado del profesor de matemáticas (MTSK): un modelo analítico para el estudio del conocimiento del profesor de matemáticas*, 2015.
- [2] DEPARTAMENTO NACIONAL DE PLANEACIÓN (DNP), *Educación preescolar, básica y media*. Departamento Nacional de Planeación, 2025.
- [3] GÓMEZ, A. *La educación matemática en Colombia: origen, avance y despegue*. Fides et Ratio, **16**(16) (2018):123–146.
- [4] INSTITUTO COLOMBIANO PARA LA EVALUACIÓN DE LA EDUCACIÓN (ICFES), *Informe nacional de resultados del examen Saber 11° 2023*. ICFES, Bogotá, 2024.
- [5] MEN. *Estándares Básicos de Competencia en Matemáticas*. MEN, Bogotá, 2006.
- [6] MEN. *Pruebas PISA 2022: Colombia, un sistema educativo resiliente*. MEN, Bogotá, 2023.
- [7] ZAPATEIRO, J., POLOCHE, S. & CAMARGO, L. *Orientación espacial: una ruta de enseñanza y aprendizaje centrada en ubicaciones y trayectorias*. Tecné, Episteme y Didaxis, **43** (2016):119–136.
- [8] NEYRA, M., NOVOA, L., URIBE, Y., RAMÍREZ, Y. & CANCINO, R. *Orientación espacial en niños de cuatro años de una escuela pública y privada*. REVISTA EDUSER. **6**(3) (2019):191–199.

4.37 Conversión Fotovoltaica Aplicada: alimentación de un Generador de Ondas Estacionarias

Devlyn Andrés Niebles Montagut¹, Juan Diego de Fex,¹ Daniel Andrés Patiño Martínez,¹ Jhon Jaider Quino Lizarazo², Sandra Johana Mendoza Carreño³

Resumen

Este trabajo presenta el diseño y la implementación de un sistema experimental que emplea un panel solar de fabricación casera como fuente de alimentación para un generador de ondas estacionarias. El proyecto integra de manera interdisciplinaria conceptos de física, energías renovables y matemáticas, con el propósito de analizar la relación entre la radiación solar incidente, la potencia eléctrica generada y la frecuencia de las ondas producidas en función de las condiciones experimentales.

El panel solar, construido con materiales reutilizables y de bajo costo, suministra la energía necesaria para accionar un generador que produce ondas estacionarias en una cuerda, permitiendo el estudio de fenómenos ondulatorios como la frecuencia, la longitud de onda y la formación de nodos y antinodos. A partir de la medición y análisis de datos experimentales, se demuestra la correspondencia entre los parámetros físicos observados y los modelos matemáticos que los describen. El objetivo principal de esta investigación es evidenciar la viabilidad del uso de energías renovables en entornos educativos, promoviendo la sostenibilidad, la innovación tecnológica y el aprendizaje activo de la ciencia. Los resultados obtenidos muestran que es posible implementar tecnologías limpias y accesibles para fortalecer la enseñanza experimental de la física y las matemáticas, incentivando el pensamiento científico y la conciencia ambiental en los estudiantes.

Palabras & frases claves: Arduino, Energía solar, Ondas estacionarias, Física experimental, aprendizaje STEM.

1. Introducción

El presente proyecto propone el diseño e implementación de un sistema experimental que utiliza un panel solar de construcción casera como fuente de energía para alimentar un generador de ondas estacionarias. Esta alternativa sostenible permite el estudio de fenómenos ondulatorios sin recurrir a fuentes eléctricas convencionales, integrando de manera práctica los principios de la física, las energías renovables y las matemáticas aplicadas.

El panel solar, elaborado con materiales reutilizables y de bajo costo, transforma la radiación solar en energía eléctrica suficiente para accionar un generador que produce ondas estacionarias sobre una cuerda. Este tipo de onda, caracterizada por la presencia de nodos y antinodos fijos, facilita el análisis experimental de variables como la frecuencia, la longitud de onda y la velocidad de propagación.

De esta manera, el proyecto busca demostrar la viabilidad del uso de energías limpias en el desarrollo de experimentos de física, fortaleciendo la enseñanza

¹Universidad Industrial de Santander.

²Universidad Industrial de Santander. Correo: jhon2244140@correo.uis.edu.co

³Universidad Industrial de Santander. Correo: sjmencar@correo.uis.edu.co

práctica de los conceptos ondulatorios y fomentando una conciencia ambiental orientada hacia la sostenibilidad y la innovación tecnológica.

2. Metodología y Aplicaciones Matemáticas

El proceso metodológico se estructuró en tres fases: recolección y diseño, ensamblaje y conexión, y evaluación funcional. Inicialmente en el esquema experimental, compuesto por un panel solar casero y un generador de ondas estacionarias, se llevó a cabo empleando principalmente materiales reciclados provenientes de un centro de recuperación de residuos electrónicos. Las fases se presentan la figura 1, mediante el proceso de construcción y verificación.

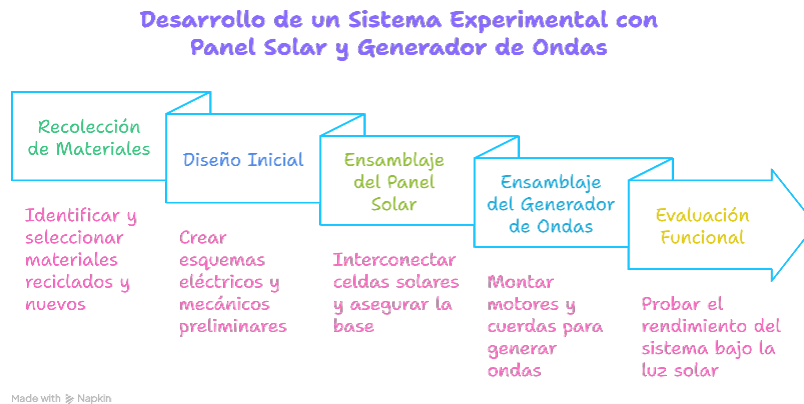


Figura 1: Proceso de desarrollo del sistema de energía solar

La metodología se estructuró en tres etapas secuenciales orientadas al diseño, implementación y validación funcional del sistema fotovoltaico acoplado al generador de ondas estacionarias. En la primera fase se efectuó la identificación y clasificación de los componentes requeridos, priorizando el uso de materiales reciclados provenientes de residuos electrónicos, como celdas fotovoltaicas, diodos y circuitos reutilizables, complementados con elementos nuevos de bajo costo (cuerdas de tensión controlada y micromotores de 4 V). Se elaboraron diagramas eléctricos y planos mecánicos preliminares que permitieron establecer la compatibilidad entre los subsistemas, así como los parámetros operativos iniciales de tensión y corriente requeridos para garantizar el suministro energético y la estabilidad del montaje experimental.

Posteriormente, se llevó a cabo el ensamblaje integral del sistema, conformado por un panel solar y un generador de ondas. Las celdas solares fueron interconectadas en serie mediante soldadura de pestañas conductoras, verificando continuidad y voltaje para asegurar la eficiencia del contacto eléctrico. Paralelamente, el generador fue montado sobre una base rígida con dos micromotores que accionaban una cuerda tensada, permitiendo la formación visible de nodos y antinodos. Finalmente, se realizaron pruebas de desempeño bajo irradiancia solar directa, registrando el voltaje (V), la corriente (I) y la potencia generada ($P = V \cdot I$), así como la frecuencia asociada a los modos de

vibración observados, con el propósito de evaluar la correspondencia entre el suministro energético y la generación de ondas estacionarias.

3. Análisis de datos y resultados

Las mediciones realizadas de voltaje en función de la radiación solar incidente, observando un comportamiento de radiación creciente hasta el mediodía. Se generaron ondas mecánicas con diferentes frecuencias, observando el número de nodos y antinodos de cada una de las ondas, observando que varía directamente con la frecuencia, validando la relación teórica.

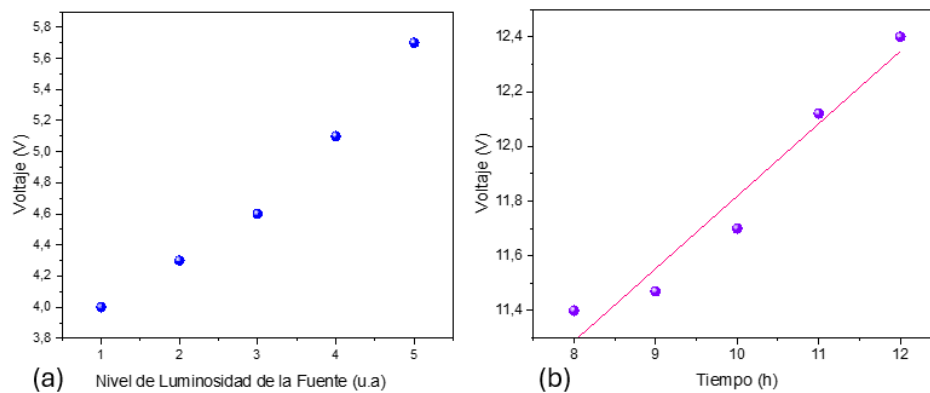


Figura 2: Voltaje de la celda

En la figura 2(a) se evidencia una relación creciente entre la luminosidad incidente y el voltaje generado por el panel solar. A mayor nivel de luz, mayor es el voltaje producido, lo cual confirma el comportamiento esperado del efecto fotovoltaico. Esta tendencia demuestra que el panel responde eficientemente a cambios en la intensidad luminosa, validando su utilidad como fuente de alimentación en condiciones controladas de iluminación. En la figura 2(b) se muestra un aumento progresivo del voltaje generado por la fotocelda entre las 8:00 horas y las 12:00 horas, alcanzando su punto máximo al mediodía. Este comportamiento refleja el incremento de la radiación solar con el paso de las horas, validando la sensibilidad del sistema a la intensidad luminosa y su eficacia como fuente de energía renovable en función del horario.

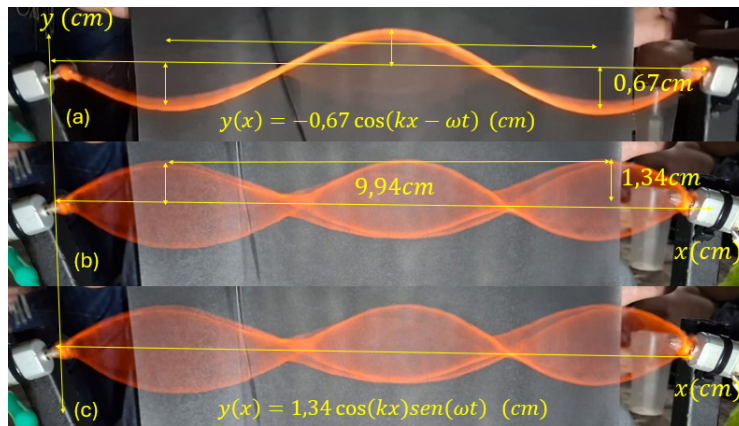


Figura 3: Función de onda en función del Voltaje de la celda

En la figura 3 se muestra la formación de ondas estacionarias en una cuerda tensada, generadas mediante un sistema de micromotores que inducen oscilaciones armónicas en sus extremos. En las tres imágenes de la figura 3 (a),

3(b) y 3(c) se evidencian distintos modos de vibración caracterizados por la presencia de nodos (puntos de mínima amplitud) y antinodos (puntos de máxima amplitud). En la Figura 3(a) se observa el modo fundamental o primer armónico, representado por una sola elongación máxima con una amplitud de 0,67 cm y una longitud de onda equivalente al doble de la longitud de la cuerda. Su comportamiento responde a la ecuación senoidal $y(x) = -0,67 \cos(kx - \omega t)$, que describe una onda progresiva. En (b) aparece el segundo armónico, con dos antinodos y una amplitud de 1,34 cm, evidenciando una longitud de onda de 9,94 cm, donde la interferencia entre las ondas incidentes y reflejadas da lugar a una onda estacionaria. Finalmente, en (c) se visualiza el tercer modo de vibración, modelado por la ecuación $y(x) = 1,34 \cos(kx) \sin(\omega t)$, correspondiente a una onda estacionaria pura, donde se identifican claramente tres antinodos y dos nodos intermedios.

Referencias

- [1] SERWAY, R. A. *Physics for Scientists & Engineers with Modern Physics*. Saunders College Publishing, 1992.
- [2] DUFFIE, J. A., & BECKMAN, W. A. *Solar Engineering of Thermal Processes*. John Wiley & Sons, 2013.
- [3] BOYLE, G. *Renewable Energy: Power for a Sustainable Future*. Oxford University Press, 2012.

4.38 Diseño didáctico sobre razones trigonométricas que involucra historia y atiende a la diversidad

Yorman Extiben Rey Gil¹, Pablo Iván Rivera León², Sandra Evely Parada Rico³

Resumen

En esta ponencia se presentan los resultados de la implementación de un diseño didáctico sobre razones trigonométricas, construido y fundamentado por Rueda (2023), que integra aspectos históricos, epistemológicos e inclusivos. La investigación buscó responder: ¿Qué alcances ofrece un diseño didáctico sobre razones trigonométricas que vincula aspectos históricos y atiende a la diversidad?

Como sustento, se utilizó un marco conceptual y de referencia que aborda los fundamentos teóricos considerados en la construcción del diseño, incluyendo los aspectos histórico-epistemológicos de las razones trigonométricas (Montiel, 2005; Machuca, 2015; Abonia & Miranda, 2017; Boyer, 1986), los aspectos didácticos de la historia y la epistemología (Guacaneme, 2016) y los aspectos curriculares (Ministerio de Educación Nacional, 2006), así como principios del Diseño Universal para el Aprendizaje (DUA) y orientaciones para la construcción de diseños didácticos (Parada, 2022; Jácome et al., 2024).

El estudio se desarrolló bajo un enfoque cualitativo de tipo exploratorio-descriptivo y se estructuró en ocho fases. Se concluyó que la historia y la epistemología constituyen herramientas valiosas en el proceso de enseñanza y aprendizaje, pues favorecen el desarrollo de múltiples representaciones, diversas formas de acción y expresión, y variadas formas de implicación en el estudio de las razones trigonométricas.

Palabras & frases claves: Razones trigonométricas, historia, inclusión.

Referencias

- [1] ABONIA, L., & MIRANDA, W., *Un acercamiento histórico a las razones trigonométricas seno y coseno para la implementación de una actividad en el aula*. Tesis de pregrado, Universidad del Valle, 2017.
- [2] BOYER, C., *Historia de las matemáticas*. Alianza Editorial, 1986.
- [3] GUACANEME, E., *Potencial formativo de la historia de la teoría euclidiana de la proporción en la constitución del conocimiento del profesor de matemáticas*. Universidad Pedagógica Nacional, 2016.
- [4] MACHUCA, R., *Lectura como estrategia para el aprendizaje de la trigonometría en estudiantes de secundaria de la institución educativa “San Angustian” de Cajas*. Tesis de maestría. Universidad Nacional del Centro del Perú, 2015.

¹Universidad Industrial de Santander. Correo: yreygil@gmail.com

²Universidad Industrial de Santander. Correo: pablocr7rivera@gmail.com

³Universidad Industrial de Santander. Correo: sanevepa@uis.edu.co

- [5] MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACIONAL, *Estándares básicos de competencias en matemáticas*. MEN, 2006.
- [6] MONTIEL, G., *Estudio socioepistemológico de la función trigonométrica*. Tesis de doctorado, Instituto Politécnico Nacional CICATA, 2005.
- [7] PARADA, S., *Educadores matemáticos que reflexionan sobre la atención a la diversidad en el aula*. Conferencia presentada en el Foro EMAD 2022. Transmitida el 15 de noviembre [Vídeo], 2022. Disponible en: <https://www.youtube.com/watch?v=mhGg9HbeSro>
- [8] RUEDA, D., *Estudio de razones trigonométricas ajustado a las características particulares de estudiantes en décimo grado*. Tesis, Universidad Industrial de Santander, 2023.
- [9] JÁCOME, I., PARADA, S., & FIALLO, J., *Curricular proposal to address diversity in mathematics class: A design on sequences and patterns*. Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education. **20**(6) (2024):em2458.

4.39 Educación Económica y Financiera desde la Educación Matemática: Consolidando una línea de Investigación

Edwin Sneyder Serrano Rojas¹, Deiby Johan Mendez Delgado², Sandra Evelyn Parada Rico³

Resumen

En esta presentación se exhibe el proceso de consolidación de la línea de investigación en Educación Económica y Financiera (EEF) desarrollada por el grupo de investigación en Educación Matemática Edumat-UIS. Por ende, se presentan los resultados de los diferentes trabajos de investigación, tanto de pregrado como de maestría, realizados en el marco de este proceso. Además, se destacan los logros conseguidos durante el trabajo en esta línea, tales como las diferentes participaciones en eventos académicos nacionales e internacionales y consolidar el carácter internacional del encuentro de Educación Económica y Financiera desde la Educación Matemática realizado en la Universidad Industrial de Santander (UIS).

Palabras & frases claves: Educación Financiera, Educación Matemática

1. Introducción

Es innegable que la Economía y las Finanzas se encuentran presentes en diferentes aspectos de la vida cotidiana. Desde la elaboración de un presupuesto familiar o el establecimiento de metas de ahorro, hasta el análisis del mercado bursátil o la comprensión de las dinámicas de oferta y demanda, son múltiples las situaciones en las que los ciudadanos se ven involucrados en decisiones de tipo económico y financiero. En este sentido, la formación académica en estos aspectos constituye un papel importante para el desarrollo de la sociedad.

Al respecto, organismos como la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico (OCDE, 2005) y el Ministerio de Educación Nacional (MEN, 2022) establecen que la Educación Económica y Financiera es un proceso que busca promover el desarrollo de conocimientos y habilidades necesarias para tomar decisiones informadas, identificar riesgos y oportunidades financieras, mejorar el bienestar financiero y entender los fenómenos económicos que envuelven la sociedad.

Debido a esta necesidad de formación, en la Universidad Industrial de Santander ha surgido en los últimos años una línea de investigación que aborda la Educación Económica y Financiera desde diferentes perspectivas. Como resultado, se han publicado tres tesis de pregrado y dos de maestría, se han consolidado semilleros de investigación y se han desarrollado seminarios académicos. Por lo tanto, es importante compartir estos diferentes productos, destacando el aporte a la formación de profesores y a fortalecer la educación económica y financiera desde la educación matemática.

2. Revisión Documental

¹Universidad Industrial de Santander. Correo: edwinrojas0203@gmail.com

²Universidad Industrial de Santander. Correo: deibymendez28@gmail.com

³Universidad Industrial de Santander. Correo: sanevepa@uis.edu.co

Para esta presentación, se expondrán los diferentes trabajos desarrollados y publicados en la Universidad Industrial de Santander, que evidencian las diferentes perspectivas con las que se aborda la Educación Económica y Financiera. A la fecha se cuenta con tres trabajos de Pregrado y dos de Maestría publicados, además de dos trabajos de Maestría en desarrollo.

2.1. Sobre la Actividad Matemática y las Situaciones Financieras

Dentro de esta perspectiva se encuentra el trabajo expuesto por Alfonso (2024) titulado *Actividad Matemática posibilitada mediante el estudio de situaciones económicas y/o financieras en una población vulnerable* que tuvo como objetivo diseñar, implementar y valorar una secuencia de talleres para promover la actividad matemática de estudiantes en condición de vulnerabilidad. En esta investigación se desarrollaron nueve talleres que permiten contextualizar la enseñanza de la Matemática y con esto posibilitar la Formación en Educación Económica y Financiera.

2.2. Sobre las Conexiones

Otra perspectiva en esta línea de investigación surge en el estudio de las conexiones entre la Matemática y la Economía y Finanzas. En primer lugar, Rey (2025) plantea en la investigación titulada *Aprendizajes de profesores que reflexionan sobre las conexiones entre la Matemática, la Economía y las Finanzas* una descripción de los aprendizajes construidos por profesores de Matemáticas en formación que reflexionan sobre las conexiones entre la Matemática, la Economía y las finanzas para promover actividad matemática en el aula. En esta investigación se resalta el enfoque práctico, pues son los profesores en formación los que utilizan los contextos financieros y reflexionan sobre su uso.

Por otro lado, Serrano (2024) investiga las conexiones desde un enfoque curricular. En la investigación titulada *Conexiones entre la Matemática y la Economía: Análisis del plan de estudios de un programa de Economía*, el autor busca identificar conexiones entre la Matemática y la Economía, desde el análisis curricular del plan de estudios de Economía de la Universidad Industrial de Santander. Por ende, este trabajo indaga sobre las conexiones que se encuentran directamente en los diferentes documentos curriculares dentro de un programa de formación de Economistas.

2.3. Sobre las Aproximaciones y Creencias

Finalmente, se presentan las investigaciones que abordan el uso que le dan los profesores en ejercicio a los contextos financieros. En este sentido, Díaz y Rueda (2024), en el trabajo *Educación Financiera: aproximaciones prácticas de profesores de Matemáticas en servicio*, indagan sobre las aproximaciones que tienen los docentes a través del diseño y valoración de un formulario para identificar las aproximaciones prácticas de profesores de Matemáticas en ejercicio de Santander con temas relacionados a las finanzas. De allí se destaca que un gran porcentaje de profesores no conocen los materiales ni tienen formación en este campo, pero demuestran interés en adquirir conocimientos.

Por su parte, León y Suatena (2025) en el trabajo *Creencias de profesores de Santander sobre el uso de situaciones del contexto financiero en clase de Matemática*, diseñan un formulario con el que recolectan la información para identificar y describir las creencias que tienen los profesores de Matemáticas del Departamento de Santander sobre el uso de situaciones del contexto financiero en clase de Matemáticas. Se destaca que los profesores en servicio creen que el uso de contextos

financieros contribuye al desarrollo del pensamiento matemático, así como también resaltan que es un desafío, pues necesitan más preparación al respecto.

3. Primeros Resultados

La EEF es pertinente y necesaria, tal como lo han mencionado diferentes organismos (OCDE, MEN), y la importancia en la vida cotidiana justifican su inclusión sistemática en la formación escolar y docente. La UIS está consolidando una línea de investigación sostenida (3 pregrados, 2 maestrías publicadas y 2 en curso), además de un semillero de investigación y una actividad divulgativa tipo seminario; siendo un nicho activo y con proyección.

Se han podido evidenciar las conexiones Matemática - Economía/Finanzas en doble vía; por un lado la de la Didáctica (profesores en formación aprenden y reflexionan usando contextos financieros [Rey, 2025]) y por el otro, la Curricular (encontrando articulaciones identificables en planes de estudio de Economía [Serrano, 2024]).

Se reconoce la brecha en el profesorado en servicio: muchos docentes no tienen materiales ni formación específica, aunque manifiestan alto interés (Díaz y Rueda, 2024). Además, que las creencias de los profesores son favorables pero con obstáculos, esto porque los profesores creen que el contexto financiero sí desarrolla pensamiento matemático, pero perciben desafíos y necesidad de mayor preparación (León y Suatena, 2025). Por último, se proyectan oportunidades para la institucionalización, sentando bases para integrar la EEF en el currículo, las prácticas y la evaluación, no solo como iniciativas aisladas.

Referencias

- [1] ALFONSO, J. *Actividad matemática posibilitada mediante el estudio de situaciones económicas y/o financieras en una población vulnerable*. Tesis de Maestría. Universidad Industrial de Santander, 2024.
- [2] DÍAZ, J. Y RUEDA, C. *Educación Financiera: aproximaciones prácticas de profesores de Matemáticas en servicio*. Tesis de Pregrado, Universidad Industrial de Santander, 2025.
- [3] LEÓN, L. Y SUATERNA, A. *Creencias de profesores de Santander sobre el uso de situaciones del contexto financiero en clase de Matemática*. Tesis de Pregrado, Universidad Industrial de Santander, 2025.
- [4] MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACIONAL. (MEN). *Mi plan, mi vida y mi futuro. Orientaciones pedagógicas para la educación Económica y Financiera*. MEN, Bogotá, 2022.
- [5] ORGANIZACIÓN PARA LA COOPERACIÓN Y EL DESARROLLO ECONÓMICO. (OCDE). *Improving Financial Literacy. Analysis of Issues and Policies*. OECD Publishing, 2006.
- [6] REY, J. *Aprendizajes de profesores que reflexionan sobre las conexiones entre la Matemática, la Economía y las Finanzas*. Tesis de Maestría, Universidad Industrial de Santander, 2025.
- [7] SERRANO, E. *Conexiones entre la Matemática y la Economía: Análisis del plan de estudios de un programa de Economía*. Tesis de Pregrado, Universidad Industrial de Santander, 2024.

4.40 El silogismo de la inclusión: la demostración para el axioma de la diversidad

Víctor David Durán Rodríguez¹, Jenny Patricia Acevedo Rincón²

Resumen

Con el fin de atender la diversidad y promover una inclusión efectiva en educación superior, especialmente para estudiantes con discapacidad visual, se presenta el acompañamiento realizado a un estudiante del programa de Licenciatura en Matemáticas. A partir del análisis de la interacción estudiante-profesor, se identificaron diversas problemáticas presentes en el aula en una asignatura profesionalizante caracterizada por un alto componente visual y simbólico. La ponencia expone dichas problemáticas, así como recomendaciones y materiales que facilitan la adaptación del proceso de enseñanza y aprendizaje en el aula universitaria.

Palabras & frases claves: discapacidad visual, inclusión educativa, adaptaciones en el aula.

1. Introducción

La percepción sobre la dificultad de la asignatura Fundamentos de la Matemática es subjetiva y depende de las características individuales de cada estudiante. Mientras algunos cuentan con facilidades que potencian su aprendizaje, otros enfrentan barreras que obstaculizan su proceso formativo. Esta ponencia se centra en analizar dichas dificultades cuando se trata de estudiantes con discapacidad visual que cursan asignaturas con un fuerte componente visual y simbólico.

A partir de la experiencia de acompañamiento a un estudiante de primer semestre de la Licenciatura en Matemáticas con discapacidad visual, se describen diferentes situaciones problemáticas que emergen en el aula y se reflexiona sobre la necesidad de generar adaptaciones en tiempo real que favorezcan el aprendizaje significativo.

2. Sobre la ponencia

La presentación se organiza en varios apartados: el objetivo general del acompañamiento, la caracterización del estudiante, la identificación de problemáticas y la formulación de recomendaciones para futuras propuestas de aula. El análisis se enfoca en tres temáticas centrales de la asignatura Fundamentos de la Matemática: lógica y demostraciones, conjuntos y relaciones.

Asimismo, se presentan reflexiones finales sobre las adaptaciones implementadas durante el desarrollo de las clases, las cuales contribuyeron a mejorar la comprensión de los contenidos. Entre los materiales utilizados se destacan el *Código matemático unificado para Iberoamérica* del Consejo Iberoamericano del Braille, las notas de clase del profesor Uzcátegui, regletas para la escritura braille y una plantilla en fomi que permite la construcción de figuras en relieve perceptibles al tacto.

¹Estudiante, Universidad Industrial de Santander. Correo: victor2230142@correo.uis.edu.co

²Profesora, Escuela de Matemáticas, Universidad Industrial de Santander. Correo: jepaceri@uis.edu.co

Referencias

- [1] CONSEJO IBEROAMERICANO DEL BRAILLE. *Código matemático unificado para Iberoamérica* (2^a ed.). Grupo Social ONCE, 2024.
- [2] UZCÁTEGUI AYLWIN, C. *Fundamentos de la Matemática*. Universidad Industrial de Santander, 2019.

4.41 Enseñanza del álgebra avanzada: métodos y estructuras para la introducción de grupos

Johan Fernando Meneses García¹

Resumen

El trabajo titulado *Enseñanza del álgebra avanzada: métodos y estructuras para la introducción de grupos* plantea diversas estrategias pedagógicas orientadas a la mejora de la enseñanza de la teoría de grupos en la formación universitaria de estudiantes de matemáticas.

La investigación tiene como foco principal las necesidades previas y las dificultades de abstracción y comprensión que presentan los estudiantes frente a esta asignatura. En consecuencia, se proponen múltiples herramientas didácticas con el fin de fortalecer la enseñanza y el aprendizaje inicial de esta área.

El estudio se estructura a partir de dos pilares fundamentales: por un lado, el modelo de conocimiento especializado del profesor de matemáticas (MTSK), y por otro, las estructuras fundamentales de la teoría de grupos junto con sus conceptos y propiedades. A través de diversas estrategias, se busca incentivar un aprendizaje previo caracterizado por el rigor matemático y el formalismo, complementado con un enfoque más interactivo al momento de abordar la asignatura.

Palabras & frases claves: modelo de conocimiento especializado del profesor de matemáticas (MTSK), teoría de grupos.

1. Introducción

El álgebra moderna constituye un pilar fundamental en la formación matemática, ya que proporciona un marco conceptual para el estudio de diversas estructuras, tales como campos, anillos, ideales y, de manera central, la teoría de grupos. Esta investigación se enfoca particularmente en el papel que desempeña dicha estructura dentro de la formación universitaria.

La teoría de grupos permite el análisis de simetrías, transformaciones, isomorfismos y homomorfismos, así como el estudio de múltiples sistemas algebraicos que poseen estructura de grupo con operaciones específicas. No obstante, la enseñanza de estas estructuras suele presentar diversas dificultades asociadas al alto grado de abstracción y exigencia formal que caracteriza a esta disciplina.

Asimismo, la falta de articulación con los presaberes necesarios genera en los estudiantes una percepción negativa frente al estudio del álgebra moderna, dificultando la comprensión de conceptos fundamentales. Ante esta problemática, se proponen diversos enfoques pedagógicos que buscan fortalecer tanto el conocimiento del docente como las estrategias de aprendizaje del estudiante.

En este contexto, se adopta el modelo de conocimiento especializado del profesor de matemáticas (MTSK) como eje central de la investigación, con el propósito de mejorar la toma de decisiones didácticas y facilitar la comprensión de conceptos, definiciones, axiomas y teoremas propios de la teoría de grupos.

¹Estudiante, Universidad Industrial de Santander. Correo: Johan2221988@correo.uis.edu.co

2. Conceptos claves en teoría de grupos

En esta sección se presenta la definición formal de grupo junto con las propiedades que caracterizan a estas estructuras algebraicas: cerradura, existencia del elemento neutro, asociatividad e inversos. Además, se plantea una estructura didáctica que facilite la comprensión de demostraciones, con el objetivo de identificar cuándo un conjunto dotado de una operación cumple con la estructura de grupo.

De manera progresiva, se introducen estrategias para abordar estructuras más complejas como las permutaciones, los grupos cíclicos y los isomorfismos, promoviendo una comprensión profunda de las propiedades fundamentales que los grupos presentan.

3. Modelo del conocimiento especializado para la enseñanza de las estructuras

Para el presente estudio se considera el modelo de conocimiento especializado del profesor de matemáticas (MTSK, por sus siglas en inglés), el cual se fundamenta en dos subdominios principales: el pedagógico y el didáctico, aplicados a la enseñanza de las matemáticas.

Este modelo permite identificar los conocimientos que debe dominar un docente, así como la importancia de articular la teoría matemática con herramientas pedagógicas que faciliten la construcción del conocimiento. Además, orienta la formulación de estrategias de enseñanza y aprendizaje del álgebra moderna en educación superior.

Se resalta la necesidad de complementar el rigor matemático con recursos didácticos como representaciones visuales, recursos gráficos y el uso de software educativo, con el fin de hacer más accesible el aprendizaje sin perder formalismo.

La investigación adopta un enfoque cualitativo, siguiendo a Hernández Sampieri, Fernández Collado y Baptista Lucio (2014), con el objetivo de comprender el fenómeno de la enseñanza del álgebra a partir del diseño de estrategias que puedan incorporarse en libros de texto para la formación de profesores de matemáticas.

Referencias

- [1] BATANERO, C. Y GODINO, J. D. *¿Qué debe conocer un profesor de matemáticas?* La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española, **20** (2017):285–306.
- [2] MARTÍNEZ BUELVAS, F. *El papel de la teoría de grupos en la enseñanza y aprendizaje de la matemática*. Paideia Surcolombiana, **26** (2021):26–32.
- [3] HERNÁNDEZ SAMPIERI, R., FERNÁNDEZ COLLADO, C. Y BAPTISTA LUCIO, P. *Metodología de la investigación* (6^a ed.). McGraw-Hill Education, 2014.
- [4] CASTRO PUCHE, R. *Álgebra moderna e introducción al álgebra geométrica*. Ecoe Ediciones, 2013.
- [5] HERSTEIN, I. N. *Álgebra moderna: grupos, anillos, campos, teoría de Galois*. Trillas, 1970.

4.42 Entre el saber matemático y el saber enseñar: El conocimiento especializado en Cálculo Diferencial

Diego Alonso Santiago Villar¹, Johan Smith Salazar Giraldo², Ana María Rodríguez Capera³

Resumen

El presente seminario de investigación se desarrolla bajo la estructura del Seminario Alemán, modelo que privilegia la construcción colectiva del conocimiento, el análisis crítico de referentes teóricos y la reflexión profunda sobre las prácticas formativas de los docentes. En este sentido, el trabajo adopta un enfoque cualitativo, orientado a comprender, describir y clasificar los saberes que poseen los docentes en formación, delimitando un contexto académico específico y una temática central.

El objetivo principal es caracterizar el conocimiento especializado de los futuros profesores de la Universidad Industrial de Santander en relación con la enseñanza del Cálculo Diferencial, a partir del marco teórico del *Mathematics Teacher's Specialised Knowledge* (MTSK). Siguiendo a Carrillo et al. (2018), este modelo permite desglosar y evaluar los distintos dominios del conocimiento matemático y didáctico necesarios para la enseñanza disciplinar.

Para ello, se diseña un instrumento de carácter diagnóstico y formativo, compuesto por ítems estructurados a partir de situaciones problema auténticas centradas en los conceptos de función, límite y derivada. Cada ítem incorpora una propuesta de resolución y un análisis de distractores, con el fin de identificar errores frecuentes, dificultades conceptuales y vacíos en el razonamiento didáctico. Asimismo, se integran cápsulas de aprendizaje orientadas a atender las falencias detectadas, promoviendo procesos de reflexión y reconstrucción del conocimiento. De este modo, el seminario contribuye al fortalecimiento de la identidad profesional docente y al desarrollo de prácticas pedagógicas fundamentadas en la enseñanza del Cálculo Diferencial.

Palabras & frases claves: Cálculo Diferencial, Conocimiento Especializado.

Referencias

- [1] CARRILLO, J., CLIMENT, N., MONTES, M., CONTRERAS, L. C., FLORES, E., ESCUDERO, D., VASCO, D., ROJAS, N., FLORES, P., AGUILAR, A., RIBEIRO, M. Y MUÑOZ, M. C. *The mathematics teacher's specialized knowledge (MTSK) model*. Research in Mathematics Education, **20**(3) (2018):236–253. <https://doi.org/10.1080/14794802.2018.1479981>

¹Universidad Industrial de Santander. Correo: diego2211631@correo.uis.edu.co

²Universidad Industrial de Santander. Correo: johan2211517@correo.uis.edu.co

³Universidad Industrial de Santander. Correo: anamaria2192699@correo.uis.edu.co

4.43 Estrategias inclusivas para la enseñanza de matemáticas a estudiantes con discapacidad visual

Karla Gabrielle Molina Mayorga¹, Brenda Juliana Ávila Varela², Jenny Patricia Acevedo Rincón³

Resumen

Esta comunicación describe el acompañamiento a un estudiante con discapacidad visual en su proceso de aprendizaje de las matemáticas en el programa de Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Industrial de Santander. El acompañamiento se fundamenta en los principios del Diseño Universal para el Aprendizaje (DUA), mediante el diseño de materiales táctiles y apoyos auditivos que facilitan la comprensión de conceptos matemáticos. Los resultados evidencian mejoras en la autonomía académica y en el razonamiento lógico del estudiante, resaltando la necesidad de entornos inclusivos y de una formación docente sensible a la diversidad.

Palabras & frases claves: educación matemática inclusiva, discapacidad visual, Diseño Universal para el Aprendizaje.

1. Introducción

Atender la diversidad en el aula de matemáticas representa un reto significativo, especialmente en contextos universitarios donde los contenidos gráficos tienen un papel central. Esta ponencia expone el proceso de acompañamiento a un estudiante con discapacidad visual en los cursos de Fundamentos de Matemáticas y Geometría Euclidiana.

El objetivo principal fue diseñar un acompañamiento asertivo que garantizara el acceso equitativo a los contenidos matemáticos, promoviendo la comprensión de conceptos abstractos y geométricos. Las estrategias implementadas se fundamentan en los principios del DUA y en la mediación pedagógica propuesta por Vygotsky.

2. Estrategias adaptadas a la individualidad

El estudiante presenta una adecuada comprensión lógica, pero enfrenta dificultades asociadas a la memorización de secuencias extensas de información, la sobrecarga auditiva y la ausencia de herramientas accesibles para verificar procedimientos. Estas barreras no se relacionan con sus capacidades cognitivas, sino con el formato visual tradicional de presentación de las matemáticas.

2.1. Estrategias implementadas

Las estrategias combinan descripciones verbales precisas, materiales manipulativos y simulaciones físicas. Entre los recursos utilizados se incluyen palillos para representar símbolos lógicos, papel en

¹Estudiante, Universidad Industrial de Santander. Correo: karla2231934@correo.uis.edu.co

²Estudiante, Universidad Industrial de Santander. Correo: brenda2201810@correo.uis.edu.co

³Profesora, Escuela de Matemáticas, Universidad Industrial de Santander. Correo: jepaceri@uis.edu.co

relieve para construcciones geométricas, plastilina para descomposición de áreas, figuras de cartón, una regleta braille y teclado físico.

Las actividades promovieron la exploración táctil, la construcción de polígonos en relieve, la representación de conjuntos con objetos reales y demostraciones guiadas, favoreciendo el razonamiento autónomo.

2.2. Resultados

El acompañamiento evidenció un incremento en la autonomía académica del estudiante, quien logró desarrollar evaluaciones y actividades minimizando los obstáculos de aprendizaje. Asimismo, se observó un fortalecimiento del razonamiento lógico y mejoras en habilidades blandas como la regulación emocional y la participación activa.

2.3. Análisis y discusión

La experiencia demuestra que las dificultades no radican en la discapacidad visual, sino en la falta de accesibilidad de los materiales utilizados en la formación matemática. La adaptación de los medios de representación reduce significativamente las barreras y promueve prácticas inclusivas que enriquecen la enseñanza para todos los estudiantes.

Referencias

- [1] CAST, *Directrices de Diseño Universal para el Aprendizaje*. CAST, 2024.
- [2] OCAMPO, D. P., ROLDÁN, J. P., & MORENO, L. M., *Educación inclusiva y pedagogías críticas*, 2017.
- [3] UNESCO, *A Guide for Ensuring Inclusion and Equity in Education*. UNESCO, 2017.
- [4] VYGOTSKY, L. S., *La mente en la sociedad*. Harvard University Press, 1978.

4.44 Estudio Comparativo del Desarrollo de Competencias Matemáticas en la Transición de la Educación Media a la Educación Superior: Estudio de Caso UMNG

Isnardo Arenas¹, Eliseo Gallo, Luz Valdiri

Resumen

Se presenta el análisis de pruebas diagnósticas aplicadas a estudiantes de nuevo ingreso en los semestres I y II de 2025, evaluando tres competencias: Interpretación y Representación, Formulación y Ejecución, e Interpretación y Argumentación de Resultados. Los resultados muestran diferencias entre programas de pregrado, con avances notables en Formulación y Ejecución en ingeniería, y mayores retos en la Argumentación de Resultados en ciencias sociales y administrativas, lo que evidencia la necesidad de estrategias de acompañamiento diferenciadas. El estudio confirma la utilidad de estas pruebas como herramienta diagnóstica para fortalecer la permanencia y consolidar el desarrollo de competencias matemáticas en la UMNG.

Palabras & frases claves: Diagnóstico, transición, competencias, acompañamiento.

1. Introducción

Las cuerdas o lazos están compuestas por dos partes: la camisa, funda o coraza (parte externa) y el alma (parte interna). La funda se puede concebir como reconocimiento social que la Universidad Militar Nueva Granada proyecta a la comunidad académica y su entorno social en el país y en el mundo; el alma se plasma como el espíritu neogranadino que caracteriza a cada uno de los miembros que la constituyen. Cada uno de los hilos representa las estrategias que la universidad brinda a los estudiantes para desarrollar los conocimientos y habilidades propios de su programa académico.

Lazos UMNG es una estrategia de acompañamiento académico que tiene como propósito garantizar la permanencia y graduación de los estudiantes de pregrado, articulando los diferentes programas de acompañamiento institucional.

En el marco del proyecto Lazos se desarrolló una prueba de ingreso en el área de matemáticas para estudiantes de primeros semestres, con el fin de realizar un análisis integral y comparativo de las competencias matemáticas que trascienda una evaluación cuantitativa y permita evidenciar el trayecto epistemológico de los estudiantes (Sfard, 1991).

La prueba evalúa tres competencias combinadas: interpretación y representación, formulación y ejecución, e interpretación y argumentación de resultados, articuladas en las áreas de Estadística, Geometría y Álgebra-Cálculo. Este enfoque responde a estudios que resaltan la importancia de integrar comprensión teórica y aplicación práctica (Polya, 1957; Schoenfeld, 1992).

¹Universidad Militar Nueva Granada. Correo: isnardo.arenas@unimilitar.edu.co

2. Justificación Epistemológica y Pedagógica

La metodología reconoce que la prueba no es un fin en sí mismo, sino un medio para visibilizar trayectorias epistemológicas de los estudiantes (Sfard, 1991). El análisis integral, cuantitativo y cualitativo, permite identificar cómo los estudiantes comprenden, representan y aplican las matemáticas en diversos contextos, alineándose con el espíritu del proyecto Lazos como herramienta de inclusión y permanencia académica.

3. Metodología

La metodología se desarrolla en varias etapas. En primer lugar, se diseñan los ítems de acuerdo con las competencias y áreas definidas, seguidos de un proceso de revisión y validación por docentes expertos. Posteriormente, se realiza una prueba piloto con estudiantes de primeros semestres para identificar dificultades de comprensión y ajustar los ítems.

La aplicación general se realiza mediante la plataforma institucional WebWork, garantizando condiciones estandarizadas. El procesamiento de datos incluye análisis cuantitativos por competencia y área, comparaciones entre programas y modalidades, y estudios de dispersión y percentiles. Finalmente, se elaboran informes de retroalimentación que permiten proponer intervenciones como tutorías, talleres y recursos virtuales especializados, así como un seguimiento longitudinal para evaluar el impacto de las estrategias implementadas.

Referencias

- [1] Sfard, A. *On the dual nature of mathematical conceptions and its implications for teaching and learning mathematics*. Educational Studies in Mathematics, **22**(1) (1991):1–36.
- [2] Polya, G. *How to Solve It: A New Aspect of Mathematical Method*. Princeton University Press, 1957.
- [3] Reitz, L. *Getting Started with WeBWorK*. OpenLab, 2013.
- [4] Schoenfeld, A. H. *Learning to Think Mathematically*. Journal of Education, **196**(2) (2016):1–38.

4.45 Formación docente inicial y diversidad en la enseñanza de las matemáticas

César Reina

Resumen

El presente trabajo de grado analiza la formación inicial de futuros profesores de Matemáticas desde la perspectiva de la inclusión y la atención a la diversidad; a través de la implementación de la metodología del Estudio de Clases (Lesson Study). La investigación surge de la identificación de vacíos en las prácticas educativas en Colombia, donde las estrategias pedagógicas muchas veces no responden a las capacidades reales de los estudiantes, generando experiencias de exclusión. Para abordar este problema, se desarrolla una práctica docente en el marco de la Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Industrial de Santander, con el objetivo de reflexionar sobre el papel del Lesson Study en la construcción de propuestas inclusivas en la enseñanza de las matemáticas escolares. El trabajo presenta antecedentes teóricos y experiencias internacionales y nacionales sobre el Estudio de Clases, así como el marco legal que respalda la educación inclusiva en Colombia. Los resultados muestran que esta metodología favorece la reflexión pedagógica, la colaboración entre pares y la proyección de estrategias didácticas que reconocen la diversidad en el aula. Surgen reflexiones sobre el Estudio de Clases como una herramienta valiosa para vincular la formación docente con prácticas inclusivas, fortaleciendo tanto el conocimiento disciplinar como las competencias pedagógicas necesarias para responder a los retos de la educación matemática en contextos diversos.

Palabras clave: Inclusión, atención a la diversidad, formación docente, educación matemática, Lesson Study.

4.46 La enseñanza de las matemáticas en la era de las emociones, resiliencia, modelaje docente y formación integral

José Luis Manrique Medrano¹

Resumen

Esta ponencia explora el papel de las emociones y los valores en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en contextos escolares actuales. A partir de la observación de dinámicas en el aula, se propone que las matemáticas no solo constituyen un campo cognitivo, sino también un espacio donde emergen emociones intensas como la frustración, la satisfacción y la resiliencia. Se analiza cómo los estudiantes suelen manifestar actitudes de desinterés o conductas disruptivas como mecanismos de defensa frente a falencias conceptuales previas, lo que evidencia la necesidad de un docente capaz de comprender, acompañar y transformar dichas experiencias en oportunidades de crecimiento.

La ponencia plantea que el rol del profesor de matemáticas trasciende el dominio técnico y se convierte en un modelaje formativo que integra valores como la perseverancia, la responsabilidad y la pasión por el conocimiento. Se discute cómo los retos matemáticos fortalecen a los estudiantes como seres humanos capaces de enfrentar dificultades, destacando la resiliencia como un factor clave en su desarrollo. Finalmente, se propone un marco para resignificar la matemática como un lenguaje no solo de números, sino de emociones, logros y florecimiento personal.

Palabras & frases claves: Educación matemática, emociones, resiliencia.

1. Introducción

Durante gran parte del siglo XX, la enseñanza de las matemáticas estuvo vinculada casi exclusivamente a la transmisión de algoritmos, fórmulas y procedimientos. En este enfoque tradicional, el estudiante era visto como un receptor pasivo de información y el docente como transmisor de conocimiento. Sin embargo, en el aula contemporánea emerge con fuerza una dimensión antes poco considerada: las emociones.

Estudiar matemáticas no es únicamente una actividad intelectual, sino también un proceso emocional. Resolver un problema complejo puede generar ansiedad o frustración, pero también satisfacción y orgullo cuando se logra la solución. Las matemáticas ponen al estudiante frente a desafíos permanentes que exigen esfuerzo, paciencia y constancia, convirtiéndose en un espacio privilegiado para el desarrollo de valores y habilidades socioemocionales.

En este contexto, comprender el papel de las emociones resulta fundamental. Conductas como el desinterés o la interrupción frecuente suelen ser mecanismos de defensa ante vacíos conceptuales previos. Estas manifestaciones deben ser interpretadas como señales que invitan al docente a actuar con sensibilidad pedagógica y a replantear su rol como formador integral.

2. Matemática y emociones en el aula

¹. Correo: jose.manrique@sekcolombia.com

Las emociones no constituyen un obstáculo para el aprendizaje matemático, sino una parte esencial del mismo. Diversos estudios evidencian que la ansiedad matemática afecta significativamente el desempeño de los estudiantes, generando bloqueos cognitivos. Por el contrario, emociones positivas como la curiosidad y la satisfacción fortalecen la motivación intrínseca y favorecen procesos de pensamiento complejo.

En la práctica cotidiana del aula, los estudiantes experimentan emociones como la frustración ante la dificultad inicial, la resiliencia al persistir, la satisfacción al resolver un problema y el orgullo al reconocer sus avances. De este modo, la matemática se convierte en un escenario de entrenamiento emocional, análogo a los desafíos que se presentan en la vida cotidiana.

Asimismo, las matemáticas promueven valores fundamentales. La precisión fomenta la responsabilidad y la honestidad intelectual; la argumentación fortalece el pensamiento crítico; y la búsqueda de soluciones alternativas estimula la creatividad, mostrando que la matemática es también un espacio de invención.

3. El rol docente como modelaje formativo

Aceptar que las matemáticas movilizan emociones profundas implica reconocer un rol docente ampliado. No basta con dominar el contenido disciplinar; es necesario comprender y gestionar las experiencias emocionales de los estudiantes. El profesor modela resiliencia al enfrentar la dificultad, perseverancia al insistir en la solución y humildad al reconocer errores.

El aula de matemáticas se transforma así en un espacio de formación integral, donde se desarrollan simultáneamente competencias cognitivas y socioemocionales. Diseñar experiencias diferenciadas, brindar acompañamiento oportuno y validar los logros personales fortalece la confianza del estudiante y resignifica la matemática como una oportunidad de crecimiento humano.

4. Conclusiones

La enseñanza de las matemáticas en la era de las emociones exige un replanteamiento profundo de los roles tradicionales en el aula. Reconocer la carga emocional presente en cada problema matemático transforma la comprensión del aprendizaje y revela la matemática como un espacio humano de construcción de resiliencia, responsabilidad y satisfacción personal.

El rol del docente resulta decisivo: a través de su modelaje, guía y acompañamiento, facilita que los estudiantes enfrenten la frustración, celebren sus logros y descubran la pasión por el pensamiento matemático. Integrar el conocimiento técnico con el desarrollo socioemocional es un desafío ineludible para la educación matemática contemporánea.

Referencias

- [1] BISHOP, A. *Mathematics Education and Values*. Springer, 2008.
- [2] HANNULA, M. *Attitudes, Emotions, and Beliefs in Mathematics Education*. ICME-13 Monographs, 2019.

- [3] SKOVSMOSE, O. *Critical Mathematics Education: Theory, Praxis and Reality*. Springer, 2014.
- [4] MARTÍNEZ, L. *Resiliencia y aprendizaje matemático en contextos escolares*. Revista Colombiana de Educación Matemática, **54**(2) (2020):45–62.
- [5] GÓMEZ, P. Y ROJAS, J. *Emociones y actitudes en la enseñanza de las matemáticas: una revisión*. Educación Matemática en Iberoamérica, **37**(1) (2021):23–40.

4.47 Más allá de la respuesta correcta: La demanda cognitiva de tareas de razonamiento matemático en ‘Evaluar para Avanzar’

Yeimi Yurena Alfonso¹, Anyi Marbella Nuñez²

Resumen

La presente investigación aborda la problemática de la desconexión entre los instrumentos de evaluación estandarizada y las prácticas pedagógicas en el aula. Aunque las pruebas estandarizadas *Evaluar para Avanzar* se han establecido con un propósito formativo, se identifica una brecha crítica que compromete la coherencia del proceso educativo.

Con el objetivo de analizar la demanda cognitiva de las tareas del proceso de razonamiento presentes en los cuadernillos de Matemáticas de cuarto y quinto grado de Educación Básica Primaria, este estudio busca relacionar las exigencias de este sistema de evaluación con las prácticas de evaluación escolar. A través de un análisis cualitativo de las tareas propuestas en la prueba, se explora si los enunciados promueven una comprensión profunda y un pensamiento de alto nivel, o si, por el contrario, se centran en tareas de baja demanda cognitiva, lo que podría afectar negativamente el desarrollo del razonamiento matemático.

Los hallazgos de esta investigación son fundamentales para determinar si la prueba cumple con su objetivo formativo y si fomenta un pensamiento que enriquece el aprendizaje matemático.

Palabras & frases claves: Demanda cognitiva, evaluación, razonamiento matemático.

1. Introducción

En el contexto educativo actual, se considera que la evaluación en el aula debe reflejar de manera directa la práctica pedagógica, con el propósito de medir la comprensión profunda y el razonamiento de los estudiantes. Sin embargo, se presenta una problemática crítica: la frecuente desconexión entre lo que se evalúa a través de pruebas externas y lo que ocurre en el contexto del aula.

Las pruebas estandarizadas *Evaluar para Avanzar*, según el ICFES (2020), se han establecido como herramientas fundamentales con un propósito formativo, orientadas a fortalecer los procesos de aprendizaje mediante el reconocimiento de los ritmos y estilos de los estudiantes. No obstante, persiste una brecha que compromete la coherencia del proceso de evaluación.

Este estudio tiene como objetivo analizar la demanda cognitiva de las tareas matemáticas del proceso de razonamiento presentes en los cuadernillos de Matemáticas de cuarto y quinto grado de Educación Básica Primaria, con el fin de relacionar las exigencias del sistema de evaluación estandarizado con las prácticas de evaluación escolar.

2. Marco Referencial

¹Universidad Industrial de Santander. Correo: yeimi2220638@correo.uis.edu.co

²Universidad Industrial de Santander. Correo: anyi2220644@correo.uis.edu.co

De acuerdo con el modelo propuesto por Smith y Stein (1998), la demanda cognitiva de una tarea matemática se define por el tipo de pensamiento que la tarea requiere de los estudiantes. Los autores distinguen cuatro niveles que permiten evaluar el esfuerzo mental que implica la resolución de problemas, actividades o ejercicios.

En este contexto, un procedimiento se entiende como cualquier secuencia de pasos que se sigue de forma rutinaria y mecánica para obtener un resultado.

Nivel	Características
Memorización	Reproducción de hechos, reglas o definiciones. No requiere razonamiento ni conexión conceptual profunda.
Procedimientos sin conexiones	El procedimiento es rutinario y explícito. La meta es la respuesta correcta, sin justificación conceptual.
Procedimientos con conexiones	Requiere explicar y justificar procedimientos, estableciendo conexiones con propiedades matemáticas.
Hacer matemáticas	Implica analizar, comparar y argumentar estrategias en contextos nuevos y complejos, sin algoritmos sugeridos.

Cuadro 1: Análisis teórico de la demanda cognitiva del problema

Se entiende por tarea matemática toda situación de aprendizaje propuesta por el docente como detonante de la actividad matemática del estudiante, conformada por una secuencia de momentos didácticos que incluyen la planificación, los procesos comunicativos y la resolución (Williner y Favieri, 2023).

Diversos estudios han aplicado el modelo de demanda cognitiva para analizar el tipo de razonamiento que desarrollan los estudiantes. Doyle (1988) concluye que el predominio de tareas familiares puede priorizar la eficiencia operativa sobre la comprensión profunda. Asimismo, investigaciones recientes evidencian que un mismo enunciado puede resolverse en distintos niveles de demanda cognitiva, lo cual resulta útil para caracterizar el razonamiento matemático de los estudiantes (Contreras, Jaime y Gutiérrez, 2023).

3. El problema del juego de mesa

La Figura 1 presenta un problema dirigido a estudiantes de quinto grado que se clasifica dentro del proceso de razonamiento matemático. El enunciado propone una situación que puede resolverse mediante distintas estrategias, permitiendo abordajes en diferentes niveles de demanda cognitiva.

Figura 1. Ejemplo de problema de razonamiento

Nota: Tomado de los Cuadernillos Evaluar para Avanzar 2020 – Matemáticas, Cuadernillo 1 (Saber 5°).

El problema plantea una situación en la que dos jugadoras, Sofía y Verónica, obtienen puntajes diferentes en dos rondas de un juego de mesa. A partir de estos datos, se solicita identificar la propiedad matemática que garantiza que la suma total de puntos de ambas sea igual.

La resolución implica identificar los puntajes obtenidos por cada jugadora y reconocer que las sumas $500 + 350$ y $350 + 500$ son equivalentes. En consecuencia, la igualdad de resultados se explica mediante la propiedad conmutativa de la suma.

De acuerdo con la clasificación de la Tabla 1, la tarea se ubica en el nivel de *Procedimientos con conexiones*, ya que exige justificar una propiedad matemática y establecer una relación conceptual más allá de la ejecución de una operación aritmética.

4. Reflexiones iniciales

Resulta fundamental analizar el proceso de razonamiento que emplean los estudiantes de cuarto y quinto grado para resolver tareas con distintos niveles de demanda cognitiva. El razonamiento no es solo un medio para alcanzar una respuesta, sino el eje central del aprendizaje matemático.

Si las tareas propuestas en los cuadernillos se concentran mayoritariamente en niveles bajos de demanda cognitiva, el desarrollo del razonamiento matemático puede verse limitado, lo que contraviene el objetivo de una evaluación formativa. Por ello, la distribución y el desafío cognitivo de las tareas constituyen un criterio clave para determinar si la prueba *Evaluar para Avanzar* cumple efectivamente su propósito educativo.

Referencias

- [1] CONTRERAS, D. A., JAIME, A., GUTIÉRREZ, Á., *El modelo de demanda cognitiva para identificar estudiantes con alta capacidad matemática*. En: JIMÉNEZ-GESTAL, C. ET AL. (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVI*, pp. 211–218. SEIEM, 2023.
- [2] DOYLE, W., *Work in Mathematics Classes: The Context of Students' Thinking During Instruction*. *Educational Psychologist*, **23**(2) (1988):167–180.
- [3] SMITH, M. S. & STEIN, M. K., *Selecting and creating mathematical tasks: from research to practice*. *Mathematics Teaching in the Middle School*, **3**(5) (1998):344–350.
- [4] GÓMEZ, M. C., MÁRQUEZ, S. & PARRA, L. *Evaluar para Avanzar: resultados intermedios de una estrategia de evaluación formativa*. Documentos de Trabajo Saber Investigar No. 5. ICFES, 2023.

4.48 Medidas de Tendencia Central: Una IAP en Educación Básica Primaria

Lizeth Dayana Sánchez Sarmiento¹

Resumen

El presente informe establece una ruta de acción óptima para la enseñanza de las Medidas de Tendencia Central en estudiantes de quinto grado de Educación Básica Primaria, a partir de una Investigación Acción Participativa que permita evaluar el conocimiento sobre estos conceptos estadísticos. Esto surge de la necesidad de construir una alfabetización estadística desde edades tempranas que permita discriminar la información y de las normativas educativas que resaltan la relevancia de abordar estos conceptos en el aula. Puesto que, en la actualidad, debido a la globalización y las nuevas tecnologías, ha aumentado el acceso a información de distinta credibilidad desde edades tempranas.

Por ello, el trabajo cuenta con una aproximación teórica al tema de estudio y a la Investigación Acción Participativa como metodología para mejorar el proceso de enseñanza–aprendizaje de los estudiantes. Puesto que permite evidenciar las dificultades y fortalezas de los estudiantes en torno a las Medidas de Tendencia Central, así como las falencias al implementar las secuencias diseñadas, con la finalidad de ajustarlas para optimizar y mejorar su aplicación. Todo esto mientras se siguen los aspectos legales pertinentes, basados en los principios éticos del Informe Belmont.

En consecuencia, se cuestiona la incorporación de la Investigación Acción Participativa en la educación matemática con el fin de propiciar la mejora del proceso de enseñanza–aprendizaje de otros conceptos matemáticos.

Palabras & frases claves: Enseñanza Estadística, Medidas de Tendencia Central, Educación Básica Primaria, Investigación Acción Participativa.

1. Introducción

La enseñanza de la estadística en la Educación Básica Primaria representa un desafío fundamental en la formación de ciudadanos críticos capaces de analizar la información que reciben cotidianamente. En este contexto, las Medidas de Tendencia Central constituyen un eje esencial para la comprensión de datos y la toma de decisiones informadas desde edades tempranas.

La Investigación Acción Participativa se presenta como una metodología adecuada para intervenir en el aula, dado que permite reflexionar sobre la práctica docente, identificar dificultades de aprendizaje y ajustar las estrategias didácticas con base en la participación activa de los estudiantes. De esta manera, se busca mejorar el proceso de enseñanza–aprendizaje de las Medidas de Tendencia Central y fortalecer la alfabetización estadística en la educación primaria.

¹Universidad Industrial de Santander. Correo: lizeth2202869@correo.uis.edu.co

Referencias

- [1] NATIONAL COMMISSION FOR THE PROTECTION OF HUMAN SUBJECTS OF BIOMEDICAL AND BEHAVIORAL RESEARCH. *The Belmont Report*. Washington, D.C., 1979.

4.49 Modelar para Comprender: Una Experiencia de Aula sobre la Ley de Enfriamiento de Newton con Apoyo de TIC

Carlos Andrés Guevara Reyes¹, Doris Evila González Rojas²

Resumen

La propuesta didáctica presentada busca mejorar la enseñanza de las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias Lineales de Primer Orden (EDOLPO) mediante la integración del Aprendizaje Basado en Problemas (ABP) y las Tecnologías de la Información y la Comunicación (TIC), en coherencia con el modelo pedagógico UIS21. A través de actividades como la denominada “Enfriando Chocolate: Laboratorio en Casa”, se promueve un aprendizaje activo y contextualizado, donde los estudiantes observan, registran y modelan el proceso de enfriamiento de un cuerpo aplicando la Ley de Enfriamiento de Newton. El uso de herramientas digitales como GeoGebra y el Aula Moodle favorece la exploración, la representación y el análisis de datos reales, permitiendo establecer relaciones entre teoría y práctica. Los resultados evidencian una mejora en la comprensión conceptual, la motivación y la capacidad de los estudiantes para interpretar fenómenos “simples” desde una perspectiva matemática, fortaleciendo su pensamiento crítico, reflexivo y autónomo.

Palabras & frases claves: EDOLPO, Aprendizaje Basado en Problemas, GeoGebra.

1. Introducción

La enseñanza de las ecuaciones diferenciales ordinarias lineales de primer orden (EDOLPO) en el contexto universitario representa un desafío pedagógico constante. Aunque estas ecuaciones permiten modelar fenómenos reales como el crecimiento, el decaimiento o el enfriamiento de un cuerpo, su enseñanza suele desarrollarse bajo enfoques tradicionales centrados en la repetición de algoritmos, lo que limita la comprensión conceptual y la conexión con contextos reales. Esta situación ha generado bajos niveles de motivación, dificultades en la interpretación de resultados y una desconexión entre el aprendizaje matemático y la práctica profesional. En este contexto, surge la necesidad de replantear las estrategias didácticas, orientándolas hacia metodologías activas que promuevan la reflexión, la colaboración y el uso de herramientas tecnológicas para fortalecer el pensamiento matemático y la autonomía estudiantil (Mejía et al., 2025; Bonilla, 2021).

2. Desarrollo

La propuesta parte de la hipótesis de que la integración del ABP, junto con el uso de las TIC como GeoGebra y el Aula Moodle de la UIS, puede potenciar la comprensión conceptual y la aplicación práctica de las EDOLPO. Este enfoque se alinea con el modelo pedagógico UIS21, centrado en la formación integral y el desarrollo de competencias reflexivas, creativas y colaborativas. En coherencia con el constructivismo, el ABP sitúa al estudiante como protagonista del aprendizaje, al promover la resolución de problemas contextualizados y la reflexión metacognitiva, mientras que

¹Universidad Industrial de Santander. Correo: carlos2211353@correo.uis.edu.co

²Universidad Industrial de Santander. Correo: dorisgon@uis.edu.co

las TIC facilitan la modelación, la experimentación, la representación gráfica y el aprendizaje autónomo. La combinación de estos elementos busca transformar el aula en un espacio dinámico donde el conocimiento matemático se construya a partir de la indagación y la interacción (Mantilla et al., 2025; UIS, 2021; Vera et al., 2021).

Desde el punto de vista teórico, la articulación del ABP con estrategias que fortalecen la comprensión y el pensamiento matemático, tales como la modelación, la resolución de problemas, la metacognición y el aprendizaje colaborativo, fortalece el desarrollo de un pensamiento matemático abstracto, crítico y reflexivo. La modelación matemática permite conectar la teoría con la realidad, al representar fenómenos y analizar su comportamiento desde una perspectiva cuantitativa y cualitativa; la resolución de problemas, inspirada en el enfoque de Pólya, favorece procesos de razonamiento lógico y creativo; la metacognición promueve la reflexión sobre las propias estrategias de aprendizaje; y el trabajo colaborativo potencia la construcción colectiva del conocimiento. En conjunto, estos elementos configuran un marco metodológico que busca superar la enseñanza tradicional centrada en la repetición de algoritmos, para dar paso a un aprendizaje significativo y contextualizado, en el que los estudiantes comprendan las EDOLPO como herramientas para interpretar, explicar y transformar situaciones reales (Ortiz, 2022; Benítez-Vargas, 2023).

2.1. Objetivos

Objetivo general. Favorecer la comprensión conceptual de las ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden, a partir de la experimentación con problemáticas reales y el uso de herramientas digitales como GeoGebra, mediante la actividad “Enfriando Chocolate: Laboratorio en Casa”, que integra los procesos de observación, modelación y análisis de resultados según la Ley de Enfriamiento de Newton.

Objetivos específicos.

- Diseñar y desarrollar una experiencia de la vida real que permita a los estudiantes recopilar datos reales sobre el enfriamiento de un cuerpo, identificando relaciones entre las variables tiempo y temperatura.
- Guiar el tránsito del experimento a la teoría, mediante la formulación, resolución y análisis de la ecuación diferencial que modela el fenómeno, promoviendo la reflexión sobre el significado de los parámetros del modelo.
- Contrastar los resultados experimentales y teóricos, interpretando diferencias y semejanzas, y valorando el papel de las matemáticas y las TIC en la comprensión de problemáticas reales.

2.2. Aspectos metodológicos

La propuesta se enmarca en un enfoque cualitativo, descriptivo y aplicado, orientado al diseño, implementación y validación de una experiencia didáctica contextualizada en el curso de Ecuaciones Diferenciales de la Universidad Industrial de Santander (UIS).

La actividad “Enfriando Chocolate: Laboratorio en Casa” se desarrolló bajo los principios del ABP y el uso de herramientas TIC (GeoGebra Classroom y Aula Moodle), favoreciendo el aprendizaje activo y reflexivo. El proceso metodológico comprendió tres fases articuladas:

1. **Exploración experimental:** los estudiantes midieron la temperatura de una taza de chocolate caliente durante intervalos regulares, registrando los datos en GeoGebra y reflexionando sobre el patrón de enfriamiento.
2. **Contraste teórico:** a partir de la Ley de Enfriamiento de Newton, resolvieron la ecuación diferencial asociada e interpretaron los parámetros del modelo.
3. **Relación teórico-práctica:** compararon los resultados experimentales con la función modelo, analizando coincidencias y diferencias, y formulando conclusiones sobre la validez del modelo matemático.

El análisis de los productos y observaciones evidenció mayor comprensión conceptual y motivación, así como la integración significativa entre teoría y práctica, coherente con el modelo pedagógico UIS21, centrado en la formación crítica y autónoma del estudiante.

Referencias

- [1] BENÍTEZ-VARGAS, B. *El Constructivismo*. Con-Ciencia Boletín Científico de la Escuela Preparatoria No. 3, **10**(19) (2023):65–66. Recuperado de <https://repository.uaeh.edu.mx/revistas/index.php/prepa3/article/view/10453>
- [2] BONILLA, S. *Utilización de software libre como estrategia didáctica para el aprendizaje de ecuaciones diferenciales ordinarias lineales en estudiantes del tercer semestre*. Tesis de Maestría, Escuela Superior Politécnica de Chimborazo, 2021. Recuperado de <https://dspace.espoch.edu.ec/bitstream/533d2849-b191-44fb-870b-862fb57967d8/content>
- [3] CONSEJO ACADÉMICO DE LA UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER. *Modelo Pedagógico UIS21* (Acuerdo 233 de agosto 10 de 2021). Universidad Industrial de Santander, 2021.
- [4] MANTILLA, C., BOLAÑOS, P., MÁRQUEZ, F., & TOSCANO, F. *Ecuaciones Diferenciales de Primer Orden y sus Aplicaciones*. Escuela Superior Politécnica de Chimborazo (ESPOCH), 2025.
- [5] MEJÍA, A., BRITO, L., AREQUIPA, E., & MORA, A. *Análisis de Ecuaciones Diferenciales como Herramienta Fundamental para Entender y Modelar Sistemas Dinámicos en la Educación Superior*. Reincisol, **4**(7) (2025):4940–4960. [https://doi.org/10.59282/reincisol.v4\(7\)4940-4960](https://doi.org/10.59282/reincisol.v4(7)4940-4960)
- [6] ORTIZ AGUILAR, W. *Neutrosophical evaluation of the application of the problem-based learning in the field of differential equations*. Revista Universidad y Sociedad, **14**(1) (2022):384–390. Recuperado de <http://scielo.sld.cu/pdf/rus/v14n1/2218-3620-rus-14-01-384.pdf>
- [7] VERA, R., MERCHÁN, W., MALDONADO, K., & CASTRO, A. *Metodología del aprendizaje basado en problemas aplicada en la enseñanza de las Matemáticas*. Serie científica de la universidad de las ciencias informáticas, **14**(3) (2021):142–155. Recuperado de <https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=8590453>

4.50 Música, cuentos y juegos con IA en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas

Marisol Gutiérrez Silva¹, Marcos Alejo Sandoval Serrano²

Resumen

Se exploran experiencia y reflexiones alrededor del uso de la inteligencia artificial (IA) como recurso innovador para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Se analizan tres ejes principales: el uso de la música generada con herramientas como Suno, la creación de cuentos narrativos apoyados por IA, y la implementación de juegos interactivos mediante plataformas como Educaplay. Estas estrategias buscan integrar la creatividad y la tecnología con el rigor de las ciencias básicas, generando ambientes de aprendizaje significativos, motivadores y cercanos a la realidad de los estudiantes. Finalmente, se plantea la necesidad de que docentes de matemáticas exploren nuevas posibilidades didácticas que articulen arte, narrativa y juego en la construcción de conocimientos matemáticos.

Palabras & frases claves: Enseñanza de las matemáticas, inteligencia artificial, música, narrativa, juegos. .

1. Introducción

La enseñanza de las matemáticas ha abierto paso a la necesidad de proponer experiencias innovadoras que acerquen la matemática a los intereses, emociones y contextos de los estudiantes. En este sentido, la inteligencia artificial (IA) se configura hoy como una aliada potencial en los procesos pedagógicos.

Las herramientas de IA permiten crear materiales didácticos novedosos: desde canciones diseñadas para explicar conceptos, hasta cuentos capaces de contextualizar problemas matemáticos y plataformas digitales que transforman la ejercitación en experiencias lúdicas e interactivas. Se proponen tres caminos de exploración: la música, los cuentos y los juegos digitales, articulados por medio de IA y pensados como estrategias de apoyo en la formación matemática universitaria.

El propósito central es mostrar que la matemática, lejos de ser una disciplina rígida y distante, puede convertirse en un campo vivo, creativo y cercano cuando se integra con recursos culturales, narrativos y tecnológicos.

2. La música como recurso didáctico en matemáticas

Gracias a herramientas como Suno y Udio entre otras, hoy se facilita crear canciones originales que incorporan letras vinculadas con definiciones, fórmulas o aplicaciones matemáticas. Este tipo de recurso tiene varias ventajas:

- Favorecer la apropiación de conceptos, al asociarlos con ritmo y melodía.

¹Docente Universidad Minuto de Dios. Correo: Marisol.gutierrez@uniminuto.edu

²Docente Universidad Santo Tomás. Correo: marcosandoval@usta.edu.co

- Conectar con las emociones de los estudiantes, generando un ambiente positivo.
- Facilitar la explicación de procesos complejos mediante metáforas musicales.

Los estudiantes no solamente apropián conceptos, ellos pueden participar de un proceso creativo donde el pensamiento lógico se entrelaza con la imaginación artística. Con la IA, se facilita construcción de canciones que incluyen temas sobre funciones exponenciales, derivadas o aplicaciones de las integrales, en los cuales el estudiante encuentra una forma distinta de acercarse al conocimiento. El aula, así, se transforma en un espacio donde la matemática no solo se resuelve en el tablero, sino también se canta y se vive. El vídeo <https://youtu.be/V93OwQgLIF8> es una guía para que estudiantes y docentes construyan canciones. A continuación algunas canciones de ejemplo disponibles en <https://marcosalejo.co> sitio web de Marcos Alejo Sandoval

- Mirada a la Cabra: Basada en una historia popular, resalta el pensamiento lógico y matemático así como la importancia de dudar y razonar críticamente
- Cálculo Vital: Canción para resalta la importancia de números y ecuaciones en Biología, Zootecnia y administración Ambiental
- Hotel infinito: Sobre el famoso hotel de Hilbert, invita a razonar sobre los infinitos y su reorganización.
- Aprender matemáticas a tu ritmo: canción que invita a perder el miedo a las matemáticas, mostrando positiva, práctica y apoyo todos pueden aprender.

3. Cuentos generados con IA para introducir y profundizar conceptos

La narrativa es otra herramienta poderosa en el aprendizaje. Los cuentos generados con apoyo de IA permiten introducir los temas matemáticos a través de relatos creativos que despiertan curiosidad y conectan los contenidos con la vida cotidiana o con mundos imaginarios.

Por ejemplo, un cuento puede narrar cómo un grupo de estudiantes explora el crecimiento de una planta a través de funciones exponenciales, o cómo un personaje resuelve un enigma con ayuda de derivadas. Estas historias cumplen dos propósitos:

- Introducción motivadora: el cuento capta la atención y prepara al estudiante para enfrentarse a un concepto formal.
- Profundización reflexiva: mediante la metáfora o el relato, se fomenta el pensamiento crítico y se da sentido a los procedimientos matemáticos.

La IA facilita el construir cuentos personalizados para distintos niveles académicos, adaptando el lenguaje y la complejidad del relato. De esta manera, la matemática se humaniza y contextualiza, evitando que sea percibida únicamente como un conjunto de números y símbolos abstractos.

4. Juegos interactivos en plataformas como Educaplay

El tercer eje de esta propuesta son los juegos digitales diseñados en plataformas como Educaplay, que permiten crear sopas de letras, crucigramas, emparejamientos, cuestionarios o juegos como el Salto de rana con componente matemático.

Los beneficios de estas herramientas son múltiples:

- Favorecen la participación activa del estudiante.
- Refuerzan los aprendizajes de manera lúdica.
- Permiten la retroalimentación inmediata, clave para el aprendizaje autónomo.

La IA puede contribuir al diseño de estas actividades al generar preguntas, retroalimentaciones personalizadas o incluso escenarios simulados. En conjunto, los juegos interactivos convierten la práctica matemática en un desafío estimulante y colaborativo. La herramienta Educaplay se puede integrar a Moodle para devolver algunas valoraciones de la actividad realizada por estudiantes. Desde la página https://es.educaplay.com/usuario/1029875-marcos_alejo/

Un ejemplo de cómo crear un juego educativo Salto de rana para matemáticas se puede ver en <https://youtu.be/spzJavU0nms>

5. Conclusiones

La integración de música, narrativa y juegos mediante IA transforma la experiencia de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Usarlas reducen la tensión, fortalecen la confianza del estudiante y complementan los métodos tradicionales mediante recursos motivadores y personalizados. Se invita a los docentes a explorar estas herramientas de forma crítica y creativa.

Referencias

- [1] MOLINA K. ET AL, *Uso de cuentos y narrativas para enseñar conceptos matemáticos*. Revista Científica Arbitrada Multidisciplinaria PENTACIENCIAS, 7(2) (2025):21–32.
- [2] BORBON, B. ET AL, *Estrategias mediadas por IA en la enseñanza de las matemáticas: Un enfoque práctico*. Revista Social Fronteriza, 4(5) (2024):e45408
- [3] VILLAMIL, M, *La música como herramienta para la enseñanza de las matemáticas*. Universidad Pedagógica Nacional. Colombia, 2020.
- [4] SANDOVAL, M. ET AL., *Propuesta para utilizar la gamificación como escenario formativo en la educación ambiental*. En: *Revolución Educativa en la Nueva Era*, Vol. I, pp. 241–250, 2022.
- [5] SANDOVAL, M. ET AL., *Implementación de TIC para el fortalecimiento de habilidades matemáticas en edades tempranas*. En: *Herramientas para el fortalecimiento de los procesos de enseñanza y aprendizaje en la educación a distancia en Colombia*, pp. 81–94. Universidad Santo Tomás, 2023.

4.51 Newton X: Innovación en la medición dinámica en tiempo real con aplicaciones matemáticas

Fabián Bedoya Salazar¹, Sandra Johana Mendoza Carreño²

Resumen

El prototipo presentado busca demostrar de manera práctica cómo las derivadas pueden aplicarse al análisis del movimiento de un vehículo, permitiendo medir velocidad, aceleración y fuerza mediante un sistema controlado por Arduino junto con un sensor láser VL53L0X. Su desarrollo surge de la necesidad de dar un uso visible y comprensible a los conceptos de la física relacionados con el movimiento, mostrando cómo las magnitudes varían en función del tiempo. El sistema mide una distancia y un tiempo inicial, deteniendo la medición cuando el vehículo alcanza un punto determinado. A partir de estos datos se calculan la velocidad, la aceleración y la fuerza, relacionando directamente los principios teóricos con una observación física real. Este prototipo se propone como una herramienta didáctica para la enseñanza de la física y las matemáticas, integrando electrónica, programación y experimentación práctica.

Palabras & frases claves: Arduino, dinámica experimental, ecuaciones cuadráticas, aprendizaje STEM.

1. Introducción

La enseñanza de la física y las matemáticas enfrenta el reto de vincular la teoría abstracta con fenómenos observables y reproducibles. En este contexto surge Newton X, un prototipo diseñado para explorar en tiempo real la relación entre fuerza, masa y aceleración mediante un vehículo experimental instrumentado.

A diferencia de los enfoques tradicionales, el sistema integra sensores avanzados, procesamiento digital y análisis matemático, promoviendo la comprensión conceptual y el desarrollo de habilidades de resolución de problemas a través de la modelación matemática.

2. Metodología y aplicaciones matemáticas

El prototipo emplea una placa Arduino UNO, un sensor de distancia VL53L0X y una pantalla OLED para la visualización en tiempo real de variables como velocidad, aceleración, cantidad de movimiento y energía cinética. La adquisición de datos en intervalos regulares permite calcular la velocidad y la aceleración mediante diferencias finitas y aplicar la segunda ley de Newton para estimar la fuerza resultante.

Desde el punto de vista matemático, el movimiento se modela como Movimiento Rectilíneo Uniformemente Acelerado (MRUA), descrito por la ecuación

$$x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2.$$

¹Universidad Industrial de Santander. Correo: fabian2244031@correo.uis.edu.co

²Universidad Industrial de Santander. Correo: sjmencar@correo.uis.edu.co

Adicionalmente, se emplearon las plataformas Tracker y Origin para el análisis de ocho muestras experimentales obtenidas durante el desplazamiento del automóvil.

3. Análisis de datos: resultados y discusiones

A partir de ocho registros experimentales se obtuvieron datos de distancia, tiempo, velocidad, cantidad de movimiento y fuerza de colisión. Se construyó la gráfica del momento lineal en función de la velocidad, cuya pendiente permitió determinar la masa efectiva del prototipo, obteniendo un valor aproximado de 0,60 kg, validando la relación teórica $p = mv$.

El análisis de la fuerza y la aceleración en función del tiempo mostró un máximo de fuerza de 3,73 N y una aceleración máxima de $6,26 \text{ m/s}^2$, coherentes con la respuesta dinámica del sistema. Asimismo, las gráficas de distancia frente al tiempo evidenciaron un comportamiento cuadrático característico del MRUA, con valores de R^2 cercanos a 0,99, lo que confirma un ajuste adecuado al modelo teórico.

El análisis de la energía cinética y la velocidad mostró una relación creciente consistente con la transformación del trabajo mecánico en energía cinética, corroborando la validez del modelo físico empleado.

4. Conclusiones

El estudio experimental del automóvil prototipo permitió verificar la relación lineal entre el momento lineal y la velocidad, así como la dependencia cuadrática de la posición respecto al tiempo, propias del Movimiento Rectilíneo Uniformemente Acelerado.

Los errores relativos obtenidos fueron inferiores al 10 %, lo que confirma la precisión de las mediciones y la confiabilidad del sistema desarrollado. En general, el prototipo Newton X valida de manera efectiva los principios fundamentales de la segunda ley de Newton y la conservación del momento lineal, constituyéndose como una herramienta didáctica eficaz para la enseñanza integrada de física, matemáticas y tecnología.

5. Agradecimientos

Agradecemos a los organizadores del XIII Simposio Nororiental de Matemáticas por brindar este espacio de intercambio académico y divulgación científica. Asimismo, expresamos nuestro reconocimiento a la doctora Sandra Mendoza por su apoyo, orientación y motivación constante durante el desarrollo de este trabajo.

Referencias

- [1] R. A. SERWAY Y J. W. JEWETT, *Física para ciencias e ingeniería*, Cengage Learning, 2014.
- [2] P. A. Tipler Y G. Mosca, *Física para científicos e ingenieros*, 7a ed., McGraw-Hill, 2021.
- [3] ARDUINO, *Arduino Mega 2560 Rev3 Documentation*, Arduino Official Documentation, 2023.

4.52 Tareas Matemáticas Escolares para la enseñanza de la proporcionalidad directa en Educación Básica Primaria

Sebastián Duarte Bautista¹

Resumen

Esta propuesta didáctica aborda la resolución de problemas en proporcionalidad directa, inversa y producto de medidas, una competencia numérica fundamental establecida en el currículo colombiano (EBC, LC, DBA). El objetivo principal fue desarrollar habilidades de resolución de problemas en proporcionalidad directa en estudiantes de Educación Básica Primaria (4.º grado), utilizando datos extraídos de su entorno para facilitar un aprendizaje significativo.

La sesión de 60 minutos se estructuró siguiendo las situaciones didácticas de Brousseau (Acción, Formulación, Validación, Institucionalización y Cierre). El marco conceptual enfatiza que el razonamiento proporcional es una habilidad basada en la identificación de una relación multiplicativa constante entre cantidades. Los estudiantes trabajaron en la creación de problemas propios utilizando material didáctico, particularmente la adecuación de las regletas de Cuisenaire.

La evaluación final incluyó problemas clasificados según la Demanda Cognitiva (DM). Los resultados del análisis de 35 guías evaluadoras indicaron que el aumento en el nivel de demanda cognitiva se correlacionó con un incremento de respuestas erróneas. En particular, el Problema 3, de alta demanda cognitiva y diseñado para generar conflicto cognitivo, registró solo dos respuestas correctas, evidenciando dificultades en la argumentación y en la comprensión lectora de los enunciados aritméticos.

Palabras & frases claves: Proporcionalidad Directa, Demanda Cognitiva, Resolución de Problemas.

1. Introducción

La enseñanza de la proporcionalidad directa en la educación primaria es fundamental para el desarrollo del pensamiento matemático. No obstante, es común que los estudiantes perciban las matemáticas como una disciplina ajena a su vida diaria. Esta investigación tiene como objetivo principal mejorar la enseñanza de la proporcionalidad directa en estudiantes de cuarto y quinto grado.

Para ello, se diseñó e implementó una secuencia didáctica basada en la resolución de problemas contextualizados, buscando vincular los conceptos matemáticos con situaciones de la vida cotidiana de los estudiantes.

Los objetivos específicos de este estudio son:

- Desarrollar habilidades de razonamiento lógico y resolución de problemas utilizando contextos reales.
- Promover el uso de materiales didácticos, como las regletas de Cuisenaire, para facilitar la comprensión de las proporciones.

¹Estudiante de Licenciatura en Educación Básica Primaria, Universidad Industrial de Santander (UIS), Semillero STEAM+H.. Correo: sebastian2211213@correo.uis.edu.co

- Evaluar el impacto de la intervención en el desarrollo de competencias matemáticas.
- Alinear la enseñanza con los Estándares Básicos de Competencias (EBC) y los Derechos Básicos de Aprendizaje (DBA).

2. Metodología

El enfoque metodológico de la investigación se estructuró en tres fases: investigación y fundamentación, planeación didáctica e implementación práctica.

En la fase de investigación y fundamentación se realizó una revisión de la literatura pedagógica y matemática sobre la enseñanza de la proporcionalidad directa. Se estudiaron teorías didácticas como las de Vergnaud y Brousseau, las cuales enfatizan la resolución de problemas como eje central del aprendizaje matemático. Asimismo, se analizaron los Estándares Básicos de Competencias para garantizar la coherencia con los objetivos educativos nacionales.

La planeación didáctica consistió en el diseño de una secuencia basada en situaciones problemáticas del entorno de los estudiantes. Se incorporó material manipulativo, especialmente las regletas de Cuisenaire, con el fin de favorecer una comprensión visual y concreta de las relaciones proporcionales. Las actividades se organizaron de forma progresiva, promoviendo el trabajo colaborativo.

La implementación práctica se llevó a cabo en una sesión de clase de 60 minutos. Los estudiantes trabajaron en grupos resolviendo problemas de proporcionalidad directa, mientras el docente actuó como facilitador del aprendizaje, guiando mediante preguntas y promoviendo la reflexión matemática.

3. Resultados

La aplicación de la secuencia didáctica evidenció avances significativos en la comprensión de la proporcionalidad directa en estudiantes de cuarto grado. Inicialmente, se observó que la mayoría presentaba dificultades para identificar relaciones proporcionales y aplicar procedimientos adecuados.

Tras la intervención, los estudiantes mejoraron notablemente su capacidad para resolver problemas de proporcionalidad directa. El uso de contextos cercanos a su realidad, como situaciones de compra o ajuste de cantidades, incrementó el interés y la participación. Los resultados mostraron una correlación positiva entre el uso de contextos reales y el desarrollo de habilidades de pensamiento lógico y crítico. Además, los estudiantes lograron transferir los conocimientos adquiridos a otros contextos académicos.

4. Conclusiones

La enseñanza de la proporcionalidad directa a través de problemas contextualizados y el uso de materiales manipulativos demostró ser una estrategia efectiva. Los estudiantes lograron establecer conexiones significativas entre los conceptos matemáticos y su entorno, lo que favoreció el aprendizaje y aumentó su motivación.

Se evidenció que el trabajo con situaciones reales mejora la capacidad de resolución de problemas y la aplicación del conocimiento en nuevos contextos. La metodología implementada fomentó un desarrollo coherente de las competencias matemáticas, confirmando que una enseñanza basada en contextos prácticos resulta significativa y eficaz.

Referencias

- [1] BROUSSEAU, G. *Théorie des situations didactiques*. Grenoble: La Pensée Sauvage, 1998.
- [2] BUITRAGO, A. M., MANTILLA, J., MARTÍNEZ, N., & CASTRO, P. *Proporcionalidad directa*. Mathematics, **10**(8) (2022):1340.
- [3] STEIN, M. K., SMITH, M. S., *Mathematical Tasks as a Framework for Reflection*. En: S.T., SCHOENFELD (Ed.), *Research on Teaching and Learning Mathematics*, pp. 11–19. National Council of Teachers of Mathematics (NCTM), Reston, VA, 1998.
- [4] VERGNAUD, G. *El niño, las matemáticas y la realidad*. Madrid: Morata, 1991.

4.53 Tareas que promueven el desarrollo de pensamiento algebraico temprano a través de los sistemas de representación

María José Bautista Pedraza¹, Juan Andrés Parra Álvarez², Solange Roa Fuentes³

Resumen

La presente investigación se centra en promover el desarrollo de sistemas de representación en estudiantes de quinto de primaria (9–11 años) en relación con el pensamiento algebraico temprano, por medio del diseño de tareas basadas en la Teoría de la Objetivación. La metodología es de enfoque cualitativo-descriptivo y contempla distintas fases de investigación. Diversos estudios muestran que en el contexto del pensamiento algebraico temprano es posible fomentar diferentes maneras de representar, contribuyendo al desarrollo de habilidades y al mejoramiento de dificultades frecuentes. Los resultados evidencian que el uso de sistemas de representación es esencial para la comunicación, comprensión y resolución de tareas relacionadas con el pensamiento algebraico.

Palabras & frases claves: pensamiento algebraico temprano, tareas, sistemas de representación.

1. Introducción

Potenciar el desarrollo del pensamiento algebraico a través de tareas y actividades cuidadosamente diseñadas es fundamental en esta investigación. Según Vergel (2018), una tarea es una actividad integrada de interacción en la que la enseñanza y el aprendizaje desempeñan un papel crucial en el desarrollo del pensamiento algebraico.

Las representaciones juegan un papel esencial en la construcción del conocimiento matemático, ya que permiten interactuar con conceptos abstractos mediante signos, esquemas e imágenes mentales. Según Torres (2022), las representaciones son fundamentales en el desarrollo del pensamiento algebraico y en la comprensión de las matemáticas.

Esta investigación se apoya en una revisión bibliográfica que incluye perspectivas curriculares nacionales del Ministerio de Educación Nacional (MEN) e internacionales del National Council of Teachers of Mathematics (NCTM), así como estudios sobre *Early Algebra* y diseño de tareas.

2. Elementos teóricos y método

La Teoría de la Objetivación (TO), propuesta por Radford, adopta una perspectiva histórico-cultural que concibe la educación matemática como un proceso de formación integral del ser humano. Esta teoría trasciende la transmisión de contenidos técnicos y promueve el desarrollo de individuos éticos y reflexivos.

¹Universidad Industrial de Santander. Correo: maria2201771@correo.uis.edu.co

²Universidad Industrial de Santander. Correo: juan2211360@correo.uis.edu.co

³Universidad Industrial de Santander. Correo: roafuentes@gmail.com

El pensamiento algebraico se define como una forma particular de reflexionar caracterizada por la indeterminación, el razonamiento analítico y el uso de sistemas semióticos. Estos componentes se articulan para diferenciar este tipo de pensamiento de otros modos de razonamiento matemático.

El método se sustenta en una metodología multisemiótica, centrada en el análisis de gestos, habla, escritura y movimientos corporales activados por los estudiantes al resolver tareas matemáticas.

3. Resultados

Con el propósito de identificar las formas de representación empleadas por estudiantes de quinto grado al enfrentar tareas diseñadas para fomentar el pensamiento algebraico, se analizaron las producciones realizadas durante la intervención.

Se identificaron diversos métodos de abordaje, como el conteo con los dedos, el señalamiento con el lápiz y el uso de representaciones pictóricas de los elementos propios de cada tarea. Estos sistemas de representación resultaron fundamentales para organizar, comunicar y justificar las ideas matemáticas de los estudiantes, facilitando la comprensión y resolución de las tareas.

Referencias

- [1] ANGARITA, L. M. A. *Pensamiento funcional en básica primaria: generalización y sistemas de representación*. Universidad Industrial de Santander, 2024.
- [2] CAÑADAS, M. C., Y FIGUEIRAS, L. *Uso de representaciones y generalización de la regla del producto*. *Infancia y Aprendizaje*, **34**(4) (2011):409–425.
- [3] CAÑADAS, M. C., FUENTES, S., *Pensamiento funcional de estudiantes de primero de educación primaria*. En: FERNÁNDEZ, C., MOLINA, M., PLANAS, N. (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIX*, pp. 211–220. Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM), 2015.
- [4] MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACIONAL. *Lineamientos Curriculares del área de Matemáticas*. Bogotá: MEN, 1998.
- [5] MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACIONAL. *Estándares básicos de competencias*. MEN, Bogotá, 2003.
- [6] NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS. *Principios y estándares para la Educación Matemática*. THALES, 2003.
- [7] RADFORD, L., *Un recorrido a través de la teoría de la objetivación*. En: *Teoria da Objetivação*, pp. 15–42, 2020.
- [8] RADFORD, L. *La teoría de la objetivación*. Universidad de los Andes, 2023.
- [9] TORRES, M. *Generalización, estructuras y representaciones*. Tesis doctoral, Universidad de Granada, 2022.
- [10] VERGEL, R., Y ROJAS, P. *Álgebra escolar y pensamiento algebraico*. Editorial Universidad Distrital Francisco José de Caldas, 2018.

4.54 Velocontrol: innovacion universitaria para un acceso vehicular seguro y eficiente

Valery Domínguez Aceros¹, Valery Tatiana Hernández Quitian,¹ Nicolás Pacheco Reyes,¹ Nikolle Alejandra Montoya Tabares², Sandra Johana Mendoza Carreño³

Resumen

El presente prototipo propone el diseño y construcción de una maqueta automatizada que simula el control vehicular en la sede UIS Barrancabermeja, utilizando sensores de proximidad, velocímetros, detección de color y un sistema programado en Arduino Mega. Su objetivo principal es mejorar la eficiencia y seguridad del ingreso y salida de vehículos, reemplazando el control manual por un sistema automatizado capaz de registrar el paso de los automóviles, identificar su color y monitorear su velocidad dentro del parqueadero institucional. El sistema emite una alarma cuando un vehículo supera el límite de velocidad establecido y controla automáticamente el acceso cuando el parqueadero se encuentra lleno. El desarrollo del proyecto se realizó mediante un enfoque práctico y experimental, integrando electrónica, programación y automatización, constituyéndose como una solución tecnológica innovadora que fortalece el aprendizaje práctico y promueve el uso de la tecnología en contextos educativos.

Palabras & frases claves: Arduino Mega, parqueadero inteligente, control vehicular, automatización, tecnología educativa.

1. Introducción

Actualmente, el control de ingreso y salida de vehículos en la sede UIS Barrancabermeja se realiza de manera manual, lo que genera demoras, sobrecarga laboral para el personal de seguridad y posibles riesgos para conductores y peatones. Además, la ausencia de un monitoreo de velocidad incrementa el riesgo de accidentes y limita la eficiencia del control vehicular interno.

Ante esta problemática, se propone el diseño e implementación de un sistema automatizado de control vehicular que integre sensores de proximidad, velocímetros y reconocimiento de color, todo gestionado mediante una placa Arduino Mega. El sistema permite detectar el paso de los vehículos, emitir alarmas cuando se excede la velocidad permitida y restringir el acceso cuando el parqueadero se encuentra lleno, garantizando mayor seguridad y eficiencia operativa.

2. Metodología y aplicaciones matematicas

El desarrollo del prototipo se llevó a cabo mediante un enfoque práctico y experimental dividido en varias etapas. Inicialmente, se realizó un análisis del problema para identificar las principales deficiencias del sistema de control vehicular existente. Posteriormente, se diseñaron los esquemas electrónicos y estructurales, integrando sensores infrarrojos, módulos de detección de color, servomotores y una placa Arduino Mega como unidad de control.

¹Universidad Industrial de Santander.

²Universidad Industrial de Santander. Correo: Nikolle2244195@correo.uis.edu.co

³Universidad Industrial de Santander. Correo: sjmencar@correo.uis.edu.co

Desde el punto de vista matemático, la velocidad de los vehículos se calculó a partir de la relación fundamental

$$v = \frac{d}{t},$$

donde d representa la distancia recorrida y t el tiempo de desplazamiento. El sistema registra los tiempos de detección entre sensores para estimar la velocidad y comparar los valores obtenidos con los límites establecidos, permitiendo activar alarmas cuando se supera el umbral permitido.

3. Análisis de datos y resultados

Las mediciones experimentales permitieron evaluar el comportamiento del sistema Velocontrol ante diferentes velocidades simuladas. Los resultados evidenciaron una distribución coherente de las velocidades registradas, con mayor frecuencia en el rango de 0,53 a 0,82 m/s, lo que confirma la estabilidad y confiabilidad del sensor infrarrojo.

Asimismo, el análisis de la relación entre velocidad y tiempo mostró una dependencia inversa consistente con el modelo teórico, validando el correcto funcionamiento del algoritmo implementado. Las mediciones evidenciaron una alta sensibilidad del sistema para detectar variaciones mínimas en el tiempo de desplazamiento, característica esencial para aplicaciones de control vehicular automatizado.

4. Conclusiones

La implementación del sistema automatizado de control vehicular demostró que la integración de sensores, módulos electrónicos y una placa Arduino Mega permite optimizar la seguridad, eficiencia y organización del acceso institucional. El prototipo logró simular de manera funcional el ingreso y salida de vehículos, controlar la velocidad, reconocer el color de los automóviles y restringir el acceso cuando el parqueadero se encuentra lleno.

Además, el proyecto fomentó el aprendizaje práctico, fortaleciendo competencias en electrónica, control y programación, y promoviendo el uso de la tecnología como herramienta de innovación para la solución de problemáticas reales en contextos educativos.

5. Agradecimientos

Agradecemos a los organizadores del XIII Simposio Nororiental de Matemáticas por brindar este espacio de intercambio académico y divulgación científica. Expresamos también nuestro reconocimiento a la doctora Sandra Mendoza por su apoyo, orientación y motivación constante durante el desarrollo de este trabajo.

Referencias

- [1] ARDUINO, *Arduino Mega 2560 Rev3 Documentation*. Arduino Official Documentation, 2023.
- [2] HOWTOMECHATRONICS, *L298N Motor Driver – Arduino Interface*. HowToMechatronics, 2025.

- [3] RANDOM NERD TUTORIALS, *Guide for TCS230/TCS3200 Color Sensor with Arduino*. Random Nerd Tutorials, 2025.
- [4] CIRCUIT DIGEST, *How to Build a Speed Sensor Using Arduino*. Circuit Digest, 2025.
- [5] MAXBOTIX INC., *What Is an Ultrasonic Sensor?*. MaxBotix Inc., 2025.

ESTADÍSTICA



5.1 Análisis de la volatilidad en series de tiempo. Modelos ARCH y GARCH

Giampaolo Orlandoni-Merli¹, Josefa Ramoni-Perazzi²

Resumen

Este cursillo introduce el análisis de volatilidad en series de tiempo mediante modelos paramétricos ARCH y GARCH. Se desarrollan fundamentos teóricos, metodologías de estimación, y aplicaciones prácticas en diversos campos, como finanzas, economía, epidemiología, ecología. El objetivo del cursillo es proporcionar herramientas analíticas para modelar y entender la dinámica de la volatilidad temporal en contextos reales. La volatilidad estocástica (SV) es el concepto principal utilizado en economía y matemáticas financieras para abordar la volatilidad variable en el tiempo en los mercados financieros. El análisis estándar de series temporales se basa en conceptos como la estacionariedad, la autocorrelación, el ruido blanco, la innovación y una familia de modelos, el ARMA y su generalización, el ARIMA. Estos conceptos son insuficientes para el análisis de series temporales financieras. Por ello, se incorporan nuevos conceptos: la volatilidad y los principales hechos estilizados de las series financieras (rendimientos imprevisibles, agrupamiento o clústeres de volatilidad, predictibilidad de los rendimientos al cuadrado, leptocurticidad de las distribuciones marginales, asimetrías). En este curso se presentan los principales conceptos y modelos que han definido el campo de la econometría de la volatilidad estocástica.

Palabras & frases claves: Series de tiempo, volatilidad, modelos ARCH y GARCH.

1. Introducción

La volatilidad es una característica usual en muchas series temporales, reflejando la variabilidad o incertidumbre en fenómenos dinámicos. En campos como las finanzas, la economía, la salud pública y la ecología, entre otros, comprender y predecir la volatilidad permite tomar decisiones más informadas. Los modelos de volatilidad pueden clasificarse en modelos paramétricos y no paramétricos. Los modelos paramétricos más conocidos son el modelo ARCH (Autoregressive Conditional Heteroskedasticity) y GARCH (Generalized ARCH).

Los modelos ARCH fueron introducidos por Engle [1] y su extensión GARCH se debe a Bollerslev [2]. En estos modelos, el concepto clave es la varianza condicional, es decir, la varianza condicional al pasado. El modelo ARCH(q) modela la varianza condicional como función de errores pasados. Y en el modelo GARCH(p, q), la varianza condicional se expresa como una función lineal de los valores pasados al cuadrado. Esta especificación particular es capaz de capturar los principales hechos estilizados que caracterizan las series financieras, a la vez que es suficientemente simple como para permitir un estudio completo de las soluciones.

La familia de modelos paramétricos incluye modelos como EGARCH, TGARCH, GJR-GARCH para capturar asimetrías y efectos de apalancamiento, particularmente en el ámbito financiero. Los modelos no paramétricos se pueden resumir en modelos de volatilidad estocástica, basados en métodos bayesiano. Se incluyen también los modelos de machine learning, como los modelos tipo random forest y redes neuronales.

¹Universidad industrial de Santander. Correo: giaorlan@correo.uis.edu.co

²Universidad Industrial de Santander. Correo: jramonip@uis.edu.co

El objetivo de este cursillo es proporcionar conocimientos básicos sobre la econometría de series temporales financieras, presentar herramientas estadísticas útiles para el análisis de datos financieros y adquirir experiencia en las aplicaciones financieras de diversos métodos econométricos.

2. Metodología

La importancia de los métodos cuantitativos en las finanzas ha aumentado debido a la abundancia de datos y al hecho de que las economías y los mercados financieros están mucho más integrados. Actualmente, existen herramientas informáticas y paquetes estadísticos para analizar datos financieros complejos y de alta dimensión. Diversas páginas de internet permiten descargar datos financieros de fuentes abiertas en un paquete de software libre, como R.

Para el logro del objetivo propuesto, este cursillo se estructura de la siguiente manera:

1. **Introducción.** Presenta los conceptos básicos de los datos financieros que se analizarán a lo largo del curso. El software R se presenta mediante ejemplos y diferentes maneras de visualizar datos financieros.
2. **Modelos Lineales.** Conceptos básicos del análisis lineal de series de tiempo, como la estacionariedad y la función de autocorrelación, introduce modelos lineales simples para manejar la dependencia serial de los datos y analiza modelos de regresión con errores de series de tiempo, estacionalidad, no estacionariedad de raíz unitaria (modelos ARIMA).
3. **Modelos Paramétricos de Volatilidad.** Se centra en la modelización de la heterocedasticidad condicional (como la varianza condicional de la rentabilidad de un activo financiero). Presenta diversos modelos econométricos para describir la evolución de la volatilidad de esos activos a lo largo del tiempo.
4. **Aplicaciones.** Algunas aplicaciones de los modelos de volatilidad utilizando algunos casos prácticos. Se describen todos los pasos para la construcción de modelos de volatilidad y se discuten las ventajas y desventajas de varios modelos de volatilidad.

Procedimiento metodológico:

1. Preparación de datos: transformaciones logarítmicas, detección de estacionariedad.
2. Identificación de los modelos apropiados para estudiar los datos disponibles de ST.
3. Estimación de modelos: usualmente se emplea máxima verosimilitud y selección de orden óptimo.
4. Diagnóstico: pruebas de heterocedasticidad (ARCH test). Análisis de residuos.
5. Validación: backtesting, criterios AIC/BIC, predicción fuera de muestra.
6. Visualización: gráficos de volatilidad condicional, bandas de confianza.

3. Syllabus del cursillo

1. **Introducción al estudio de series de tiempo (ST).** Características y propiedades de las ST. Introducción a ST financieras (Yahoo financiero, Google financiero). Uso del software R.

Taller 1: Lectura y graficación de series financieras.

2. **Modelos lineales de ST.** Modelos $ARMA(p, q)$ y $ARIMA(p, d, q)$. Metodología Box–Jenkins para el análisis de ST (identificación, estimación, verificación, predicción). Descargue y preparación de datos (retornos de S&P500, casos COVID-19). Ajuste ARIMA: `forecast`. Diagnóstico y predicción.

Taller 2: Formulación y estimación de modelos ARIMA.

3. **Modelos de volatilidad paramétricos.** Estudio de los modelos ARCH y GARCH. Ajuste $ARCH(p)$ y $GARCH(p, q)$: `rugarch`. Diagnóstico (ACF, PACF de residuos). Interpretación de parámetros (persistencia de volatilidad).

Taller 3: Identificación y estimación de modelos ARCH y GARCH.

4. **Conclusiones y aplicaciones.**

4. Conclusiones

Los modelos ARCH y GARCH permiten entender y estimar la dinámica de la volatilidad de las series de tiempo estocásticas.

Su aplicabilidad va más allá de las finanzas, siendo útiles en ciencias sociales, naturales y médicas.

La correcta estimación y validación de los modelos es fundamental para evitar errores de interpretación.

Referencias

- [1] ENGLE, R. F., *Autoregressive Conditional Heteroskedasticity with Estimates of the Variance of UK Inflation*. *Econometrica*. **50**(4) (1982):987–1007.
- [2] BOLLERSLEV, T., *Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity*. *Journal of Econometrics*. **31**(3) (1986):307–327.
- [3] TSAY, R. S., *Analysis of Financial Time Series*. John Wiley & Sons, Hoboken, NJ, 2010.
- [4] FRANCES, P. H., VAN DIJK, D., *Nonlinear Time Series Models in Empirical Finance*. Cambridge University Press, Cambridge, 2000.
- [5] HYNDMAN, R. J., ATHANASOPOULOS, G., *Forecasting: Principles and Practice*. OTexts, Melbourne, 2021.
- [6] DIEBOLD, F. X., *Elements of Forecasting*. Thomson South-Western, Mason, OH, 2007.
- [7] ORLANDONI, G., *Notas sobre procesos estocásticos y series de tiempo*. IEAC, Universidad de Los Andes, Mérida, 2005.
- [8] ORLANDONI, G., *Notas sobre modelos ARMA y ARIMA*. IEAC, Universidad de Los Andes, Mérida, 2005.

- [9] ORLANDONI, G., *Notas sobre modelos de volatilidad. ARCH y GARCH*. IEAC, Universidad de Los Andes, Mérida, 2005.

Librerías R

- Quantmod Package (Quantitative Financial Modelling).
- tseries, rugarch, tsgarch, fGarch.

5.2 Análisis de los artículos publicados en la revista Economía de la Universidad de Los Andes, Mérida, Venezuela

Rafael E. Borges¹, Efraín Entralgo²

Resumen

El presente trabajo un análisis de los artículos publicados en la revista Economía, editada y publicada por el Instituto de Investigaciones Económicas y Sociales de la Universidad de Los Andes, Mérida Venezuela. El trabajo consta de dos partes: (i) Un análisis textual de los resúmenes de los artículos publicados, basado en el análisis de varios tipos de tokens (palabras o unigrams, bigrams y skip-grams) para la identificación de temáticas tratadas por los artículos y, (ii) Un análisis de de las redes de coautoría basados en métodos de análisis de redes.

Palabras & frases claves: Análisis textual, Análisis de redes de coautoría, Revista Economía.

1. Introducción

Se presentan dos análisis basados en información de los artículos publicados en la tercera etapa revista Economía, revista científica editada y publicada por el Instituto de Investigaciones Económicas y Sociales (IIES), de la Facultad de Ciencias Económicas y Sociales (FACES), de la Universidad de los Andes (ULA), Mérida, Venezuela, y cuya tercera etapa se viene publicando desde el año 1986, y hasta la fecha se han publicado 332 artículos incluidos en 50 números, que están disponibles a través del enlace: <http://erevistas.saber.ula.ve/economia>

El análisis presentado en este trabajo está dividido en dos partes:

1. Un análisis textual de los resúmenes de los artículos publicados en la revista, siguiendo la metodología de Silge y Robinson (2017) y herramientas de análisis de redes bajo el enfoque de Kolaczyk, E. D., & Csárdi, G. (2020).
2. Un análisis de redes de coautoría basados en los 123 artículos con más de un autor.

El análisis textual se llevó a cabo usando diversos paquetes del universo ligado a la versión 2.0.0. del paquete tidyverse (Wickham, Averick, Bryan et al., 2019) y herramientas del paquete igraph (Csárdi & Nepusz, 2006; Csárdi, Nepusz, Traag et al., 2025), el cual fue usado también para el análisis de las redes de coautoría, ejecutados en la versión 4.5.1 del lenguaje de computación para análisis estadístico R (R Core Team, 2025) en la versión 2025.05.1 del Ambiente de desarrollo Integrado RStudio (Posit Team, 2025).

2. Resultados

El análisis textual de los resúmenes se hizo tokenizando los mismos en unigramas, realizando posteriormente la eliminación de palabras de parada, la eliminación de números, y la normalización, y

¹ Escuela de Estadística, Universidad de Los Andes, Mérida, Venezuela. Correo: borgesr@ula.ve

² Escuela de Estadística, Universidad de Los Andes, Mérida, Venezuela. Correo: entralgo@ula.ve

posterior a este proceso se analizaron las palabras más frecuentes, mediante un gráfico de barras y una nube de palabras, la cual presentamos en este trabajo.



Figura 1: Nube de palabras de las palabras más frecuentes

En este dispositivo se puede observar que los resúmenes de los artículos tratan trabajos relacionados con análisis, investigación, estudio y modelo, trabajos relacionados con economía (resultado obvio) y con Venezuela, entre otras.

El análisis de los bigramas (realizado de manera similar al de los unigramas, pero tokenizando en bigrams) permitió obtener pares de palabras adyacentes, lo cual permite visualizar interesantes combinaciones de palabras, y la componente más grande permite identificar trabajos relacionados con política económica, ambiental, social y descentralización (ver figura 2), y este resultado es similar al obtenidos al analizar los skip-grams (pares de palabras no adyacentes).

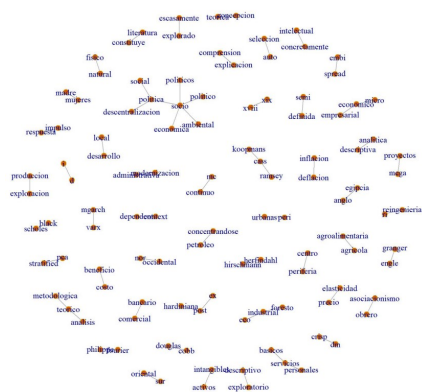


Figura 2: Bigramas (pares de palabras)

El análisis de redes se llevó a cabo considerando varios indicadores de centralidad, y el gráfico para grados (degree) (figura 3), permite visualizar las principales redes de coautoría, en la que podemos visualizar varias redes de coautores en el área de Estadística, tanto de la Universidad de Los Andes:

la de Orlandoni, Ramoni, Sinha, Elizabeth Rivas, la de Borges, Colmenares, Douglas Rivas, la de Elsy Garnica, Pilar González, Defives y otros, la de Víctor Márquez, Franklin Camacho, Luzardo, y otras) y de otras Univesidades (Vasquez, Ramírez, Camardiel y Aluja), una red interdisciplinaria de la ULA (Domingo, Mora, Fargier, Mora), otras ligadas al Banco Central de Venezuela a grupos de Economía de la ULA, y a grupos de México y Ecuador.

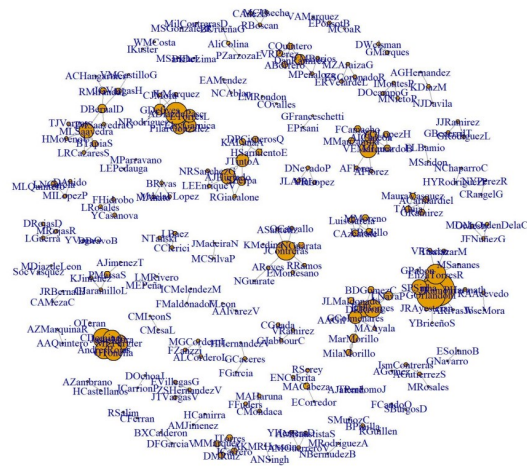


Figura 3: Redes de coautoría (degree)

Finalmente, la red basada en autoridades (authorities) permite identificar la red más influyente (la de Orlandoni, Ramoni y colaboradores) (figura 4), y que corrobora la importancia de investigadores en el área de Estadística en la conformación de importantes redes de coautoría en la revista Economía.

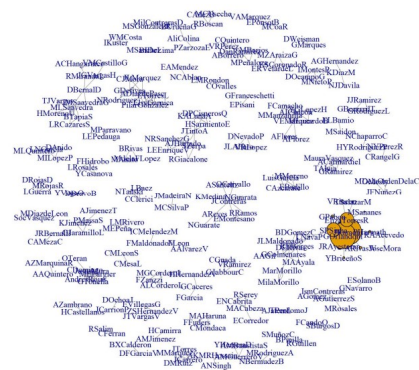


Figura 4: Redes de coautoría según autoridades (degree)

Referencias

- [1] CSÁRDI G & NEPUSZ T, *The igraph software package for complex network research*. Complex Systems, **1695** (2006):1–9
- [2] CSÁRDI, G., NEPUSZ, T., TRAAG, V., HORVÁT, S., ZANINI, F., NOOM, D. & MÜLLER, K., *igraph: Network Analysis and Visualization in R*. doi:10.5281/zenodo.7682609. Disponible en: <https://doi.org/10.5281/zenodo.7682609>.
- [3] KOLACZYK, E. D. & CSÁRDI, G., *Statistical analysis of network data with R*. Segunda edición. New York: Springer, 2020.
- [4] POSIT TEAM, *RStudio: Integrated Development Environment for R*. Posit Software, PBC, Boston, MA, 2025. Disponible en: <http://www.posit.co/>.
- [5] R CORE TEAM, *R: A Language and Environment for Statistical Computing*. R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria, 2025. Disponible en: <https://www.R-project.org/>.
- [6] SILGE, J. & ROBINSON, D., *Text mining with R: A tidy approach*. Boston (MA): O'Reilly, 2017.
- [7] WICKHAM, H., AVERICK, M., BRYAN, J., CHANG, W., MCGOWAN, L. D. A., FRANÇOIS, R., ET AL., *Welcome to the Tidyverse*. Journal of Open Source Software, **4**(43) (2019):1686.

5.3 Aplicación de la metodología KDD para clasificar la calidad del aire por ozono troposférico en Bucaramanga (2019–2023)

Natalia Andrea Bravo Granados¹, Jasmín Lorena Durán Ortiz,¹ Miguel Oswaldo Pérez Pulido², Francisco Javier León³, Leonardo Andrés Pinto⁴

Resumen

El ozono troposférico (O_3) afecta la salud respiratoria y sus niveles dependen fuertemente de condiciones meteorológicas, se aplicó la metodología de descubrimiento de conocimiento en bases de datos (KDD) para clasificar los niveles mensuales de O_3 en Bucaramanga (2019–2023) y determinar los predictores meteorológicos más influyente, para esto se depuró una serie de 60 registros (O_3 + 6 variables meteorológicas), se imputaron vacíos y se estandarizaron los predictores. Por medio de la herramienta Rattle de R se particionó la base (70 %–30 %) y se entrenaron regresión logística, árbol CART, random forest y SVM radial con validación cruzada 10-fold. El desempeño se evaluó mediante AUC y F1. Se encontró que el random forest presentó la mayor capacidad predictiva (AUC = 0,87; F1 = 0,79). Radiación solar global, humedad relativa y temperatura del aire fueron las variables con mayor importancia Gini. Un árbol de decisión simplificado indicó que humedad < 20 % y radiación > 1,4 MJ m⁻² día⁻¹ elevan la probabilidad de exceder 20 µg m⁻³ de O_3 al 87 %. La metodología KDD demostró ser eficaz para generar modelos de alerta temprana; las condiciones cálidas, secas y altamente radiantes son los detonantes principales de episodios de ozono alto en Bucaramanga.

Palabras clave: Ozono, calidad del aire, KDD, Rattle, Minería de Datos, Random Forest, Regresión.

1. Introducción

El ozono troposférico (O_3) es un contaminante secundario que, incluso a concentraciones moderadas, provoca inflamación de las vías aéreas, disminución transitoria de la función pulmonar y un mayor riesgo de hospitalizaciones y mortalidad por causas cardiorrespiratorias (U.S. EPA, 2013). En consonancia con esa evidencia, la Organización Mundial de la Salud redujo en 2021 su valor guía a 100 µg m⁻³ para la media móvil de 8 h, subrayando la urgencia de gestionar este contaminante, en particular en ciudades de ingresos medios (WHO, 2021).

En Bucaramanga, una urbe andina caracterizada por una topografía de cañón y clima tropical de montaña, la vigilancia epidemiológica registró 443 casos de infección respiratoria aguda grave (IRAG) entre 2018 y 2023, además de 4 918 casos de enfermedad pulmonar obstructiva crónica (EPOC) y 1 614 casos de asma; el repunte de IRAG durante 2022 coincidió con los picos anuales de O_3 , lo que sugiere un vínculo sanitario directo (Secretaría de Salud de Bucaramanga, 2024). Estudios locales muestran que la presión atmosférica y la radiación solar global explican casi la mitad de la variabilidad mensual del ozono, aunque la influencia de otras variables meteorológicas es compleja

¹Estudiante Maestría en Biotecnología, Universidad de Santander (UDES).

²Profesor, Maestría en Estadística Aplicada y Analítica de Datos, Universidad de Santander (UDES); Unidades Tecnológicas de Santander (UTS).

³Profesor, Maestría en Estadística Aplicada y Analítica de Datos, Universidad de Santander (UDES).

⁴Investigador de mercados, Dirección de Analítica Académica, Universidad de Santander (UDES).

y, en muchos casos, no lineal (Gómez, 2024). La literatura internacional documenta que temperatura, radiación solar, humedad relativa y viento modulan la formación y dispersión de O_3 a escalas local y regional, aunque el peso relativo de cada factor depende de la latitud y de la estación (Fiore et al., 2015; Monks et al., 2015). Estas interacciones desbordan los enfoques estadísticos clásicos y exigen metodologías capaces de descubrir patrones sutiles y de alto orden en grandes conjuntos de datos.

2. Descubrimiento de Conocimiento en Bases de Datos (KDD)

De acuerdo con Fayyad, Piatetsky-Shapiro & Smyth (1996), menciona su aplicación al estudio de la calidad del aire que permite integrar las fases de selección, preprocesamiento, transformación, minería, evaluación e interpretación en un flujo reproducible que fortalece la comprensión de la dinámica atmosférica. En este contexto, el presente trabajo aplica la metodología KDD para clasificar los niveles de calidad del aire por ozono en Bucaramanga durante 2019–2023. Se compararon algoritmos de aprendizaje supervisado -regresión logística, árboles de decisión y Random Forest-, se evaluaron sus métricas de desempeño y se analizaron las variables meteorológicas más influyentes. Los hallazgos buscaron alimentar sistemas locales de alerta temprana y orientar políticas de gestión de la calidad del aire basadas en evidencia.

3. Materiales y Métodos

3.1. Datos de entrada

Se utilizó la serie mensual 2019–2023, disponible en la plataforma SISAIRe; el conjunto de datos se depuró para conservar únicamente los registros de las estaciones meteorológicas ubicadas en Bucaramanga y su área metropolitana, la base de datos obtenida incluye las concentraciones de O_3 ($\mu g\ m^{-3}$) y las variables meteorológicas: temperatura del aire (T_{aire} , $^{\circ}C$), radiación solar global (R_{global} , $MJ\ m^{-2}\ día^{-1}$), humedad relativa (H_{aire} , %), presión atmosférica (P , hPa) y velocidad del viento (v_{viento} , $m\ s^{-1}$). Cada registro se indexa por año y mes.

3.2. Depuración de datos

1. Se verificaron tipos de datos, rangos físicos plausibles y consistencia temporal.
2. Se realizó el tratamiento de valores faltantes, la proporción de celdas vacías fue $< 5\%$ por columna; se imputó la mediana de cada variable numérica para preservar la distribución.
3. Conversión de la variable objetivo. Se definió $O_3_{clase} = \text{“Bajo”} (\leq 20\ \mu g\ m^{-3}) / \text{“Alto”} (> 20\ \mu g\ m^{-3})$, siguiendo el umbral de la Resolución 2254–2017 (MinAmbiente, Colombia).
4. Estandarización numérica. Se aplicó centrado y escalado Z-score a todos los predictores continuos para homogenizar magnitudes.
5. El producto de esta fase fue un *data frame* de 60 observaciones $\times$ 10 variables listo para la minería de datos.

Todo el proceso de minería se llevó a cabo con la interfaz gráfica Rattle 5.5-1 (sobre R 4.3). Seguido de cargar el archivo depurado (pestaña Datos), se asignó la variable O_3_{clase} como objetivo y las

columnas numéricas meteorológicas como Entrada; Año y Mes quedaron como Identificadores. Se realizó una partición de datos, con proporción 70 % entrenamiento / 30 % prueba y semilla 2025, preservando la distribución “Bajo/Alto” de la variable objetivo.

4. Resultados y Discusión

La matriz de Spearman indica que R_{global} ($\rho = 0,55$) y T_{aire} ($\rho = 0,40$) se asocian positivamente con O_3 , mientras que H_{aire} presenta una relación inversa ($\rho = -0,47$). Estas tendencias respaldan la hipótesis fotoquímica del ozono: mayor radiación y temperatura favorecen su formación, en tanto la humedad la atenúa.

El *heat-map* derivado de k-means ($k = 10$) revela dos agrupaciones extremas. El Cluster 4 combina R_{global} alta, T_{aire} elevada y H_{aire} baja, concentrando 85 % de los registros “Alto”. El Cluster 7, opuesto en esas variables, reúne 91 % de los “Bajo”. Se observan dos grupos contrastantes: (i) alta T_{aire} y R_{global} , baja humedad: concentran los picos de O_3 (85 % registros “Alto”); (ii) baja T_{aire} , alta humedad: concentran los mínimos de O_3 (91 % registros “Bajo”). Estos patrones confirman que las combinaciones cálidas-secas favorecen la fotoproducción de ozono en el área de estudio.

En la comparación de los modelos de clasificación evaluados, se observa que el Random Forest obtiene el mejor desempeño global en todas las métricas consideradas. Este algoritmo alcanza una exactitud de 0,83, superando a las demás técnicas y mostrando una mayor capacidad para clasificar correctamente los casos. Además, su puntaje F1 (0,79) evidencia un adecuado equilibrio entre precisión y exhaustividad, lo cual resulta particularmente relevante en contextos donde pueden presentarse clases desbalanceadas. En términos de discriminación, el área bajo la curva ROC (AUC = 0,87) confirma su fortaleza al diferenciar entre categorías positivas y negativas en distintos puntos de corte.

El SVM con núcleo radial se posiciona como la segunda mejor alternativa, con una exactitud de 0,81, un F1 de 0,76 y un AUC de 0,84. La regresión logística presenta métricas intermedias (Accuracy = 0,78; F1 = 0,74; AUC = 0,81). El árbol de decisión (CART) obtiene los valores más bajos en todas las métricas (Accuracy = 0,75; F1 = 0,70; AUC = 0,77). Aunque su simplicidad y capacidad de visualización lo convierten en una herramienta útil para la exploración inicial de los datos y la interpretación de reglas de decisión, su rendimiento predictivo es limitado frente a los otros métodos.

Cuadro 1: Desempeño comparativo de modelos de clasificación.

Modelo	Accuracy	F1	AUC ROC
Regresión logística	0,78	0,74	0,81
árbol de decisión (CART)	0,75	0,70	0,77
Random Forest	0,83	0,79	0,87
SVM radial	0,81	0,76	0,84

5. Conclusiones

La implementación completa del ciclo KDD, apoyada en Rattle, permitió integrar y depurar los datos 2019–2023, descubrir patrones multivariantes y construir clasificadores con desempeño robusto

(AUC $\approx 0,85$), demostrando su utilidad para estudios de calidad del aire en Bucaramanga. Variables como la radiación solar global, humedad relativa y temperatura del aire fueron los predictores más influyentes; el modelo Random Forest—con F1 = 0,79 y la menor tasa de falsos negativos—resultó el más adecuado para alimentar sistemas de alerta temprana frente a picos de O_3 . Las reglas básicas derivadas (humedad < 20 % y radiación > 1,4 MJ m⁻² día⁻¹) ofrecen criterios rápidos para la gestión preventiva. Se recomienda incorporar datos horarios y precursores químicos (NO_x , COV) en estudios posteriores para refinar la predicción y ampliar la aplicabilidad del modelo.

Referencias

- [1] FAYYAD, U., PIATETSKY-SHAPIO, G. & SMYTH, P., *From data mining to knowledge discovery: an overview*. AI Magazine. **17**(3) (1996):37–54.
- [2] FIORE, A. M., NAIK, V. & LEIBENSPERGER, E., *Air quality and climate connections*. Journal of the Air & Waste Management Association. **65**(6) (2015):645–685.
- [3] MONKS, P. S., ARCHIBALD, A. T., COLETTE, A., COOPER, O., COYLE, M., DERWENT, R., ET AL., *Tropospheric ozone and its precursors from the urban to the global scale*. Atmospheric Chemistry and Physics. **15**(15) (2015):8889–8973.
- [4] GÓMEZ, A., *Análisis multivariante de la influencia de variables meteorológicas sobre la concentración de ozono en Bucaramanga*. Universidad Industrial de Santander, 2024.
- [5] SECRETARÍA DE SALUD DE BUCARAMANGA, *Boletín epidemiológico anual 2018–2023*. Alcaldía de Bucaramanga, 2024.
- [6] UNITED STATES ENVIRONMENTAL PROTECTION AGENCY, *Integrated science assessment for ozone and related photochemical oxidants*. U.S. EPA, 2013. Report No.: EPA/600/R-10/076F.
- [7] WORLD HEALTH ORGANIZATION, *WHO global air quality guidelines: particulate matter ($PM_{2,5}$ and PM_{10}), ozone, nitrogen dioxide, sulfur dioxide and carbon monoxide*. WHO, 2021.

5.4 El hechizo de lo aleatorio - de lo simple a lo sublime con Monte Carlo, Cadenas y MCMC

Johan Andrés Almanza Castillo¹, Luis Alejandro Masmela Caita²

Resumen

En esta charla se presentarán tres escenarios en los que la aleatoriedad se convierte en un recurso poderoso: la estimación de π mediante simulaciones de Monte Carlo; la estructura probabilística de las cadenas de Markov, ilustrada con el paseo aleatorio del caballo en el tablero de ajedrez; y la eficacia de los algoritmos de muestreo MCMC para aproximar integrales bayesianas intratables.

Palabras claves: Distribución de probabilidad, Monte Carlo, Cadenas de Markov, Metropolis-Hastings.

1. Introducción

Los métodos aleatorios se han consolidado como una de las herramientas más influyentes en las matemáticas aplicadas, la estadística y las ciencias computacionales. Por ello, esta charla busca mostrar cómo, a partir de problemas sencillos, emergen ideas profundas que conectan teoría, computación y aplicaciones contemporáneas.

Examinaremos ese funcionamiento en tres secciones: en las dos primeras presentaremos problemas simples resueltos mediante simulaciones de Monte Carlo y cadenas de Markov; finalmente, abordaremos el algoritmo de Metropolis-Hastings, que integra ambos enfoques en su formulación.

2. Métodos

2.1. El poder bruto de Monte Carlo – Cuando la fuerza es elegante

Problema ilustrativo: Aproximación de π .

La idea central consiste en estimar el área de un círculo inscrito en un cuadrado usando simulaciones aleatorias. El “giro matemático” radica en mostrar que este problema elemental conecta con la **Ley Fuerte de los Grandes Números**:

Teorema 1 (Ley fuerte de los grandes números). Sean $X_1, X_2, \dots$ v.a. i.i.d. con $\mathbb{E}[X_i] = \mu$. Entonces

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \xrightarrow{\text{c.s.}} \mu.$$

¹Universidad Distrital. Correo: jaalmanzac@udistrital.edu.co

²Universidad Distrital. Correo: lmasmela@udistrital.edu.co

Gracias a la ley de los grandes números, sabemos que este valor converge al área del círculo, que en este caso específico es π .

2.2. La memoria de las cadenas de Markov – Donde el azar tiene estructura

Problema ilustrativo: El paseo aleatorio del caballo (Knight's Tour).

Uno de los problemas clásicos en la teoría de cadenas de Markov es modelar el movimiento aleatorio de un caballo en un tablero de ajedrez. El problema plantea la siguiente pregunta: dado que el caballo inicia en una posición determinada, después de n movimientos, ¿en cuáles casillas puede encontrarse y con qué probabilidad? Para responder esto, es necesario comprender los movimientos del caballo, construir la matriz de transición correspondiente y analizar su evolución temporal.

En un tablero 8×8 , el caballo se mueve en forma de L: dos casillas en una dirección y una casilla perpendicular. El movimiento del caballo en el tablero constituye una **cadena de Markov**, donde cada casilla representa un estado. Las transiciones entre estados están determinadas por los movimientos legales disponibles desde cada casilla.

La propiedad fundamental de esta cadena es que cumple con la **propiedad de Markov**:

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = j \mid X_0, X_1, \dots, X_n) = \mathbb{P}(X_{n+1} = j \mid X_n),$$

lo que significa que la posición futura del caballo depende exclusivamente de su posición actual, no de su historial previo.

El comportamiento del caballo se describe mediante la **matriz de transición** $P \in \mathbb{R}^{64 \times 64}$, donde el elemento p_{ij} representa la probabilidad de transitar de la casilla i a la casilla j en un paso:

$$p_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{d_i} & \text{si } j \text{ es alcanzable desde } i, \\ 0 & \text{en caso contrario,} \end{cases}$$

siendo d_i el número de movimientos legales disponibles desde la casilla i . Cada fila de P suma uno, garantizando que sea una matriz estocástica.

Para determinar la distribución de probabilidades del caballo después de n movimientos. Sea $\mathbf{x}^{(0)}$ el vector de estado inicial, donde la componente i -ésima es 1 si el caballo comienza en la casilla i , y 0 en caso contrario:

$$\mathbf{x}^{(0)} = [0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0]^T,$$

La distribución de probabilidades después de n movimientos se obtiene mediante:

$$\mathbf{x}^{(n)} = (P^T)^n \mathbf{x}^{(0)},$$

o equivalentemente, si utilizamos vectores fila:

$$\mathbf{y}^{(n)} = \mathbf{x}^{(0)} P^n,$$

donde $\mathbf{y}_j^{(n)}$ representa la probabilidad de que el caballo se encuentre en la casilla j después de exactamente n movimientos.

2.3. La magia de MCMC – Muestrear lo incognoscible

En la estadística bayesiana, la cual basa su teoría en la Regla de Bayes, es común que la distribución posterior sea muy difícil de calcular analíticamente. Para esto se suelen usar algoritmos MCMC, los cuales son un método de Montecarlo vía cadenas de Markov y en este caso se ilustrará el Algoritmo de **Metropolis-Hastings**.

El algoritmo de Metrópolis-Hastings es un método fundamental para generar muestras de distribuciones complejas. Específicamente, genera una secuencia de muestras correlacionadas $\{\theta^{(t)}\}_{t=0}^N$ que convergen en distribución hacia la distribución objetivo $\pi(\theta | y)$. A pesar de la correlación entre muestras sucesivas, esta secuencia constituye una cadena de Markov ergódica que, bajo condiciones apropiadas, posee a $\pi(\theta | y)$ como distribución estacionaria.

El procedimiento se estructura en las siguientes etapas:

1. **Inicialización:** Se elige un valor inicial $\theta^{(0)}$ arbitrario.
2. **Iteraciones** ($t = 1, 2, \dots, N$): Para cada iteración se ejecutan tres pasos secuenciales:
 - **Paso 1: Propuesta.** Se genera un candidato θ^* desde la distribución de propuesta $q(\cdot | \theta^{(t-1)})$:

$$\theta^* \sim q(\cdot | \theta^{(t-1)}).$$

La distribución q debe ser fácil de muestrear; ejemplos comunes incluyen distribuciones normales con media $\theta^{(t-1)}$ (paseo aleatorio) o distribuciones independientes.

- **Paso 2: Razón de Aceptación.** Se calcula la razón de Hastings:

$$\alpha(\theta^* | \theta^{(t-1)}) = \min \left(1, \frac{\pi(\theta^* | y) \cdot q(\theta^{(t-1)} | \theta^*)}{\pi(\theta^{(t-1)} | y) \cdot q(\theta^* | \theta^{(t-1)})} \right).$$

Esta razón incorpora tanto la plausibilidad del candidato bajo la distribución objetivo como el sesgo de la propuesta.

- **Paso 3: Decisión de Aceptación.** Se genera $u \sim \text{Uniforme}(0, 1)$ y se actualiza la cadena según:

$$\theta^{(t)} = \begin{cases} \theta^* & \text{si } u < \alpha(\theta^* | \theta^{(t-1)}), \\ \theta^{(t-1)} & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

Usando este algoritmo se puede generar una cadena de Markov que converja a la distribución posterior, se mejora el funcionamiento de este, escogiendo diferentes distribuciones de propuesta, por ejemplo si es simétrica, se tiene que la razón de Hastings, es mucho más sencilla de calcular. **3.**

Conclusiones

La aleatoriedad se puede estructurar y, gracias a ello, lo que antes resultaba incognoscible se vuelve visible. Los métodos MCMC nos ayudan en esta ardua, pero importante, labor.

Referencias

- [1] HOFF, P. D., *A First Course in Bayesian Statistical Methods*. Springer, 2009. DOI: 10.1007/978-0-387-92407-6.
- [2] Gelman, Andrew; Hill, Jennifer. *Data Analysis Using Regression and Multilevel/Hierarchical Models*. Cambridge University Press, 2006.
- [3] PBS Digital Studios. *Can a Chess Piece Explain Markov Chains?* Infinite Series, Season 1, Episode 8, PBS, 2017.
- [4] CORREA MORALES, J. C. & BARRERA CAUSIL, C. J., *Introducción a la Estadística Bayesiana*. Editorial Universidad de Medellín, 2010. Disponible en: <https://n9.cl/fq5db>
- [5] WACKERLY, D. D., MENDENHALL III, W. & SCHEAFFER, R. L., *Estadística Matemática con Aplicaciones*. Cengage Learning, 2008. Disponible en: <https://n9.cl/eiwgu>
- [6] BLANCO CASTAÑEDA, L., *Probabilidad: Teoría y práctica*. Editorial Universidad Nacional de Colombia, 2023. Disponible en: <https://n9.cl/ap5dw>

5.5 Estimación RLAV, estudio comparativo en datos no normales

Alfonso Sánchez Hernández¹

Resumen

Existen familias completas de distribuciones de probabilidad, distintas a la normal, que pueden utilizar combinaciones convexas de ésta para producir otras, como es el caso de la distribución normal contaminada, o que mediante variaciones, se pueden obtener distribuciones asimétricas o de colas pesadas como las distribuciones g,h de Tukey, Jiménez and Martínez (2006). Existen también mezclas o mixturas de la distribución normal, con otras como la Uniforme o rectangular, que producen nuevas distribuciones tales como: Slash, Laplace y Cauchy, entre otras, Johnson (1949). En el presente trabajo se propone un sencillo modelo de regresión, en el que el error tiene cinco distribuciones: Normal, Normal Contaminada, Slash, Laplace y Cauchy. Se propone la existencia de multicolinealidad o dependencia de las variables independientes, y mediante un proceso de simulación se comparan los Errores Cuadrados Medios de los estimadores, usando regresión Ridge Ponderada y Regresión Ridge de Mínima Desviación Absoluta (RLAV). Estudios similares con pequeñas muestras han sido desarrollados por Pfaffenberger and Dielman (2019, [1]), Armstrong et al. (1979, [2]), Arthanari (1981, [3]), Koenker and Bassett Jr (1982, [4]), entre muchos otros. Por último se realiza una aplicación a datos reales.

Palabras & frases claves: Ridge Regression, RLAV, Slash.

1. Introducción

La distribución normal es la distribución de probabilidad clásica con la que Legendre y Gauss (1805), propusieron la metodología de los mínimos cuadrados, Stigler (1981, [5]). Rustagi (2014, [6]) y Rao (1973, [7]), en trabajos independientes, propusieron el uso de la Optimización Matemática en Estadística, que dió origen a nuevos métodos de regresión, Charnes et al (1955, [8]), proponen el uso del método simplex, para estimar parámetros en la regresión LAV (Least Absolute Value), de la cual Harter (1977, [9]) estudió la no unicidad. La regresión Robusta, Maronna et al (2019,[10]), la regresión cuantílica, Koenker et al (1982, [4]) y la regresión Ridge, (1970, [11]), son resultados relevantes del sin número de métodos existentes en la literatura para aplicar datos a problemas de regresión lineal simple y múltiple.

Esta metodología resulta interesante cuando todos los supuestos del modelo, normalidad de los errores, independencia de las observaciones y no colinealidad de las variables independientes, se cumple, las estimaciones de los parámetros resultan siendo las mejores. No obstante cuando los supuestos fallan, especialmente en muestras pequeñas de datos, con muchas variables independientes, el proceso de estimación clásico de mínimos cuadrados, no es el apropiado. Se debe acudir entonces a la aplicación de metodologías alternativas, que pueden llevar a estimaciones sesgadas, pero con menor error al de mínimos cuadrados. Autores como Arkin y Montgomery (1980, [12]), Vinod y Ullah (1981, [13]), Hemmerle y Carey (1983, [14]) y Casella (1985,[15]), proponen y discuten el uso de

¹Departamento de Matemáticas y Estadística, Universidad del Tolima, Ibagué, Colombia. Correo: asanchez@ut.edu.co

estimadores robustos aumentados, en los que se combina la regresión Ridge con otros, en particular con LAV, dando origen a los estimadores RLAV, que son el principal objetivo de este trabajo.

2. Materiales y métodos

Para el estudio y desarrollo de este trabajo se propone el modelo de regresión $y_i = 3 + 4x_{i1} + 5x_{i2} + \epsilon_i$, con $i = 1, 2, \dots, n$. Para el error se establecen las distribuciones: $N(0, 5)$, normal contaminada $0.90N(0, 1) + 0.10N(0, 5)$, y no normales: Slash(0, 1), Laplace(0, 2) y Cauchy(0, 1). Se proponen coeficientes de correlación bajos, medios y altos con valores de: 0.2, 0.5, 0 y 0.90, entre las variables x_1 y x_2 . Se simulan 1000 muestras de tamaños 50, 100 y 200. En todas las 1000 muestras se estiman: los Errores Cuadrados Medios (ECM) de los parámetros estimados en cada iteración: $\hat{\beta}_{ji}$ con $j = 0, 1, 2$ e $i = 1, 2, \dots, 1000$ y error cuadrado medio del número de condición CN , en cada iteración, utilizando las dos regresiones: Ridge y RLAV. Por último se construyen tablas comparativas de las estimaciones, para comprobar la eficiencia de la regresión RLAV, frente a la regresión Ridge.

3. Resultados

Los resultados se presentan en tablas como:

	$\rho = 0,5$									
n	OLS			Ridge-W			LAV-W			Cond.
	β_0	β_1	β_2	β_0	β_1	β_2	β_0	β_1	β_2	
50	3.0033	4.0041	5.0020	2.9989	4.0008	4.9986	3.0030	3.9999	5.0024	2.12
100	3.0076	4.0989	5.0040	3.0000	4.0056	4.9863	3.0002	4.8426	5.0884	1.86
200	2.8939	3.9020	5.0083	3.0000	3.9619	4.0043	3.0021	3.9620	5.2465	1.85

Table 1: Estimaciones finales: OLS, Ridge ponderado y LAV ponderado. Elaboración propia.

4. Conclusiones

La regresión ponderada Ridge y la regresión ponderada LAV, son procedimientos de regresión adecuados en la presencia de datos correlacionados. En el proceso de estimación de parámetros, el valor estimado de β_0 , no se puede realizar de manera directa, en estos dos tipos de procedimiento se debe estimar después de obtener las estimaciones de β_1 y β_2 .

En el proceso de estimación se pudo evidenciar que la regresión RLAV es ligeramente superior, cuando la correlación entre las variables independientes es alta.

En la presentación de la ponencia se mostrarán más resultados y se indicará la utilización de un ejemplo con datos reales.

Referencias

- [1] PFAFFENBERGER, R. C., DIELMAN, T. E., *A comparison of regression estimators when both multicollinearity and outliers are present*. En: *Robust Regression*, pp. 243–270. Routledge, New York, 1990.
- [2] ARMSTRONG, R.D. AND FROME, E.L. AND KUNG, D.S., *A revised simplex algorithm for the absolute deviation curve fitting problem*. Communications in Statistics-Simulation and Computation. **8**(2), (1979):175–190.
- [3] ARTHANARI, T.S. AND DODGE, Y., *Mathematical Programming in Statistics*. John Wiley & Sons Inc. New York, 1981.
- [4] KOENKER, R. AND BASSETT, J.G., *Robust tests for heteroscedasticity based on regression quantiles*. Econometrica. (1982):43–61.
- [5] STIGLER, S.M., *Gauss and the invention of least squares*. The Annals of Statistics. (1985):465–474.
- [6] RUSTAGI, J.S., *Optimization Techniques in Statistics*. Elsevier, 2014.
- [7] RAO, C.R., *Linear statistical inference and its applications*. Wiley. New York, 1965.
- [8] CHARNES, A., COOPER, W.W. AND FERGUSON, R.O., *Optimal estimation of executive compensation by linear programming*. Management Science. (1955):138–151.
- [9] HARTER, H.L., *Nonuniqueness of Least Absolute Values Regression*. Comm. Stat. **6** (1977):829–838.
- [10] MARONNA, R.A. AND MARTIN, R.D AND YOHAI, V.J. AND SALIBIÁN-BARRERA, M., *Robust statistics: theory and methods (with R)*. John Wiley & Sons, 2019.
- [11] HOERL, A.E. AND KENNARD, R.W., *Ridge regression: Biased estimation for nonorthogonal problems*. Technometrics. (1970):55–67.
- [12] ARKIN, R.G. AND MONTGOMERY, D.C., *Augmented robust estimators*. Technometrics. (1980):333–341.
- [13] VINOD, H.D. AND ULLAH, A., *Recent Advance in Regression Methods*. Marcel Dekker, New York, 1981.
- [14] HEMMERLE, W.J. AND CAREY, M.B., *Some properties of generalized ridge estimators*. Commun. Stat. B Simul. Comput. (1983):239–253.
- [15] CASELLA, G., *Condicion numbers and minimax ridge-regression*. J. Am. Stat. Assoc. (1985):753–758.

5.6 Forecasting Multi-Modal Crime Events using Neural Network Models

Mayra Vega¹, Francisco Gómez²

Resumen

El crimen representa uno de los principales problemas sociales a nivel global, afectando la seguridad y el bienestar de millones de personas. En este trabajo se presentan los resultados de una investigación orientada a explorar las relaciones entre diferentes tipos de delitos con el fin de construir modelos predictivos más robustos. Para ello, se entrenaron redes neuronales para predecir robo y allanamiento en la ciudad de Chicago durante el mes de enero de 2019. Los resultados muestran que las redes entrenadas de manera conjunta con ambos tipos de crímenes presentan desempeños similares a aquellas que fueron entrenadas de forma individual para predecir exclusivamente hurto o allanamiento. Este hallazgo sugiere que la incorporación de múltiples categorías de delito no garantiza mejoras inmediatas en la predicción, aunque sienta las bases para que futuras investigaciones profundicen en la explotación de relaciones entre crímenes.

Palabras & frases claves: Predicción del crimen, redes neuronales.

1. Introducción

El crimen, entendido como cualquier acción prohibida por la legislación penal de un país, constituye una de las principales amenazas a la vida de las personas [2]. De acuerdo con los Objetivos de Desarrollo Sostenible de la ONU, reducir la violencia y fortalecer la justicia son prioridades globales, particularmente en contextos de alta criminalidad como América Latina [3]. Por ejemplo, en esta región, la disparidad entre la proporción de la población (9 %) y la proporción de homicidios a nivel mundial (33 %) evidencia la magnitud del problema [7].

Con el fin de responder a esta problemática, en los últimos años gobiernos e instituciones han desarrollado estrategias de seguridad predictiva (predictive policing), las cuales emplean datos históricos, herramientas geoespaciales y modelos estadísticos o de aprendizaje automático para anticipar dónde y cuándo podrían ocurrir ciertos delitos [2, 5]. Estas herramientas buscan mejorar el entendimiento de las dinámicas criminales y apoyar la asignación de recursos para la mitigación de los efectos del crimen [2, 5].

Algunos de estos enfoques han resultado en avances significativos en la mitigación del crimen. No obstante, aún persisten desafíos que limitan su efectividad. Por ejemplo, la baja frecuencia de ocurrencia de ciertos comportamientos criminales como los homicidios, en comparación con otros de alta incidencia como las riñas. Esta ausencia de observaciones para la caracterización puede reducir la capacidad de generalización de los modelos, debido a la alta dispersión, la distribución espacial típicamente heterogénea, y la baja dependencia temporal [8, 4, 6].

Evidencia reciente sugiere que distintas tipologías de fenómenos criminales no ocurren de manera aislada, sino que pueden estar estrechamente interrelacionadas [4, 6]. En ciudades como Bogotá

¹Universidad Nacional de Colombia. Correo: mvegan@unal.edu.co

²Universidad Nacional de Colombia. Correo: fagomezj@unal.edu.co

(Colombia), por ejemplo, la ocurrencia de homicidios suele mostrar vínculos con episodios previos de riñas, y los robos a inmuebles (allanamiento) pueden estar conectados con patrones de atracos en zonas cercanas [9, 10, 11, 12]. Estas asociaciones indican que ciertos delitos pueden funcionar como precursores, facilitadores o manifestaciones complementarias de otras dinámicas criminales [4, 6, 12]. Basados en esta observación, algunos trabajos recientes han propuesto enfrentar el problema de la baja ocurrencia de ciertos crímenes, mediante el uso de datos complementarios de otros crímenes, bajo la hipótesis de que pueden existir correlaciones útiles para la predicción de delitos poco frecuentes [4, 6]. No obstante, el potencial de estas relaciones aún no ha sido explorado de manera suficiente en modelos de aprendizaje profundo, a pesar de su capacidad para capturar patrones complejos en datos espaciales y temporales.

La presente investigación evalúa el potencial de integrar múltiples categorías de delitos en modelos de aprendizaje profundo para la predicción de hurto y allanamiento en la ciudad de Chicago. A partir de datos georreferenciados del Departamento de Policía de Chicago, se entrenaron modelos conjuntos e individuales con el fin de determinar si la combinación de delitos contribuye a mejorar el desempeño o si, por el contrario, los modelos especializados siguen siendo más efectivos para delitos con dinámicas particulares.

2. Resultados

Las Figuras 1 y 2 ilustran la comparación entre los mapas de predicción y los mapas reales de crímenes para el 16 de enero de 2019. Se evidencia que las predicciones para allanamiento son poco precisas debido a la baja frecuencia y dispersión de este delito, mientras que para hurto las predicciones resultan más acertadas al concentrarse en múltiples zonas de la ciudad.

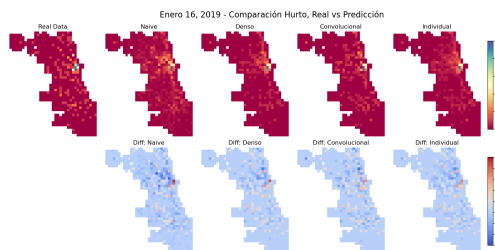


Figura 1: Mapas de predicción y diferencia frente a los datos reales para hurto (16 de enero de 2019).

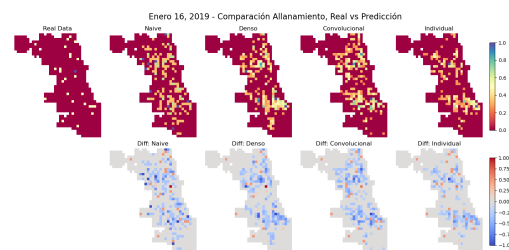


Figura 2: Mapas de predicción y diferencia frente a los datos reales para allanamiento (16 de enero de 2019).

La Tabla 1 reporta los valores de MSE de los modelos para hurto y allanamiento. Como puede observarse para ambos delitos, el MSE de las redes neuronales es bastante cercano, lo cual indica que la capacidad de ajuste de estos modelos es similar y que las diferencias de desempeño no se explican únicamente por esta métrica.

La Figura 3 reporta los resultados para PAI y PEI*. El PAI de hurto es mayor que el de allanamiento en todos los modelos, lo que refleja la dificultad de capturar patrones de un delito menos frecuente y más disperso. En contraste, el modelo naive presenta los valores más altos de PAI para ambos

Cuadro 1: Valores de MSE para hurto y allanamiento.

Modelo	Hurto (MSE)	Allanamiento (MSE)
Naive	12.053	0.453
Red densa	0.237	0.038
Conv3D	0.280	0.039
Modelo individual	0.238	0.038

delitos, lo que significa que, aunque logra concentrar los crímenes en las áreas seleccionadas, lo hace a costa de generalizar de manera excesiva y sin capturar la complejidad espacial y temporal de los datos, limitando su utilidad práctica para predicción. Por otra parte, el PEI* para hurto, bajo un 20 % de cobertura, supera el 65 % en la red densa y en el modelo individual, lo que resalta su capacidad de concentrar los recursos policiales en áreas con alta ocurrencia de este delito.

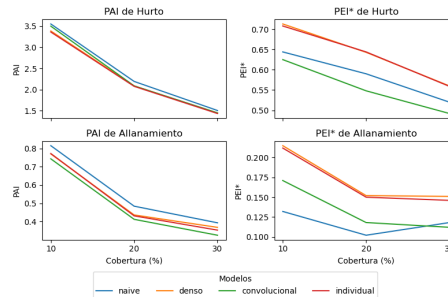


Figura 3: PAI y PEI*.

3. Conclusiones

Los resultados muestran que el mejor modelo conjunto (red densa) obtiene métricas similares a las de los modelos entrenados individualmente. Esto indica que, aunque integrar distintos tipos de delitos no empeora el desempeño, tampoco se alcanzan mejoras claras. Este hallazgo sugiere que la relación entre diferentes categorías de crímenes aún no está siendo explotada de manera efectiva por las arquitecturas evaluadas.

Como trabajo futuro se propone explorar el uso de Generative Adversarial Networks (GANs), modelos capaces de aprender la distribución subyacente de los datos. Dado que las GANs pueden capturar dependencias complejas, representan una alternativa prometedora para identificar correlaciones entre diferentes tipos de crímenes y, en consecuencia, mejorar la capacidad predictiva de los modelos.

Referencias

- [1] CHICAGO POLICE DEPARTMENT, *Crimes - 2001 to present: City of Chicago Data Portal*. Chicago Data Portal, 2025. Disponible en: <https://data.cityofchicago.org/Public-Safety/>

Crimes-2001-to-Present/ijzp-q8t2/about_data.

- [2] LAMOND, G., *What is a crime?* Oxford Journal of Legal Studies. **27**(4) (2007):609–632.
- [3] NACIONES UNIDAS, *La Agenda 2030 y los Objetivos de Desarrollo Sostenible: una oportunidad para América Latina y el Caribe*, 2018.
- [4] MORENO PABÓN, J. S., RUBIO, M. D., CASTAÑO, Y., RIASCOS, A. J. & DÍAZ, P. R., *A manifold learning data enrichment methodology for homicide prediction*. Proceedings of the 7th International Conference on Behavioural and Social Computing (BESC). (2020):1–4.
- [5] PERRY, W. L., MCINNIS, B., PRICE, C. C., SMITH, S. C. & HOLLYWOOD, J. S., *Predictive policing: The role of crime forecasting in law enforcement operations*. RAND Corporation, 2013.
- [6] RIBEIRO, J., MENESES, L., COSTA, D., MIRANDA, W. & ALVES, R., *Prediction of homicides in urban centers: A machine learning approach*. En: Intelligent Systems and Applications. Springer. (2022):344–361.
- [7] JAITMAN, LAURA AND ANAUATI, VICTORIA, *The Dark Figure of Crime in Latin America and the Caribbean*. Journal of Economics, Race, and Policy, **3** (2020):76–95. DOI: 10.1007/s41996-019-00042-0.
- [8] GONZÁLEZ DÍAZ, ANDRÉS, *12.221 homicidios en Colombia durante el 2022*. Website, Universidad del Externado, 2022. Disponible en: <https://www.uexternado.edu.co/delfos-centro-analisis-datos/homicidios-en-colombia-durante-el-2022/>.
- [9] BRIZ-REDÓN, ÁLVARO AND MATEU, JORGE, *A mechanistic bivariate point process model for crime pattern analysis*. Stat, **12**(1) (2022):e537. DOI: 10.1002/sta4.537.
- [10] ALCALDÍA MAYOR DE BOGOTÁ, SECRETARÍA DISTRITAL DE SEGURIDAD, CONVIVENCIA Y JUSTICIA, *En Bogotá, cuatro de cada diez homicidios comienzan con una riña*, 2025. Disponible en: <https://bogota.gov.co/mi-ciudad/seguridad/en-bogota-cuatro-de-cada-diez-homicidios-comienzan-con-una-rina-2025>.
- [11] VARGAS VALENCIA, J. L., IBÁÑEZ PEDRAZA, R., NORZA CÉSPEDES, E. N., DUARTE VELÁSQUEZ, Y. A., PATIÑO GALVIS, M. AND ERASO CHAMORRO, A., *Criminalidad en contexto COVID año 2020*. Revista Criminológica, **63**(3) (2021):9–31. ISSN: 1794-3108. Disponible en: <https://www.policia.gov.co/sites/default/files/v63n3a01.pdf>.
- [12] MOHLER, G. O., SHORT, M. B., BRANTINGHAM, P. J., SCHOENBERG, F. P. AND TITA, G. E., *Self-Exciting Point Process Modeling of Crime*. Journal of the American Statistical Association, **106**(493) (2011):100–108. DOI: 10.1198/jasa.2011.ap09546. Disponible en: <https://doi.org/10.1198/jasa.2011.ap09546>.

5.7 Impacto de la presión arterial sistólica acumulada y los serios eventos adversos en la eficacia del tratamiento intensivo de la presión arterial: un ensayo clínico aleatorizado

Oscar Leonel Rueda-Ochoa¹, María Alejandra Reyes,¹ Ronnie Celis-Amaya,¹
Catalina Herrán-Fonseca², Dimitris Rizopoulos³

Resumen

El estudio SPRINT [1] mostró que el tratamiento intensivo de la presión arterial sistólica (PAS) reduce de manera sostenida y significativa en un 25 % el desenlace primario. Sin embargo, recientemente, el Grupo SPRINT condujo un análisis secundario para evaluar si este efecto protector se mantenía post ensayo clínico [2]. Al considerar las medidas repetidas de la PAS y aplicar un modelo de regresión lineal mixto, encontraron que la intervención perdía su efecto, lo cual fue atribuido a la pérdida del control de la PAS en el periodo post-ensayo. Nuestro grupo demostró previamente que incluso dentro del ensayo, este efecto protector se pierde en diferentes tiempos de seguimiento, según los subgrupos analizados [3]. En este trabajo profundizamos en las posibles causas que explican esta divergencia en los resultados cuando se aplica el modelo de riesgos proporcionales de Cox (Cox) frente al *Joint Model Analysis* (cJM) [4] dentro del ensayo.

Incluimos 9068 participantes con 128 139 mediciones repetidas de la PAS, asignados aleatoriamente a un tratamiento intensivo (PAS < 120 mmHg) versus un tratamiento estándar (PAS entre 135 y 139 mmHg). Utilizamos un cJM que combina el análisis de datos longitudinales de medidas repetidas de la PAS y el modelo de Cox. Además, se evaluó la asociación causal de los eventos adversos severos (EAS) y la variabilidad de la presión arterial (VPA) con el desenlace compuesto de infarto del miocardio, otros síndromes coronarios agudos, insuficiencia cardíaca, accidente cerebrovascular y mortalidad cardiovascular.

El efecto protector del tratamiento intensivo perdió significancia durante el seguimiento dentro del ensayo, tanto en la población total (3.4 años) como en mujeres (1.1 años), pacientes con enfermedad cardiovascular (1.3 años), enfermedad renal crónica (1.3 años), raza negra (1.8 años), menores de 75 años (2.1 años) y en aquellos que sufrieron EAS (3.4 años) en comparación con los que no los tuvieron (4.2 años). El tratamiento intensivo incrementó de manera significativa la VPA sistólica y, además, los EAS en el grupo con tratamiento intensivo incrementaron tres veces más el riesgo del desenlace primario comparados con los del tratamiento estándar.

Se evidencia una pérdida del efecto protector de la intervención durante el ensayo y se genera la paradoja de Simpson [5, 6]. El beneficio inicial del tratamiento intensivo podría verse contrarrestado por el incremento en la VPA y el desarrollo de EAS durante el seguimiento.

Palabras y frases claves: Hipertensión arterial; tratamiento intensivo; modelo de Cox; *Joint Model Analysis*; paradoja de Simpson.

1. Introducción

¹Grupo de Investigación en Electrocardiografía, Semillero de Investigación Cardiovascular, Universidad Industrial de Santander (UIS).

²Facultad de Ciencias de la Salud, Programa de Medicina, Universidad Autónoma de Bucaramanga (UNAB).

³Departamento de Bioestadística, Erasmus University, Rotterdam, Países Bajos.

La hipertensión arterial es el principal factor de riesgo cardiovascular modificable [7]. Múltiples ensayos clínicos han demostrado que un descenso en las cifras de presión arterial disminuye el riesgo de eventos cardiovasculares mayores [8]. Esto ha motivado a los investigadores a probar estrategias más intensivas en el descenso de las cifras de presión arterial. Una de las primeras iniciativas de terapia intensiva fue el estudio ACCORD [9], ensayo clínico factorial en pacientes con diabetes mellitus y alto riesgo cardiovascular, que comparó un descenso en la presión arterial sistólica < 120 mmHg (tratamiento intensivo) vs. < 140 mmHg (tratamiento estándar) y no encontró beneficio significativo en relación con el desenlace primario compuesto (HR: 0.88; IC95 % 0.73–1.06), pero sí evidenció mayores eventos adversos graves atribuidos a la intervención en el grupo intensivo (3.3 %) en comparación con el grupo estándar (1.27 %; $p < 0,001$). Los resultados neutros de este ensayo fueron atribuidos a un bajo poder estadístico y al diseño factorial, que además evaluó simultáneamente un adecuado control glicémico y lipídico [10].

El estudio SPRINT [1] evaluó de nuevo los beneficios de una terapia intensiva de la presión arterial sistólica (< 120 mmHg), pero corrigiendo las falencias previas del estudio ACCORD, es decir, excluyendo pacientes diabéticos, aumentando el tamaño de muestra y evaluando solamente la intervención sobre la presión arterial, evitando así un diseño factorial. Los resultados del estudio SPRINT mostraron una disminución significativa y sostenida del desenlace primario (HR: 0.75; IC95 % 0.64–0.89), tanto en la población total como en cada uno de los subgrupos bajo estudio, mostrando a la vez que el porcentaje total de eventos adversos dados por la intervención fue similar en los grupos en estudio. Sin embargo, algunos eventos adversos como hipotensión, síncope, anomalías electrolíticas y lesión renal aguda fueron más frecuentes en el grupo intensivo.

Recientemente, el Grupo SPRINT condujo un análisis secundario para evaluar si este efecto protector se mantenía post ensayo clínico [2]. Al considerar las medidas repetidas de la PAS y aplicar un modelo de regresión lineal mixto, encontraron que la intervención perdía su efecto, lo cual fue atribuido a la pérdida del control de la PAS en el periodo post-ensayo. Nuestro grupo demostró previamente que incluso dentro del ensayo, este efecto protector se pierde en diferentes tiempos de seguimiento, según los subgrupos analizados [3]. En este trabajo profundizamos en las posibles causas que explican esta divergencia en los resultados cuando se aplica el modelo de riesgos proporcionales de Cox (Cox) frente al *Joint Model Analysis* (cJM) [4] dentro del ensayo.

2. Resultados

Se incluyeron 9068 participantes con 128 139 mediciones repetidas de la PAS. Similar al estudio original SPRINT, los grupos bajo estudio estaban balanceados en todas las covariables. Ambos grupos mantuvieron su PAS promedio esperada durante todo el seguimiento. El *hazard ratio* (HR) para el tratamiento intensivo en la población total, usando el modelo de Cox, fue similar al reporte original del SPRINT (HR: 0.75; IC95 % 0.63–0.89). Usando el cJM, el HR fue 0.60 (IC95 % 0.50–0.72) al inicio del tratamiento. A diferencia de lo mostrado en el modelo de Cox, usando el cJM se observa que el efecto protector del tratamiento intensivo perdió significancia durante el seguimiento dentro del ensayo, tanto en la población total (3.4 años) como en mujeres (1.1 años), pacientes con enfermedad cardiovascular (1.3 años), enfermedad renal crónica (1.3 años), raza negra (1.8 años), menores de 75 años (2.1 años) y en aquellos que sufrieron EAS (3.4 años) en comparación con los que no los tuvieron (4.2 años). El tratamiento intensivo incrementó de manera significativa la VPA sistólica y, además, los EAS en el grupo con tratamiento intensivo incrementaron aproximadamente tres veces el riesgo del desenlace primario comparados con los del tratamiento estándar.

3. Discusión

El condicionamiento basado en variables posteriores a la aleatorización puede dificultar la interpretación del efecto del tratamiento. Por ello, hemos optado por trabajar con el enfoque de cJM⁴, que no condiciona la PAS tras la aleatorización, sino que la trata como un resultado. En particular, el cJM utiliza un modelo lineal mixto para la PAS que permite explícitamente diferentes perfiles de PAS en los dos grupos de tratamiento. Además, entre otras cosas, tiene en cuenta las correlaciones en las mediciones repetidas de la PAS por paciente, la falta de datos aleatorios y la naturaleza endógena de la PAS, que se relacionan con las dificultades de interpretación. El efecto total de una intervención es la suma de sus efectos sobre el resultado a través de todos los mecanismos y puede considerarse como un efecto con dos componentes: un efecto indirecto (en SPRINT, la parte producida por cambios en la PAS) y un efecto directo (en SPRINT, la parte no producida por cambios en la PAS). Por ello, nuestro modelo de riesgos proporcionales para el resultado principal contiene dos coeficientes separados para los efectos directos e indirectos. Más específicamente, nuestro modelo se define matemáticamente de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \text{SBP}_i(\text{time}) &= f(\text{time}, \beta, \text{Treat}) \\ &\quad + \text{measurement\_error}_i, \\ h_i(\text{time}) &= h_0(\text{time}) \exp[\gamma \cdot \text{Treat} + \alpha \cdot \text{cumulative}\{f(\text{time}, \beta, \text{Treat})\}]. \end{aligned} \quad (1)$$

El primer modelo es el modelo lineal mixto para la PAS, que, como se mencionó anteriormente, considera explícitamente las diferentes evoluciones de la PAS por grupo de tratamiento mediante la función $f(\text{tiempo}, b, \text{Tratamiento})$. Los coeficientes b cuantifican la diferencia entre los grupos de tratamiento en la PAS a lo largo del tiempo.

El segundo modelo es el modelo de riesgos proporcionales para el criterio de valoración principal; $h(\text{tiempo})$ denota la función de riesgo del paciente i , y $h_0(\text{tiempo})$ es el riesgo basal. El efecto indirecto del tratamiento producido por los cambios en la PAS a lo largo del tiempo se captura en el término « $\alpha \cdot \text{acumulativo}\{f(\text{tiempo}, b, \text{Tratamiento})\}$ », donde α es el coeficiente que cuantifica la fuerza de la asociación indirecta. El efecto directo (residual) del tratamiento es el término « $\gamma \cdot \text{Tratamiento}$ », donde γ es el coeficiente que cuantifica la fuerza de la asociación directa. El efecto total que hemos reportado es la suma de los dos.

4. Conclusiones

Se evidencia una pérdida del efecto protector de la intervención durante el ensayo y se genera la paradoja de Simpson [5, 6]. El beneficio inicial del tratamiento intensivo podría verse contrarrestado por el incremento en la VPA y el desarrollo de EAS durante el seguimiento. Estos hallazgos resaltan la importancia de considerar conjuntamente la exposición acumulada, la variabilidad de la presión arterial y la ocurrencia de eventos adversos severos al evaluar la eficacia de estrategias intensivas de tratamiento.

Referencias

- [1] WRIGHT JT JR, WILLIAMSON JD, WHELTON PK, SNYDER JK, SINK KM, ROCCO MV, ET AL. *A randomized trial of intensive versus standard blood-pressure control*. N Engl J Med. **373**(22) (2015):2103–16.
- [2] JAEGER BC, BRESS AP, BUNDY JD, CHEUNG AK, CUSHMAN WC, DRAWZ PE, ET AL. *Longer-term all-cause and cardiovascular mortality with intensive blood pressure control: a secondary analysis of a randomized clinical trial*. JAMA Cardiol. **7**(11) (2022):1138–1146.
- [3] RUEDA-OCHOA OL, ROJAS LZ, AHMAD S, VAN DUIN CM, IKRAM MA, DECKERS JW, FRANCO OH, RIZOPOULOS D, KAVOUSI M. *Impact of cumulative SBP and serious adverse events on efficacy of intensive blood pressure treatment: a randomized clinical trial*. J Hypertens. **37**(5) (2019):1058–1069.
- [4] RIZOPOULOS D. *Joint Models for Longitudinal and Time-to-Event Data: With Applications in R*. Boca Raton, FL: CRC Press, 2012.
- [5] BONOVAS S, PIOVANI D. *Simpson’s paradox in clinical research: a cautionary tale*. J Clin Med. **12**(4) (2023):1633.
- [6] ABRAMSON NS, KELSEY SF, SAFAR P, SUTTON-TYRRELL K. *Simpson’s paradox and clinical trials: what you find is not necessarily what you prove*. Ann Emerg Med. **21**(12) (1992):1480–1482.
- [7] BAUTISTA LE, RUEDA OL. *Hypertension*. En: Remington PL, Rudd CM, Brown DR, editores. Chronic Disease Epidemiology, Prevention, and Control. 5ª ed. Washington, DC: American Public Health Association, 2023.
- [8] PFEFFER MA, McMURRAY JJV. *Lessons in uncertainty and humility—clinical trials involving hypertension*. N Engl J Med. **375**(18) (2016):1756–66.
- [9] CUSHMAN WC, EVANS GW, BYINGTON RP, GOFF DC JR, GRIMM RH JR, CUTLER JA, ET AL. *Effects of intensive blood-pressure control in type 2 diabetes mellitus*. N Engl J Med. **362**(17) (2010):1575–85.
- [10] PFEFFER MA. *ACCORD(ing) to a trialist*. Circulation. **122** (2010):841–3.
- [11] RUEDA-OCHOA OL, KAVOUSI M, RIZOPOULOS D. *Reply*. J Hypertens. **37**(8) (2019):1729–1733.

5.8 La subasta futbolera: Adoptando el enfoque EBP en una clase de Estadística básica

Cristian Rondón¹, Tulia Esther Rivera Flórez¹

Resumen

La enseñanza de la Estadística cuenta hoy con una amplia variedad de recursos tecnológicos y de didáctica. En cuanto a metodologías, la Enseñanza Basada en Proyectos (EBP) se ha posicionado como un enfoque eficiente tanto para la enseñanza como la evaluación. Este trabajo describe la adaptación de un modelo de subasta al contexto futbolero en la cual los insumos fundamentales son los logros deportivos presentados en lenguaje estadístico.

Palabras & frases claves: Enseñanza basada en proyectos, Enfoque activo, Educación estadística, Modelo EBP

1. Introducción

1.1. Definición de la Enseñanza Basada en Proyectos (EBP)

La Enseñanza Basada en Proyectos (EBP) es una metodología activa y participativa en la que el docente estructura el proceso de enseñanza alrededor de un reto o tema concreto que articula un contexto con los contenidos curriculares, habilidades y actitudes en procura de una solución. Este enfoque busca que los estudiantes aprendan haciendo, su base es la resolución de problemas, la investigación guiada y el aprendizaje significativo en el sentido más profundo de Ausubel. En la EBP, el profesor cumple un rol de diseñador y guía del aprendizaje, organizando las fases del proyecto, estableciendo objetivos y promoviendo la reflexión sobre el proceso (Fundación Chile, 2021).

1.2. Fundamentos teóricos de la EBP

La EBP se sustenta en los principios del constructivismo, corriente pedagógica que sostiene que el conocimiento no se transmite pasivamente, sino que se construye activamente mediante la experiencia (Piaget, 1970; Vygotsky, 1978). Desde esta perspectiva, el aprendizaje ocurre cuando el estudiante interactúa con problemas reales, colabora con otros y aplica los conceptos teóricos a situaciones prácticas. Según Fundación Chile (2021) y Thomas (2000), una experiencia de EBP debe presentar las siguientes características:

- Proyecto articulador del aprendizaje: el conocimiento gira en torno a un gran tema que integra varias áreas o competencias.
- Planificación docente estructurada: el profesor diseña las fases del proyecto, define los objetivos, recursos y criterios de evaluación.
- Contexto real o significativo: el proyecto aborda situaciones del mundo real o simulaciones cercanas al entorno de los estudiantes.

¹Universidad Industrial de Santander.

- Participación activa del estudiante: aunque el docente guía el proceso, el alumno asume un rol activo en la resolución de tareas y elaboración de productos.
- Trabajo colaborativo: se fomenta la interacción, la comunicación y la toma de decisiones en grupo.
- Evaluación continua y formativa: la evaluación se realiza durante todo el proceso, valorando tanto el desempeño individual como el colectivo.
- Producto final o entregable: el proyecto culmina con una producción concreta (informe, presentación, prototipo, simulación, etc.) que evidencia el aprendizaje.

2. Metodología

Adoptar el enfoque de Enseñanza Basada en Proyectos (EBP) implica que el docente debe diseñar una experiencia de aprendizaje en torno a un objetivo o reto que debe ser motivante, significativo y contextualizado. En este caso, se adoptó el tema de la gestión deportiva con presupuesto limitado (tope a invertir), al cual denominaremos subasta deportiva, el cual permite recrear procesos de toma de decisiones basados en evidencia deportiva y estadística al tiempo que se fomenta el trabajo colaborativo y la planificación estratégica. En nuestra adaptación, el propósito era incentivar el uso del análisis de datos ya que la información suministrada demandaba lectura de gráficas, análisis de medidas descriptivas básicas de tendencia central y de dispersión; así también, las decisiones involucradas tenían que ver con identificar si el jugador subastado era útil para satisfacer unos objetivos deportivos previamente propuestos y acciones estratégicas para limitar el margen financiero del equipo oponente con lo cual había que ofertar por jugadores que incluso no son ideales para el equipo sólo para hacer subir su precio y provocar una mayor inversión del equipo contrario. Al final, el ganador no sólo dependía de quien completará los objetivos sino quien tuviera un mejor equipo posición por posición en la cancha.

La implementación práctica se realizó en el contexto de una clase de Didáctica de la Probabilidad y la Estadística impartida para estudiantes de Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Industrial de Santander. Una vez conformados los equipos, en nuestro caso fueron sólo dos y con ellos se condujeron las siguientes etapas:

1. **Planteamiento del desafío docente:** presentación a los estudiantes del reto que consistía en conformar el mejor equipo de fútbol (11 jugadores) con un presupuesto limitado, 500 millones de dólares, en el contexto de una liga de fútbol ideada para el proyecto. Cada equipo iniciaba con una nómina previa de 8 jugadores por cuanto debía adquirir 3 más obedeciendo a unos objetivos determinados como se muestra a continuación, dos de estos eran diferentes para cada equipo y uno común, un equipo desconoce los objetivos del otro.

Objetivos de victoria:

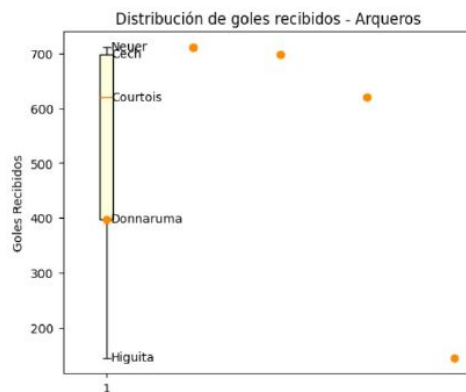
Equipo A:

- Tener en la plantilla 3 jugadores sudamericanos campeones del mundo y un europeo campeón de la Champions.
- Tener 2 jugadores con la mayor desviación individual respecto a la media del grupo. (El grupo son los otros jugadores en su posición).

- Suponiendo una distribución normal de una variable o indicador de desempeño en futbol, tener 3 jugadores que caen dentro del rango de rendimiento típico (es decir, a menos de una desviación estándar de la media).

Equipo B:

- Tener en la plantilla a 3 jugadores campeones de la Copa América y un europeo campeón del mundo.
 - Tener 2 jugadores con la mayor desviación individual respecto a la media del grupo.
 - Suponiendo una distribución normal de una variable o indicador de desempeño en futbol, tener 3 jugadores atípicos, es decir, a más de dos desviaciones estándar de la media.
2. **Orientación e investigación guiada:** cada equipo analiza la información suministrada que consistía en una descripción del rendimiento de los jugadores a través de recursos estadísticos, la información extradeportiva se excluyó dado que los jugadores a subastar eran de fama a nivel nacional e internacional; a continuación, debían diseñar la estrategia para enfrentar la subasta. Por ejemplo, para la posición de arquero se ofreció la siguiente información:



ARQUEROS	Goles recibidos
Donnarumma	398
Neuer	711
Peter check	698
Courtuos	620
Rene Higuaita	146

3. **Subasta deportiva:** Uno a uno se van presentando los jugadores que buscan equipo, para cada uno se presenta información como se ha indicado, aquí es importante persuadir a los equipos de analizarla para proceder a ofertar en la puja por cada jugador; si un jugador es útil para los dos equipos entonces habrá puja, de no serlo para ninguno se procede a abrir la oferta por otro jugador. En algunos casos puede ser que un jugador no sea útil para completar los objetivos pero futbolísticamente hablando es muy superior a los demás jugadores, entonces el grupo decidirá pujar por ese jugador; es por eso, que se tiene en cuenta el ítem 3 de victoria como algo indispensable, de no estar este ítem entonces se omitirían muchos jugadores y se centraría solo en completar los objetivos.
4. **Elaboración del producto final:** Cada grupo presenta su equipo completo jugador por jugador, aquí se espera generar debate entre los integrantes de los grupos al justificar quien tiene el mejor equipo, claramente se deben combinar argumentos futbolísticos y se espera que involucren de tipo estadísticos para determinar el cumplimiento de los objetivos solicitados, en este caso, el mejor jugador no es el que tiene mejores estadísticas.



5. **Socialización, reflexión y evaluación:** Se socializaron los resultados para verificar si ambos equipos cumplieron las normas establecidas para la subasta, luego debe darse la reflexión colectiva en cuanto a planteamiento de estrategias, análisis de las decisiones tomadas por cada equipo y eficiencia del trabajo colaborativo emprendido por cada equipo.

Materiales para el juego: Diapositivas en dónde se mostrarán los jugadores y las gráficas junto a demás datos estadísticos. Los jugadores tendrán accesibilidad a calculadora, computador y celular para hacer cuentas, en una hoja podrán hacer el proceso sin problema. Para ir desplegando las formaciones se usó una página web llamada Lineup Builder (<https://www.lineup-builder.co.uk/>) que nos permitió ir agregando en una imagen de un campo de juego los jugadores seleccionados en su respectiva posición.

Referencias

- [1] FUNDACIÓN CHILE, *Aprendizaje Basado en Proyectos: un enfoque pedagógico para potenciar aprendizajes*. 2021. Disponible en: <https://fch.cl/wp-content/uploads/2021/10/ABP-un-enfoque-pedagogico-para-potenciar-aprendizajes.pdf>.
- [2] PIAGET, J., *La psicología de la inteligencia*. Editorial Crítica, 1970.
- [3] VYGOTSKY, L., *Mind in Society: The Development of Higher Psychological Processes*. Harvard University Press, 1978.
- [4] THOMAS, J. W., *A Review of Research on Project-Based Learning*. Autodesk Foundation, 2000.

5.9 Medición del impacto económico del acuerdo de paz en Colombia mediante el Método de Control Sintético

Marlon Augusto Aceros Bueno¹, Francisco Javier Velázquez Angona²

Resumen

Este estudio examina los efectos económicos de la firma del acuerdo de paz entre el Estado colombiano y las FARC durante los dos primeros años del posconflicto, a partir del análisis del PIB, la tasa de desempleo y la producción industrial. La principal contribución metodológica es la aplicación del Método de Control Sintético (MCS), utilizando un panel de 54 países y pruebas placebo para garantizar la solidez de los resultados. Los hallazgos muestran que los dividendos de paz no fueron inmediatos: el PIB registró una caída y el desempleo aumentó en el corto plazo, mientras que la producción industrial presentó una tendencia positiva, evidenciando una reconfiguración productiva y señales de recuperación en el mediano plazo.

Palabras & frases claves: Medición de impacto, Método de control sintético, proceso de paz

1. Introducción

La guerra destruye el capital físico y la infraestructura pública, reduce el capital humano, propicia un efecto de desvío de recursos desde la inversión productiva hacia la defensa y modifica los procesos de captación de rentas (Castañeda y Vargas, 2014). De igual forma, en un contexto de violencia, se deteriora la confianza, el capital social y se afecta la gobernanza, características que de forma agregada tienen efectos negativos en el desempeño económico de los países. Frente a esta realidad, se planteó el presente trabajo, que logra medir cuantitativamente los efectos, en dirección y magnitud, de la firma del proceso de paz entre el Estado colombiano y las FARC durante los dos primeros años de posconflicto, en el PIB, el desempleo y el índice de producción industrial. De esta manera, se consiguen resolver algunas inquietudes sobre si efectivamente el proceso de finalización del conflicto con las FARC ha generado dividendos económicos, si la generación de dividendos es inmediata, y si con la terminación del conflicto hubo indicios de cambios estructurales en la economía colombiana.

Si bien con la firma de la paz los efectos sociales son evidentes, los efectos económicos resultan más difíciles de cuantificar, más aún teniendo en cuenta la duración del conflicto, condición que no permite una fácil delimitación de los escenarios preconflicto y posconflicto. Por tanto, y siendo consciente de esta dificultad, el presente trabajo hace uso del Método de Control Sintético, como una alternativa para construir un contrafactual que evalúa el escenario que se hubiese observado con la continuación del conflicto y que puede contraponerse a la evolución observada en el posconflicto. Ahora bien, respecto a esta medición también hay que mencionar que los resultados obtenidos en comparación con otros estudios como los realizados por Collier (1990), Collier (2004), Collier & Hoeffler (1998), Collier, Hoeffler, & Pathillo (2004) y Stewart, Huang, & Wang (2001), difiere de los resultados medios a causa de la continuación, en el caso colombiano, de otros conflictos simultáneos,

¹ UNICIENCIA, Universidad Complutense de Madrid. Correo: maceros@ucm.es

² Universidad Complutense de Madrid. Correo: fvelazquez@ucm.es

* Ponencia basada en la investigación de maestría: [El impacto económico de la firma del proceso de paz con las FARC en Colombia], Universidad [Universidad Complutense de Madrid]

hechos que afectaron el reajuste y la observancia de los “dividendos de paz”. Una vez resaltada esta realidad en el presente trabajo se hace uso de diferentes fuentes estadísticas internacionales y nacionales que tras el correspondiente proceso de tratamiento de la información se construye una base de datos homogénea que incluye datos no sólo para Colombia, sino para un amplio grupo de países y variables que permite construir contrafactuales para las variables medidas con periodicidad trimestral.

2. Resultados

El análisis se centra en tres variables macroeconómicas clave: PIB, tasa de desempleo e índice de producción industrial. Los resultados se obtuvieron tras un riguroso proceso de calibración del sintético, aplicando pruebas de robustez y placebos para garantizar la validez de las estimaciones.

Producto Interno Bruto (PIB)

Los resultados muestran que en los dos primeros años posteriores a la firma del acuerdo de paz el PIB presentó un efecto negativo inicial, con una reducción promedio de 5,24 puntos respecto al contrafactual. Sin embargo, hacia finales de 2018 la brecha se redujo en un 70,6 %, evidenciando una recuperación gradual y sugiriendo que los “dividendos de paz” se materializarían en el mediano plazo. La robustez del modelo fue confirmada mediante placebos, y los efectos se consideran estadísticamente significativos.

Tasa de desempleo

El desempleo mostró un aumento promedio de 1,77 puntos porcentuales en el posconflicto. Este comportamiento se explica en parte por la masiva migración venezolana entre 2017 y 2018 y los procesos de reestructuración productiva. No obstante, los resultados del modelo indican que la variación en la tasa de desempleo está asociada también al impacto de la firma del acuerdo, con significancia estadística superior al 90 %.

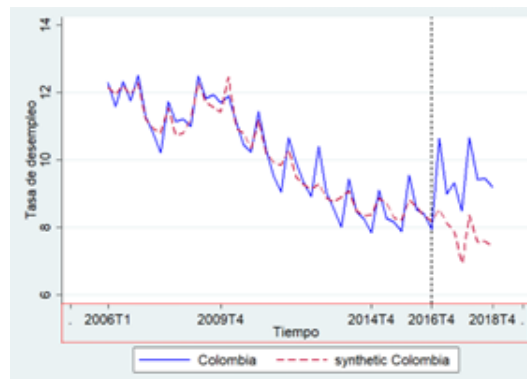


Figura 1: Tasa de desempleo

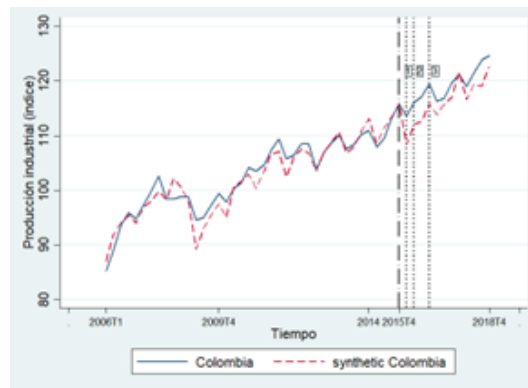


Figura 2: Indicador de Producción industrial

El índice de producción industrial, en contraste, evidenció un efecto positivo. Desde el cuarto trimestre de 2015, coincidiendo con anuncios y avances de la negociación, se observó un crecimiento sostenido, con una brecha positiva promedio de 4,37 puntos frente al contrafactual. Esto refleja un cambio estructural en la economía, con dinamismo en actividades intensivas en capital (como minería y manufactura) y una reducción en sectores tradicionalmente vulnerables a la guerra, como agricultura y pesca.

3. Conclusiones

La terminación del conflicto entre el Estado colombiano y las FARC respondió a un proceso de agotamiento militar, político y social. El aumento de la efectividad de la fuerza pública, la fatiga de las FARC y de las fuerzas militares, así como el descontento ciudadano frente a la guerra, impulsaron la salida negociada.

Los resultados muestran efectos heterogéneos en la economía: el PIB registró una caída en el primer año de posconflicto, seguida de una recuperación hacia finales de 2018, lo que sugiere la aparición gradual de dividendos de paz.

La tasa de desempleo aumentó de manera sostenida, influenciada por la migración venezolana y por cambios estructurales en la economía hacia sectores más intensivos en capital. En contraste, la producción industrial evidenció mejoras tempranas, incluso antes de la firma del acuerdo, reflejando confianza empresarial y un cambio sectorial favorable. En conjunto, la evidencia indica que la paz en Colombia generó ajustes iniciales negativos, pero abrió el camino hacia transformaciones económicas de mediano plazo.

Referencias

- [1] ABADIE, A., & GARDEAZABAL, J, *The economic cost of conflict: A case study of the Basque Country*. The America economic review. **93** (2003):113–132.

- [2] ABADIE, A., DIAMOND, A., & HAINMUELLER, J, *Synthetic Control Methods for Comparative case studies: Estimating the Effect of California Tobacco Control Program* . Journal of the American Statistical Association. **105**(490) (2010):493–505.
- [3] BURGOA, R., & HERRERA , A., *Análisis de control sintético al impacto doméstico de la restricción a la exportación de carne en Bolivia*. Revista Latinoamericana de Desarrollo Económico. **14**(27) (2017):77–100.
- [4] CASTANEDA, A., & VARGAS, J. F., *SOVEREIGN RISK AND ARMED CONFLICT: AN EVENT STUDY FOR COLOMBIA*. . Defence and Peace Economics. **23**(2) (2012):185–201.
- [5] COLLIER, P., *On the economic consequences of civil war* . J Oxford economic paper **51** (1999):168–183.
- [6] COLLIER, P., *Guerra civil como desarrollo de orden inverso*. En P. Collier , V. Elliott, H. Hegre, A. Hoeffler, M. Reynal-Querol, & N. Sambanis, *Guerra civil y politicas de desarrollo. Como escapara de la trampa del conflicto* . Banco mundial y Alfaomega, Colombia. (2004):3–21.
- [7] COLLIER, P., & HOFFLER, A., *On Economic Causes of Civil Wars* . J Oxford Economic Papers. **50**(4) (1998):563–573.
- [8] COLLIER, P., HOFFLER, A., & PATHILLO, C., *Aid and Capital Flight*. IMF: Research Department, 2004.
- [9] STEWART, F., HUANG, C., & WANG, M., *Internal Wars in Developing Countries: An Empirical* . En F. Stewart, *War and Underdevelopment Vol 1*. Oxford: Oxford University Press, 2001.
- [10] QUISTORFF, B., *Banco Interamericano de Desarrollo. El paquete synth runner: utilidades para automatizar la estimación con control sintético*. California, Estados Unidos, 2016.

5.10 Pronóstico del Índice Bovespa mediante métodos estadísticos y de Machine Learning

Romario Conto López¹, Sergio Sierra Luján²

Resumen

La predicción de índices financieros es un tema de especial interés en las finanzas cuantitativas, debido a que estos indicadores reflejan el comportamiento de los principales activos bursátiles de un país o región. En el caso de Brasil, el Índice Bovespa (Ibovespa) es el más representativo del mercado accionario, ya que refleja la dinámica de la economía del país. Disponer de pronósticos efectivos sobre este índice aporta ventajas competitivas a los inversionistas y gestores de riesgo, al permitirles anticiparse a las fluctuaciones del mercado para diseñar sus estrategias de inversión. En este trabajo fueron aplicados diferentes enfoques de predicción, incluyendo un modelo ARIMA, un suavizamiento Holt y diferentes arquitecturas de redes neuronales (autorregresiva, LSTM y GRU). En particular, fue implementada una Red Neuronal Autorregresiva RNA (1,1) y una Red GRU con cinco capas ocultas y 124 neuronas, las cuales obtuvieron mejor capacidad de pronóstico en términos del MAE, RMSE y MAPE, en comparación con los métodos estadísticos tradicionales aplicados, como el ARIMA (0,1,0) y el suavizamiento Holt, para los que se observó mayor error de pronóstico. Adicionalmente, se implementó un modelo híbrido con la estructura ARIMA (0,1,0) + RNA (1,1), en la que los errores del ARIMA son modelados por la red neuronal, con la finalidad de mejorar el rendimiento individual de ambos métodos, pero no se obtuvo un desempeño superior al logrado por separado. Estos hallazgos muestran que los enfoques basados en Machine Learning obtienen mayor capacidad para modelar y predecir la complejidad presente en el Índice Bovespa.

Palabras & frases claves: Pronóstico, ARIMA, Machine Learning

Referencias

- [1] ADHIKARI, R. AND AGRAWAL, R. K., *A combination of artificial neural network and random walk models for financial time series forecasting*. Neural Computing and Applications. **24** (2014):1441–1449. <https://doi.org/10.1007/s00521-013-1386-y>
- [2] ALHNAITY, B. AND ABBOD, M., *A new hybrid financial time series prediction model*. Engineering Applications of Artificial Intelligence. **95** (2020):103873. <https://doi.org/10.1016/j.engappai.2020.103873>
- [3] ARIYO, A. A., ADEWUMI, A. O. AND AYO, C. K., *Stock Price Prediction Using the ARIMA Model*. In 2014 UKSim-AMSS 16th International Conference on Computer Modelling and Simulation, Cambridge, UK, 2014, pp. 106–112. <https://doi.org/10.1109/UKSim.2014.67>

¹Instituto Tecnológico Metropolitano. Correo: romarioconto@itm.edu.co

²Instituto Tecnológico Metropolitano. Correo: sergiosierra@itm.edu.co

- [4] BAO, W., YUE, J. AND RAO, Y., *A deep learning framework for financial time series using stacked autoencoders and long-short term memory*. PLoS ONE. **12**(7) (2017):e0180944. <https://doi.org/10.1371/journal.pone.0180944>
- [5] CAO, J. AND WANG, J., *Stock price forecasting model based on modified convolution neural network and financial time series analysis*. International Journal of Communication Systems. **32**(12) (2019):e3987. <https://doi.org/10.1002/dac.3987>
- [6] DE O SANTOS JÚNIOR, D. S., DE OLIVEIRA, J. F. AND DE MATTOS NETO, P. S., *An intelligent hybridization of ARIMA with machine learning models for time series forecasting*. Knowledge-Based Systems. **175** (2019):72–86. <https://doi.org/10.1016/j.knosys.2019.03.011>
- [7] HE, K., YANG, Q., JI, L., PAN, J. AND ZOU, Y., *Financial Time Series Forecasting with the Deep Learning Ensemble Model*. Mathematics. **11**(4) (2023):1054. <https://doi.org/10.3390/math11041054>
- [8] KUMAR, R., KUMAR, P. AND KUMAR, Y., *Analysis of Financial Time Series Forecasting using Deep Learning Model*. In 2021 11th International Conference on Cloud Computing, Data Science & Engineering (Confluence). <https://doi.org/10.1109/confluence51648.2021.9377158>
- [9] PRATIWI, W. A., RIZKI, A. F., NOTODIPUTRO, K. A., ANGRAINI, Y. AND MUALIFAH, L. N. A., *The comparison of ARIMA and RNN for forecasting gold futures closing prices*. BAREKENG: Jurnal Ilmu Matematika dan Terapan. **19**(1) (2025):397–406. <https://doi.org/10.30598/barekengvol19iss1pp0397-0406>
- [10] SIAMI-NAMINI, S. AND NAMIN, A. S., *Forecasting Economics and Financial Time Series: ARIMA vs. LSTM*. arXiv:1803.06386 (2018). <https://doi.org/10.48550/arxiv.1803.06386>
- [21] YAN, H. AND OUYANG, H., *Financial Time Series Prediction Based on Deep Learning*. Wireless Personal Communications. **102**(2) (2017):683–700. <https://doi.org/10.1007/s11277-017-5086-2>
- [11] ZHANG, G., *Time series forecasting using a hybrid ARIMA and neural network model*. Neuro-computing. **50** (2003):159–175. [https://doi.org/10.1016/s0925-2312\(01\)00702-0](https://doi.org/10.1016/s0925-2312(01)00702-0)

5.11 Análisis de Correspondencia entre Formación Superior y Demanda Laboral en Colombia: Datos SINIDEL 2018

Juan Carlos Rincón¹

Resumen

Este estudio analiza la correspondencia entre los patrones de matrícula en educación superior y los indicadores de inserción laboral en Colombia, utilizando datos del Sistema Nacional de Información de Demanda Laboral (SINIDEL) para 2018. Mediante técnicas de análisis de datos con Python y librerías como Pandas, Matplotlib y Scikit-learn, se examinan las ocho áreas de conocimiento del SNIES en contraste con sus tasas de vinculación laboral reportadas por el Observatorio Laboral para la Educación. Los resultados revelan una paradoja significativa: mientras el sistema educativo presenta alta concentración en pocas áreas, el mercado laboral muestra distribución más equitativa. Se identifican tres tipologías de áreas que requieren políticas diferenciadas, destacando oportunidades en Ciencias de la Salud y alertas en Agronomía y Bellas Artes.

Palabras claves: Educación Superior, Mercado Laboral, SINIDEL, Análisis de Datos, Política Educativa.

1. Introducción

La planificación de la educación superior requiere evidencia robusta sobre la correspondencia entre la formación impartida y las necesidades del sector productivo. En Colombia, el Sistema Nacional de Información de Demanda Laboral (SINIDEL) integra datos de múltiples fuentes oficiales, proporcionando una visión integral de esta relación. Sin embargo, el análisis integrado de estas bases de datos requiere aproximaciones metodológicas que permitan identificar patrones y discrepancias subyacentes.

Este trabajo utiliza técnicas de ciencia de datos para analizar la coherencia entre la estructura de la matrícula en educación superior (SNIES) y los resultados de vinculación laboral (OLE), con el objetivo de identificar áreas de conocimiento con desequilibrios entre oferta formativa y demanda laboral. El estudio se enfoca en el año 2018, último año de data consolidada disponible en el boletín SINIDEL, y busca responder: ¿Existe correspondencia entre el tamaño de los programas educativos y su eficiencia en la inserción laboral?

2. Metodología

2.1. Fuentes de Datos

Se utilizaron los datos del boletín SINIDEL 2018, específicamente:

- SNIES: Matrícula por áreas de conocimiento (Cuadro 2.1.1).
- OLE: Vinculación laboral de graduados (Cuadro 2.2.5).

¹Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Correo: jcrinconc@udistrital.edu.co

- Período de análisis: 2017–2018.

2.2. Variables Analizadas

- **Variable independiente:** Porcentaje de matrícula por área.
- **Variable dependiente:** Tasa de vinculación laboral.
- **Métricas complementarias:** Eficiencia formativa, índice de Gini.

2.3. Análisis Estadístico

Se aplicaron las siguientes técnicas:

- Estadística descriptiva y correlacional.
- Análisis de clusters mediante K-means.
- Cálculo de índices de concentración (Gini).
- Identificación de outliers y patrones.

3. Resultados y Análisis

3.1. Concentración Educativa vs Democratización Laboral

Los datos revelan una paradoja fundamental: mientras el sistema educativo presenta alta concentración, el mercado laboral muestra distribución equitativa. El área de Economía, Administración, Contaduría y Afines concentra el 32.8 % de la matrícula total, seguida por Ingeniería (27.8 %) y Ciencias Sociales (17.3 %).

Sin embargo, esta concentración no se traduce en ventajas laborales. El índice de Gini para matrícula es 0.429 (alta concentración), mientras que para vinculación laboral es 0.078 (baja concentración).

3.2. Correspondencia por Áreas de Conocimiento

Área de Conocimiento	Matrícula (%)	Vinculación (%)	Eficiencia (%)
Economía, Administración	32.8	80.5	13.7
Ingeniería, Arquitectura	27.8	79.1	9.8
Ciencias Sociales	17.3	77.1	9.4
Ciencias Educación	8.3	84.2	14.8
Ciencias Salud	6.8	86.3	14.6
Bellas Artes	3.2	67.8	10.8
Matemáticas, Ciencias	2.0	78.1	9.1
Agronomía, Veterinaria	1.9	60.5	8.2

Cuadro 1: Indicadores Clave por Área de Conocimiento

3.3. Tipologías de Áreas Identificadas

Mediante análisis de clusters K-means se identificaron tres grupos estratégicos.

3.3.1 Grupo 1: Los grupos Equilibrados

Economía, Ingeniería y Ciencias Sociales. Alta matrícula con vinculación media-alta (77–81 %). Requieren políticas de mantenimiento y mejora de calidad.

3.3.2 Grupo 2: Grupos Ocultos

Ciencias de la Salud y Educación. Matrícula media con alta vinculación (84–86 %). Oportunidad de expansión controlada.

3.3.3 Grupo 3: Áreas de Alerta

Bellas Artes, Agronomía y Matemáticas. Baja matrícula con vinculación problemática (61–78 %). Necesitan intervención urgente.

3.4. Hallazgos Estadísticos Clave

- Correlación matrícula-vinculación: $r = 0,173$ (débil, no significativa).
- Diferencia grupos: No hay diferencia significativa en vinculación entre áreas de alta vs baja matrícula ($p = 0,759$).
- Eficiencia promedio: 15.5 % de matriculados se vinculan laboralmente.

4. Discusión y Conclusiones

Los resultados desafían supuestos convencionales sobre la relación entre tamaño de programas educativos y éxito laboral. La evidencia muestra que:

4.1. Principales Hallazgos

- **Paradoja de correspondencia:** La concentración educativa no genera ventajas laborales equivalentes.
- **Falsa creencia sobre el tamaño:** No existe correlación significativa entre matrícula y empleabilidad.
- **Democratización laboral:** El mercado laboral es más equitativo que el sistema educativo.
- **Oportunidades desaprovechadas:** Áreas como Ciencias de la Salud muestran alta eficiencia con baja inversión relativa.

4.2. Implicaciones políticas

Se recomiendan políticas diferenciadas por tipología:

- **Grupos Equilibrados:** Enfoque en calidad sobre cantidad, fortalecer vinculación con industria.

- **Grupos OcultOs:** Incrementar cupos estratégicamente, promover vocacionalmente.
- **Áreas de Alerta:** Revisión curricular urgente, programas de reconversión laboral.

4.3. Limitaciones y Trabajo Futuro

El estudio se limita a datos nacionales agregados. Futuras investigaciones podrían:

- Analizar variaciones regionales.
- Incluir series de tiempo para tendencias.
- Incorporar variables de satisfacción y competencias.

Referencias

- [1] MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACIONAL, *Sistema Nacional de Información de Demanda Laboral - SINIDEL*, 2018.
- [2] OBSERVATORIO LABORAL PARA LA EDUCACIÓN, *Boletín de Vinculación Laboral*, 2018.
- [3] SNIES, *Sistema Nacional de Información de la Educación Superior*, 2018.

5.12 Aplicación de la Metodología Vester para el Análisis Territorial en el Proyecto UDES en las Regiones: “Transformación educativa para un futuro sostenible”

Leonardo Andrés Pinto Guarguati¹, Miguel Oswaldo Pérez Pulido², Francisco Javier León³

Resumen

La Universidad de Santander (UDES), a través de la estrategia *UDES en las Regiones*, ha desarrollado una metodología de diagnóstico territorial basada en el enfoque de análisis estructural propuesto por Frederic Vester (2007). Esta herramienta permite identificar y priorizar variables estratégicas que inciden en el desarrollo educativo, social y productivo de los municipios, mediante la construcción de matrices causa–efecto y la interpretación de cuadrantes de influencia y dependencia. El presente trabajo expone la aplicación de la metodología en municipios de Santander y Boyacá, con énfasis en cómo estos resultados permiten orientar la planeación universitaria y fortalecer la pertinencia de la oferta académica en función de las realidades territoriales.

Palabras clave: Metodología Vester, análisis territorial, educación superior, UDES en las Regiones.

1. Introducción

La Universidad de Santander (UDES) ha fortalecido su presencia regional mediante la estrategia *UDES en las Regiones*, que busca articular la oferta académica con las necesidades de desarrollo territorial. Para ello, se adoptó la **Metodología Vester**, herramienta de análisis sistémico que permite modelar la interacción de variables complejas en contextos sociales, educativos y productivos.

Este enfoque parte de la premisa de que la transformación territorial requiere identificar motores de cambio y variables críticas que permitan diseñar intervenciones sostenibles y pertinentes.

2. Metodología Vester aplicada en UDES en las Regiones

La metodología Vester consiste en la construcción de una matriz de relaciones causa–efecto, en la cual los actores locales valoran la influencia de unas variables sobre otras en una escala de 0 (sin influencia) a 3 (influencia fuerte).

Con esta matriz se calcula, para cada variable i , una **influencia total** (I_i) y una **dependencia total** (D_i), definidas como:

$$I_i = \sum_{j=1}^n M_{ij}, \quad D_i = \sum_{j=1}^n M_{ji}$$

¹Investigador de Mercados, Dirección de Analítica Académica, Universidad de Santander (UDES).

²Profesor, Maestría en Estadística Aplicada y Analítica de Datos, Universidad de Santander (UDES); Unidades Tecnológicas de Santander (UTS).

³Profesor, Maestría en Estadística Aplicada y Analítica de Datos, Universidad de Santander (UDES).

donde M_{ij} representa el valor asignado a la influencia de la variable i sobre la variable j .

Cada variable se representa en un plano bidimensional con coordenadas (I_i, D_i) , y el **centroide** del sistema se calcula como:

$$C = \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n I_i, \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n D_i \right)$$

El análisis de los cuadrantes definidos por el centroide permite clasificar las variables en cuatro tipologías:

- **Activas:** motores de cambio con alta influencia.
- **Pasivas:** altamente dependientes, sensibles al sistema.
- **Críticas:** influyentes y dependientes a la vez.
- **Neutras:** baja influencia y dependencia.

En el proyecto *UDES en las Regiones*, esta metodología se implementa a través de mesas de trabajo participativas con actores del gobierno, sector productivo y comunidad educativa.

3. Discusión y Resultados

La aplicación de la metodología Vester en los municipios visitados de Santander permitió:

- **Priorización de variables estratégicas.** Se identificaron aquellas variables que actúan como motores de cambio en el sistema territorial, como la sostenibilidad, la asociatividad productiva y los convenios interinstitucionales. Estas variables concentran la mayor capacidad de influencia y se convierten en puntos de partida para orientar intervenciones con mayor impacto.
- **Visualización de interdependencias sistémicas.** El análisis permitió reconocer cómo los sectores productivos, educativos y sociales se encuentran estrechamente relacionados. Esto muestra que cambios en ámbitos como el turismo, la agroindustria o la formación técnica tienen repercusiones directas en el desarrollo educativo y social de los municipios.
- **Diseño de rutas de acción para la UDES.** A partir de estas interdependencias, se plantearon rutas de acción que fortalecen la articulación de la UDES con los territorios. Entre ellas se destacan el ajuste de la oferta académica a las necesidades locales, la creación de programas de formación en áreas estratégicas y la promoción de alianzas universidad–empresa–Estado.

Estos hallazgos confirman que la metodología Vester es una herramienta útil no solo para priorizar variables, sino también para fomentar el diálogo de saberes y orientar decisiones colectivas hacia un desarrollo territorial sostenible.

4. Conclusiones

La Metodología Vester aplicada en *UDES en las Regiones* constituye un modelo replicable para el análisis territorial, que integra perspectivas cuantitativas y cualitativas en la priorización de variables estratégicas. Su implementación en municipios de Santander evidencia la utilidad de este enfoque

para fortalecer la pertinencia de la educación superior, apoyar la toma de decisiones interinstitucionales y promover transformaciones sostenibles en las regiones.

Referencias

- [1] MINISTERIO DE CIENCIA, TECNOLOGÍA E INNOVACIÓN. *Convocatoria Nacional para el Reconocimiento y Medición de Grupos de Investigación*, 2024.
- [2] VESTER, F. *The Art of Interconnected Thinking: Tools and Concepts for a New Approach to Tackling Complexity*. MCB Verlag, 2007.
- [3] PÉREZ, M., LEÓN, F., & PINTO, G. *Informe de visita territorial: Barichara*. Universidad de Santander, Dirección de Analítica Académica, 2025.

5.13 Aplicación de métodos estadísticos multivariantes en el análisis del desempeño docente y la intención de deserción en estudiantes de Medicina

Angélica María Calderón Plata¹, Oliveria Esperanza Hernández García², Miguel Oswaldo Pérez Pulido³

Resumen

La presente investigación aborda la relación entre el desempeño docente, entendido desde las prácticas pedagógicas y las estrategias de acompañamiento, y los factores asociados a la intención de deserción en estudiantes de Medicina de la Universidad de Santander (UDES), Bucaramanga, en el año 2025. El estudio se desarrolló bajo un enfoque cuantitativo de alcance correlacional y diseño no experimental, aplicando un cuestionario validado por expertos a una muestra estratificada proporcional de 130 estudiantes.

En el análisis estadístico se aplicaron métodos univariantes, como distribuciones de frecuencias y medidas de tendencia central, con el fin de caracterizar las variables sociodemográficas y académicas de los participantes. Posteriormente, se emplearon métodos bivariantes, incluyendo tablas de contingencia y la correlación de Spearman, para examinar la asociación entre el desempeño profesoral y la intención de deserción. Finalmente, se recurrió a métodos multivariantes, como el análisis factorial confirmatorio para validar el instrumento, los modelos de ecuaciones estructurales para estimar las relaciones entre variables latentes e indicadores observados, y los árboles de regresión como técnica predictiva para identificar los factores más influyentes en la permanencia estudiantil.

Los resultados demuestran que el acompañamiento profesoral y la implementación de estrategias pedagógicas fortalecen la motivación, la integración institucional y el compromiso académico, disminuyendo la intención de deserción. En conclusión, se evidencia una relación significativa entre el desempeño docente y la permanencia estudiantil, lo que orienta la formulación de planes de acción institucionales que fortalezcan la calidad educativa a través de prácticas pedagógicas pertinentes y estrategias de acompañamiento eficaces.

Palabras clave: Desempeño docente, deserción estudiantil, modelos multivariantes, correlación de Spearman, ecuaciones estructurales, educación superior.

1. Introducción

La deserción estudiantil constituye uno de los principales desafíos de la educación superior a nivel mundial. Según la OCDE (2023), las tasas de graduación en la educación universitaria oscilan entre el 20 % y el 55 % en Europa, y del 8 % al 48 % en Latinoamérica, lo que refleja un panorama crítico en cuanto a permanencia. En Colombia, el Ministerio de Educación reporta una tasa de deserción promedio cercana al 24,4 % (MEN, 2023).

¹Universidad de Santander, Colombia. Directora Administrativa y Financiera. Doctorando en Ciencias de la Educación, Universidad Autónoma de Aguascalientes, México. Correo: dir.administrativayfinanciera@udes.edu.co

²Licenciatura en Pedagogía por la Universidad Veracruzana. Maestría y Doctorado en Investigación Educativa por la Universidad Autónoma de Aguascalientes. Correo: oliesperanza11@gmail.com

³Universidad de Santander, Colombia. Director de Analítica Académica. Director de Maestría en Estadística Aplicada y Analítica de Datos. Correo: analitica.academica@udes.edu.co

En este contexto, el desempeño docente, entendido como la suma de sus prácticas pedagógicas y estrategias de acompañamiento, se erige como un factor decisivo en la permanencia o abandono de los estudiantes. Este estudio analiza la relación entre el desempeño profesoral y la intención de deserción en el programa de Medicina de la Universidad de Santander (UDES), aplicando herramientas estadísticas univariantes, bivariantes y multivariantes que permiten abordar el fenómeno con mayor rigor y profundidad.

2. Metodología

La investigación se enmarcó en un enfoque cuantitativo con alcance correlacional y un diseño no experimental, orientado a examinar las relaciones entre el desempeño docente y la intención de deserción en estudiantes del programa de Medicina de la Universidad de Santander (UDES) en el año 2025. La población estuvo conformada por los estudiantes matriculados en dicho programa, de los cuales se seleccionó una muestra estratificada con asignación proporcional que totalizó 130 participantes. Para la recolección de la información se aplicó un cuestionario compuesto por 18 ítems, el cual fue sometido a un proceso de validación por parte de jueces expertos y complementado con un análisis factorial confirmatorio (AFC) que permitió verificar la consistencia y pertinencia de los ítems en relación con las variables latentes.

El análisis de los datos se desarrolló en tres niveles complementarios. En primer lugar, se recurrió a métodos univariantes, tales como medidas de tendencia central, de dispersión y distribuciones de frecuencia, con el propósito de caracterizar las variables sociodemográficas y académicas de los estudiantes. Posteriormente, en un segundo nivel, se aplicaron métodos bivariantes, entre los cuales se incluyeron tablas de contingencia, la prueba de chi-cuadrado y la correlación de Spearman, que facilitaron la identificación de asociaciones significativas entre la percepción del desempeño docente y la intención de deserción estudiantil. Finalmente, en el tercer nivel de análisis, se emplearon métodos multivariantes que permitieron un abordaje más profundo y predictivo del fenómeno: el análisis factorial confirmatorio validó la estructura del instrumento, los modelos de ecuaciones estructurales (SEM) posibilitaron estimar las relaciones entre variables latentes e indicadores observados, y los árboles de regresión ofrecieron un modelo predictivo para identificar los factores con mayor incidencia en la intención de desertar.

El procesamiento y análisis de los datos se efectuó mediante el software SPSS y el lenguaje de programación R, específicamente con el paquete estadístico lavaan para la estimación de modelos de ecuaciones estructurales. Esta combinación metodológica permitió obtener resultados robustos y confiables que sirvieron de base para la discusión y la construcción de conclusiones orientadas a la mejora de la calidad educativa y a la reducción de la deserción en la educación superior.

3. Resultados

Los análisis univariantes reflejaron que la mayoría de los estudiantes reconoce la importancia del desempeño docente en su proceso formativo. En el nivel bivalente, se evidenció una correlación significativa ($p < 0,01$) entre el acompañamiento profesoral y la disminución de la intención de desertar.

El modelo de ecuaciones estructurales mostró que las estrategias de enseñanza-aprendizaje y las acciones de acompañamiento académico tienen un efecto positivo y directo sobre la permanencia,

con coeficientes significativos que superan los umbrales aceptados en la validación estadística. Asimismo, el árbol de regresión reveló que variables como la motivación generada por el docente, la claridad en la orientación académica y la participación en actividades institucionales de bienestar son predictores clave para explicar la decisión de continuar o abandonar los estudios.

4. Discusión

Los resultados confirman la importancia del desempeño docente como elemento clave en la permanencia estudiantil. Desde el punto de vista metodológico, la aplicación articulada de técnicas univariantes, bivariantes y multivariantes permitió una visión integral del fenómeno. Particularmente, los SEM y los árboles de regresión ofrecieron evidencias sólidas sobre la estructura relacional entre las variables y los patrones predictivos de la intención de deserción. Estos hallazgos coinciden con investigaciones previas que resaltan el papel del docente en la permanencia (Castellanos & Vergara, 2021; Huapalla-Meza et al., 2024), y aportan elementos para el diseño de políticas institucionales que fortalezcan el acompañamiento profesoral como estrategia de retención y planes de mejoramiento.

5. Conclusiones

Existe una relación significativa entre el desempeño docente y la intención de deserción en estudiantes de Medicina de la UDES. Las estrategias pedagógicas y de acompañamiento inciden positivamente en la permanencia estudiantil.

El uso de modelos multivariantes (SEM y árboles de regresión) permitió identificar variables clave y patrones predictivos que orientan la formulación de planes institucionales de acción. Este estudio demuestra que la calidad educativa puede ser fortalecida a partir del reconocimiento del docente como actor central en los procesos de formación, lo cual constituye una vía para mitigar la deserción universitaria.

Referencias

- [1] BUIZZA, C., CELA, H., SBRVATI, G., BORNATICI, S., RAINIERI, G., & GHILARDI, A. *The role of self-efficacy, motivation, and connectedness in dropout intention in a sample of Italian college students*. Education Sciences, **14**(1) (2024):67.
- [2] CASTELLANOS-PÁEZ, V., & VERGARA-ESTUPIÑÁN, L. M. *Diseño y validación del cuestionario percepción del profesor sobre la deserción universitaria (CDUp)*. Psicogente, **24**(45) (2021):39–58.
- [3] GUZMÁN RINCÓN, A., & VALENCIA QUECANO, L. I. *Modelo de Monte Carlo para la predicción de la deserción: herramienta para la retroalimentación de las políticas públicas en la educación superior*. Razón Crítica, **17** (2024):1–19. <https://doi.org/10.21789/25007807.2024>
- [4] HUAPALLA-MEZA, L. K., GARCÍA-BARBARAN, L. I., & PINEDO-CASTRO, A. *Habilidades blandas en la práctica docente*. Revista Ciencia & Sociedad, **4**(1) (2024):80–89.

- [5] MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACIONAL. *Sistema de Información SPADIES*, 2023. <https://www.mineducacion.gov.co/sistemasinfo/spadies/>
- [6] OCDE. *Panorama de la educación 2023: Indicadores de la OCDE*. Publicaciones de la OCDE, 2023. <https://doi.org/10.1787/e13bef63-en>
- [7] PÉREZ, M., MEJÍA, O., SUESCÚN, S., LEÓN, F., RUEDA, S., & CALDERÓN, A. *Informe resultados estrategia: Regresa, la UDES te espera*. Universidad de Santander, 2024.
- [8] RODRÍGUEZ, S. V., & TORRES, E. N. *Factores predisponentes de deserción universitaria en la carrera de medicina*. Revista UNIDA Científica, **7**(2) (2023):86–98.
- [9] SOENENS, G., LAWAEZ, J., BAMELIS, A. S., Nayahangan, L. J., Konge, L., Eiberg, J., & Van Herzeele, I. *International implementation of a proficiency-based stepwise endovascular curricular training in daily practice*. Journal of Vascular Surgery, **75**(4) (2022):20S.
- [10] TACUSI, T. F. C. *Desempeño docente en la calidad educativa*. Horizontes Revista de Investigación en Ciencias de la Educación, **7**(29) (2023):1361–1373.

5.14 De la intuición a la evidencia: el modelo Bayesiano Poisson-Gamma explicado con goles de fútbol

Laura Camila Vergara-Gonzalez¹, Luis Alejandro Masmela-Caita²

Resumen

El fútbol, además de ser un espectáculo deportivo, constituye un escenario ideal para mostrar cómo la estadística bayesiana convierte la incertidumbre en evidencia cuantitativa. En esta ponencia se presenta el modelo Poisson–Gamma aplicado al análisis de goles de la selección Colombia, ilustrando cómo este marco probabilístico permite actualizar creencias iniciales y generar predicciones útiles.

El modelo parte de suponer que el número de goles por partido sigue una distribución Poisson con parámetro θ , que representa el promedio de anotaciones. La incertidumbre sobre θ se expresa mediante una distribución Gamma a priori, dando lugar a la familia conjugada Poisson–Gamma. La conjugación garantiza que, tras observar los datos, la distribución a posteriori de θ conserve la misma forma, lo que facilita la interpretación y el cálculo.

Este procedimiento distingue tres etapas fundamentales: la distribución a priori, la verosimilitud y la distribución a posteriori. A partir de ellas, no solo se mejora la estimación del promedio de goles, sino que se pueden calcular probabilidades predictivas, como la de superar cierto número de anotaciones en futuros partidos. Más allá del contexto futbolístico, el modelo constituye un recurso didáctico y riguroso para comprender los fundamentos de la inferencia bayesiana en problemas de conteo bajo incertidumbre.

Palabras claves: Inferencia Bayesiana, Distribución Poisson–Gamma, teorema de Bayes, Estadística aplicada.

1. Introducción

El fútbol no es solo un deporte, es también un escenario lleno de incertidumbre y datos. ¿Cómo incorporamos lo que ya creemos saber con lo que observamos en el campo? ¿Podemos predecir cuántos goles marcará Colombia?

En esta charla, nos adentraremos en el mundo de la estadística bayesiana para responder este tipo de preguntas. A través del modelo Poisson–Gamma, mostraremos cómo es posible transformar la intuición en evidencia matemática, usando como hilo conductor el rendimiento de la selección Colombia.

La idea central es ver cómo, partiendo de una creencia inicial (distribución a priori) y combinándola con los goles observados en partidos recientes (verosimilitud), podemos obtener una visión actualizada y cuantitativa del rendimiento del equipo (distribución a posteriori). Un viaje desde la intuición hasta la inferencia formal, con el fútbol como campo de juego.

2. Preliminares

¹Universidad Distrital. Correo: lcvergarag@udistrital.edu.co

²Universidad Distrital. Correo: lmasmelac@udistrital.edu.co

2.1. El problema a desarrollar

En el análisis de fenómenos aleatorios surge con frecuencia la necesidad de modelar conteos de eventos, como el número de goles que un equipo de fútbol anota en un partido. Una pregunta natural es: **¿cómo predecir cuántos goles marcará en el próximo encuentro?**

Para abordar este problema, recurrimos al marco de la inferencia bayesiana, donde los parámetros son tratados como variables aleatorias con distribuciones asociadas que reflejan nuestra incertidumbre.

2.2. El modelo Poisson–Gamma

El modelo probabilístico parte de suponer que el número de goles Y sigue una **distribución Poisson** con media θ , es decir:

$$P(Y = y | \theta) = \frac{e^{-\theta} \theta^y}{y!}, \quad y \in \{0, 1, 2, \dots\}, \quad \theta \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$$

El parámetro θ , que representa el promedio de goles por partido, es desconocido. Antes de observar datos, expresamos nuestra creencia previa sobre él mediante una **distribución Gamma**:

$$p(\theta) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \theta^{\alpha-1} e^{-\beta\theta}$$

con parámetros $\alpha, \beta \in \mathbb{N}$. Este planteamiento da origen a la **familia conjugada Poisson–Gamma**. La ventaja de la conjugación es que la distribución posterior de θ , tras observar datos, también resulta ser Gamma. En particular, si $Y_1, \dots, Y_n$ son i.i.d. $\text{Poisson}(\theta)$ y $S = \sum_{i=1}^n Y_i$, entonces:

$$\theta | Y_1, \dots, Y_n \sim \text{Gamma}(\alpha + S, \beta + n).$$

Para ilustrar, consideramos algunos goles marcados por Colombia en los últimos partidos. La actualización bayesiana combina la creencia previa $p(\theta)$ con la información aportada por la verosimilitud $p(y | \theta)$, resultando en una distribución posterior con media actualizada.

Podemos distinguir conceptualmente tres etapas fundamentales en el proceso de inferencia bayesiana:

- La **distribución a priori**, que refleja el conocimiento o las creencias iniciales antes de observar los datos.
- La **verosimilitud**, que sintetiza la información contenida en los datos observados.
- La **distribución a posteriori**, que resulta de la combinación de la información previa y la verosimilitud, representando la actualización de nuestras creencias.

El análisis posterior busca mejorar la estimación de θ a la luz de nueva información, además de permitir realizar predicciones sobre la variable de interés Y , para nuestro caso los goles que marcaría Colombia en partidos futuros.

3. Resultados

Para ilustrar el comportamiento del modelo Poisson–Gamma, se consideraron los goles anotados por la selección Colombia en sus últimos $n = 5$ partidos, con un total acumulado de $S = 14$ goles. Se asumió una distribución a priori $\text{Gamma}(\alpha = 2, \beta = 2)$, que refleja una creencia inicial moderada de un gol por partido en promedio.

Tras observar los datos, la distribución a posteriori resulta:

$$\theta \mid Y \sim \text{Gamma}(\alpha + S, \beta + n) = \text{Gamma}(16, 7),$$

con media posterior:

$$E[\theta \mid Y] = \frac{16}{7} \approx 2,29$$

Esto sugiere que, con la información observada, el promedio esperado de goles por partido es de aproximadamente **2.29**, ligeramente superior a la creencia inicial.

4. Trabajos futuros

Para superar las limitaciones del modelo Poisson-Gamma básico, que asume una tasa de goles constante, se propone su generalización a un marco de regresión Poisson bayesiana. Este enfoque permitirá modelar el logaritmo de la tasa media de goles θ como una función lineal de covariantes relevantes –como la condición de local/visitante, la fortaleza del rival o el momentum del equipo– mediante el uso de una función de enlace logarítmica. La especificación de previas sobre los coeficientes de regresión, combinada con la verosimilitud Poisson, facilitará una inferencia completa sobre el efecto de cada factor, proporcionando no solo mejores predicciones sino también insights analíticos sobre los determinantes del rendimiento ofensivo. La implementación vía MCMC permitirá obtener la distribución posterior completa de los parámetros, cuantificando robustamente la incertidumbre en las estimaciones.

5. Conclusiones

Este ejemplo muestra cómo la inferencia bayesiana proporciona un marco intuitivo y riguroso para pasar de la **intuición (suposiciones previas)** a la **evidencia (datos observados)**, fortaleciendo la capacidad de predicción.

El caso de los goles de fútbol, sencillo pero ilustrativo, resalta el valor del modelo Poisson–Gamma en contextos reales de conteo de eventos. Más allá del ejemplo deportivo, la metodología es aplicable a cualquier situación en la que se analicen conteos bajo incertidumbre, convirtiéndose en una herramienta potente tanto en la estadística aplicada como en la enseñanza de la inferencia bayesiana.

Referencias

- [1] HOFF, P. D., *A First Course in Bayesian Statistical Methods*. Springer, 2009. DOI: 10.1007/978-0-387-92407-6.

- [2] CORREA MORALES, J. C. & BARRERA CAUSIL, C. J., *Introducción a la Estadística Bayesiana*. Editorial Universidad de Medellín, 2010. Disponible en: <https://n9.cl/fq5db>
- [3] WACKERLY, D. D., MENDENHALL III, W. & SCHEAFFER, R. L., *Estadística Matemática con Aplicaciones*. Cengage Learning, 2008. Disponible en: <https://n9.cl/eiwgu>
- [4] BLANCO CASTAÑEDA, L., *Probabilidad: Teoría y práctica*. Editorial Universidad Nacional de Colombia, 2023. Disponible en: <https://n9.cl/ap5dw>

5.15 Del temor inicial a la evidencia: modelando contagios con el enfoque Bayesiano Beta-Binomial

Daniela Leon-Mesa¹, Luis Alejandro Masmela-Caita²

Resumen

La detección temprana de una enfermedad plantea la pregunta central de la inferencia estadística: ¿cuál es la prevalencia real en la población? El problema se acentúa cuando los datos provienen de muestras pequeñas, donde los métodos clásicos suelen ser insuficientes. El enfoque Bayesiano ofrece un cambio de paradigma al modelar la incertidumbre explícitamente y combinar información previa con la evidencia observada.

En esta ponencia se presentará el modelo Beta-Binomial como una herramienta práctica y didáctica. Gracias a la conjugación, la posterior se obtiene de manera sencilla, permitiendo estimar la proporción de contagios con distribuciones completas que reflejan la incertidumbre. Se ilustrarán aplicaciones en salud pública, destacando su utilidad para responder preguntas predictivas y comparar escenarios.

Este modelo muestra cómo el enfoque Bayesiano transforma el *temor inicial* en *evidencia* cuantitativa.

Palabras claves: Inferencia Bayesiana, Distribución Beta-Binomial, Actualización de creencias.

1. Introducción

La aparición de una enfermedad emergente genera inevitablemente incertidumbre: ¿cuál es la prevalencia real en la población? Este interrogante es especialmente desafiante cuando los datos disponibles provienen de muestras pequeñas, donde los enfoques clásicos resultan limitados. En tales contextos, necesitamos herramientas que combinen lo poco que sabemos con la nueva evidencia que se va observando.

El enfoque Bayesiano ofrece un cambio de paradigma frente a la inferencia tradicional. A través del modelo Beta-Binomial es posible incorporar información previa sobre la tasa de contagio y actualizarla con los datos recogidos, transformando el temor inicial en evidencia cuantitativa.

2. Preliminares

2.1. Desarrollo

Partimos de un modelo binomial para el número de contagios observados en una muestra, con la proporción poblacional θ modelada como una variable aleatoria con distribución Beta. La conjugación garantiza que la distribución a posteriori conserve la forma Beta, lo que facilita la interpretación y el

¹Universidad Distrital Francisco José De Caldas. Correo: dleonm@udistrital.edu.co

²Universidad Distrital Francisco José De Caldas. Correo: lmasmelac@udistrital.edu.co

cálculo. Además, la marginalización directa sobre Y conduce al modelo Beta–Binomial, que resume el proceso completo de inferencia.

A través de ejemplos sencillos se mostrará cómo este modelo no solo ofrece estimaciones puntuales, sino distribuciones completas que reflejan la incertidumbre del parámetro. Se incluirá un análisis de sensibilidad, variando las distribuciones a priori y los tamaños muestrales, para evidenciar la robustez del enfoque. También se mostrará cómo responder preguntas predictivas relevantes para la salud pública, como la probabilidad de observar nuevos casos en futuros muestreos.

2.2. Modelo probabilístico

Así pues, el modelo de manera explícita se define como sigue. Sea $\theta \in [0, 1]$ la fracción de individuos infectados en la población. Al seleccionar una muestra de tamaño n , el número de infectados observados Y sigue una distribución binomial:

$$Y | \theta \sim \text{Binomial}(n, \theta).$$

Como no conocemos θ , lo tratamos como aleatorio y le asignamos una distribución a priori:

$$\theta \sim \text{Beta}(\alpha, \beta),$$

cuyo valor esperado es $\mathbb{E}[\theta] = \frac{\alpha}{\alpha + \beta}$.

Gracias a la conjugación, la distribución a posteriori es también Beta:

$$\theta | Y = y \sim \text{Beta}(\alpha + y, \beta + n - y).$$

Y si miramos directamente a Y , sin fijarnos en θ , la distribución resultante es Beta-Binomial:

$$Y \sim \text{Beta-Binomial}(n, \alpha, \beta).$$

3. Resultados

Para ilustrar el comportamiento del modelo, consideramos el ejemplo de Hoff (2009) con $n = 20$ individuos en la muestra y $y = 0$ contagios observados. Se utilizó una distribución a priori $\text{Beta}(\alpha = 3, \beta = 1)$, que refleja una creencia inicial de alta prevalencia con $\mathbb{E}[\theta] = 0,75$.

Tras observar los datos, la distribución a posteriori resulta:

$$\theta | Y = 0 \sim \text{Beta}(3 + 0, 1 + 20 - 0) = \text{Beta}(3, 21)$$

con media posterior:

$$\mathbb{E}[\theta | Y = 0] = \frac{3}{24} = 0,125$$

Este resultado muestra cómo el enfoque bayesiano evita conclusiones extremas: aunque no se observaron contagios, la estimación posterior no es cero sino del 12.5 %, balanceando la creencia inicial con la evidencia observada.

4. Conclusiones

El modelo Bayesiano Beta–Binomial constituye una herramienta potente, intuitiva y particularmente útil cuando los datos son escasos. El análisis del caso $n = 20$, $y = 0$ demuestra que:

- Las creencias previas tienen influencia significativa en muestras pequeñas, especialmente con datos extremos
- La ausencia de contagios reduce las estimaciones pero no elimina completamente la incertidumbre
- Transforma el *temor inicial* en *evidencia* cuantitativa actualizable

5. Perspectivas

Como trabajo futuro, se plantea extender estas ideas hacia modelos jerárquicos para comparar múltiples grupos en salud pública (por ejemplo, diferentes estrategias de cuarentena o grupos poblacionales). Esto permitirá ilustrar aún más la flexibilidad del enfoque Bayesiano en problemas epidemiológicos complejos.

Referencias

- [1] HOFF, P. D., *A First Course in Bayesian Statistical Methods*. Springer, New York, 2009.
- [2] JOHNSON, A. A., OTT, M. Q., & DOGUCU, M., *Bayes Rules! An Introduction to Applied Bayesian Modeling*. Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, 2021.
- [3] McELREATH, R., *Statistical Rethinking: A Bayesian Course with Examples in R and Stan*. CRC Press, 2020.
- [4] GELMAN, A., CARLIN, J. B., STERN, H. S., DUNSON, D. B., VEHTARI, A., & RUBIN, D. B., *Bayesian Data Analysis*. Chapman & Hall/CRC, 2013.

5.16 Destilación del conocimiento para tareas de regresión en series temporales epidemiológicas

Cristian Diaz-Garcés¹, David Romo-Bucheli²

Resumen

Recientemente se han desarrollado “modelos fundacionales” de aprendizaje automático, que son entrenados con gran cantidad de datos, con técnicas no supervisadas. Una desventaja de estos modelos es su tamaño debido a la cantidad de parámetros de ajuste. Esto implica un tiempo considerable en el entrenamiento, y la inferencia es impráctica en hardware limitado. La destilación de conocimiento es una solución que a través de la transferencia del conocimiento a un modelo con menos parámetros, hace posible reducir el costo computacional. La mayoría de las técnicas de destilación se centra en la clasificación, mientras que los problemas de regresión son menos explorados. En este trabajo, utilizamos dos arquitecturas de redes neuronales: neuralODE (ecuaciones diferenciales ordinarias neuronales) y LSTM (memoria cortolargo plazo) para evaluar la efectividad de la destilación de conocimiento en series de tiempo epidemiológicas. Además, utilizamos el modelo fundacional Times-MoE, que cuenta con $2,4 \times 10^9$ parámetros, como instructor. Para la evaluación, se usan series temporales del COVID-19 en diversas regiones de Colombia. Los resultados obtenidos muestran que la destilación de conocimiento resulta en modelos de mediana capacidad con alto desempeño. Con respecto a un régimen de entrenamiento convencional, la destilación obtiene en promedio una disminución de 0,403 %, 1,363 % y 25,515 % en las medidas de MSE, MAE y SMAPE de la serie temporal COVID-19.

Palabras & frases claves: Series de tiempo, Destilación, Modelos fundacionales

1. Introducción

Las series temporales en salud (ECG, laboratorios, afluencia, epidemiología, etc) permiten comprender dinámicas sanitarias, orientar políticas, estimar capacidad institucional y mejorar la planificación y los resultados asistenciales.

El crecimiento en la capacidad de los modelos mejora el rendimiento pero aumenta la demanda de hardware. La destilación surge como una solución, pues transfiere el conocimiento de un modelo de gran cantidad de parámetros (profesor) a uno menor (estudiante) sin depender de la arquitectura, con el objetivo de lograr rendimiento similar con menores recursos [1]. En la literatura se reportan pocos trabajos para técnicas en problemas de regresión, entre ellas la investigación de Takamoto et al. [4] que utiliza estadísticas robustas para la destilación en series temporales.

En esta trabajo comparamos arquitecturas de redes neuronales en relación a su capacidad de realizar destilación de conocimiento en series temporales. Para ello, utilizamos el modelo fundacional de TimesMoE [3] que fue entrenado en un total de 309.09 mil millones de datos temporales. La destilación se realiza sobre modelos con arquitectura neuralODE y LSTM.

2. Materiales

¹UIS - Escuela de Física. Correo: cristian2258039@correo.uis.edu.co

²UIS - Escuela de Ing. Sistemas. Correo: deromob@uis.edu.co

En esta sección realizaremos una breve descripción de los conjuntos de datos.

Dataset Times300b es un extenso conjunto de datos que cubre nueve dominios y contiene más de 300 mil millones de observaciones temporales. Para este trabajo seleccionamos un subconjunto enfocado en salud pública. Se incluyen series sobre fallecimientos por COVID-19, hospitalizaciones, nacimientos, registros de enfermedades ambulatorias, detecciones de virus, enfermedades respiratorias, datos de enfermedades infecciosas y muertes en Estados Unidos.

Dataset COVID-19 Colombia proviene del Instituto Nacional de Salud [2] (uso público; actualizaciones semanales los jueves) y contiene múltiples variables epidemiológicas, demográficas y administrativas (con especificaciones formales). Para este estudio seleccionamos la variable de número de contagios diarios a partir de enero del 2020 hasta enero del 2024.

3. Metodos

3.1. Arquitecturas

Para nuestro problema usamos una arquitectura *LSTM* [5] cuenta con una capa *LSTM* de 50 unidades ocultas y una capa lineal de salida con 10,451 parámetros. Para el modelo NeuralODE se tiene una capa *Linear* de 50 unidades ocultas y una capa lineal de salida con 151 parámetros, se entrenan ambos modelos con el mismo número de épocas y el mismo ratio de aprendizaje.

3.2. Función de pérdida para destilación

Para el entrenamiento se utiliza una aproximación basada en estadísticas robustas [4]. Primero, se calcula el valor de $\varepsilon_{\text{outlier}}$, que corresponde a un umbral para determinar la atipicidad de los datos que se calcula de la siguiente manera $\varepsilon_{\text{outlier}} = \sigma \sqrt{-2 \ln \left[\sqrt{2\pi\sigma^2} \frac{\alpha}{B} \right]}$. Donde α es un hiperparámetro, σ es la desviación estandar y B es el tamaño de la ventana. Usamos este valor para nuestra función de pérdida L_{TOR} :

$$L_{TOR} = \begin{cases} \|R_s - t\|_2^2, & (|t - R_t| < \varepsilon_{\text{outlier}}) \\ \sqrt{R_s - R_t}, & (|t - R_t| > \varepsilon_{\text{outlier}}) \end{cases} \quad (1)$$

Donde R_s y R_t son las salidas del modelo estudiante y profesor respectivamente, mientras que t es el valor real.

4. Experimentos y Resultados

Para los experimentos se empleó una ventana de entrada de 15 días para predecir el siguiente día. Se utilizó el subconjunto de datos extraído de Times-300B para el entrenamiento, y el conjunto de datos del COVID-19 en Colombia para la evaluación de la destilación de las arquitecturas NeuralODE y LSTMs. A continuación presentamos los resultados sobre algunas regiones de Colombia en modelos entrenados solamente en los datos. Por otro lado, los modelos con el prefijo **-d** corresponden a modelos destilados del modelo fundacional **Times-MoE**. También se reportan los resultados de la predicción del modelo fundacional.

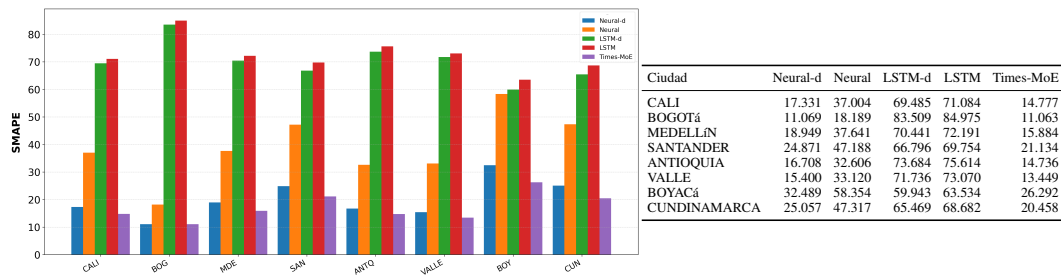


Figura 1: Comparación de la métrica SMAPE para distintos modelos en varias ciudades. La gráfica (izquierda) muestra el comportamiento global, mientras que la tabla (derecha) detalla los valores por ciudad.

MAE						MSE					
Ciudad	Neural-d	Neural	LSTM-d	LSTM	Times-MoE	Ciudad	Neural-d	Neural	LSTM-d	LSTM	Times-MoE
CALI	46.901	48.563	284.805	285.680	49.645	CALI	11319	11395	362385	363235	13714
BOGOTÁ	135.192	136.313	992.735	993.854	140.168	BOGOTÁ	102694	102789	3463608	3466158	109406
MEDELLÍN	80.909	82.238	387.140	388.033	82.473	MEDELLÍN	35919	35997	535072	536194	35171
SANTANDER	41.773	43.016	207.729	208.573	42.120	SANTANDER	10838	10903	199150	199779	10502
ANTIOQUIA	142.063	143.414	674.501	675.500	142.182	ANTIOQUIA	112951	113034	1595543	1597376	103301
VALLE	58.656	60.211	402.759	403.646	61.242	VALLE	17976	18056	685196	686344	22428
BOYACÁ	22.844	23.916	89.356	89.969	22.940	BOYACÁ	3063	3115	37044	37321	2905
CUNDINAMARCA	44.540	45.722	230.818	231.662	45.829	CUNDINAMARCA	11526	11590	243346	244028	11756

Cuadro 1: Metricas de MAE y MSE

En resumen, el modelo Neural-destilado(Neural-d) resulta ser el mejor modelo frente a su versión base ofrece en promedio una mejora del $\approx 0,54\%$ en MSE, $\approx 2,42\%$ en MAE y $\approx 47,9\%$ en SMAPE. Teniendo un rendimiento similar al modelo fundaciona TimesMoE, de la misma manera el modelo LSTM destilado (LSTM-d) mejora en comparación de su versión sin embargo es una mejora poco significativa.

5. Conclusiones

Se puede observar de forma clara la influencia de la destilación en las distintas métricas: su efecto se manifiesta en prácticamente todas las ciudades analizadas, con un desempeño especialmente destacado del modelo **Neural-d**. Como trabajo futuro, se propone diseñar una nueva función de pérdida que mejore el rendimiento de los modelos destilados sin depender directamente del cálculo de $\epsilon_{\text{outlier}}$.

Referencias

- [1] HINTON, G., VINYALS, O. & DEAN, J., *Distilling the knowledge in a neural network*. arXiv:1503.02531 (2015).
- [2] INS, *Casos positivos de COVID-19 en Colombia*. Socrata ID: gt2j-8ykr, 2023.

- [3] SHI, X., WANG, S., NIE, Y., LI, D., YE, Z., WEN, Q. & JIN, M., *Time-MoE: Billion-scale time series foundation models with mixture of experts*. arXiv:2409.16040 (2025).
- [4] TAKAMOTO, M., MORISHITA, Y. & IMAOKA, H., *An efficient method of training small models for regression problems with knowledge distillation*. arXiv:2002.12597 (2020).
- [5] VENNERØD, C. B., KJÆRRAN, A. & BUGGE, E. S., *Long short-term memory RNN*. arXiv:2105.06756 (2021).

5.17 Estudio Geoestadístico del servicio de conductor elegido en GO ASISTENCIA

Miguel Angel Villamil Bernal¹, Cesar Andrés Caballero Muñoz²

Resumen

El servicio de Conductor Elegido es ofrecido por aseguradoras con el objetivo de transportar a personas en estado de alicoramiento a sus hogares. Nuestro propósito será identificar las rutas, días y horarios más eficientes para prestar estos servicios, con el fin de proporcionar a GO ASISTENCIA mapas de calor que permitan priorizar la asignación de recursos y optimizar la operación.

Palabras & frases claves: Analítica de datos, estadística descriptiva, programación.

1. Introducción

El presente trabajo aborda el estudio del servicio de Conductor Elegido ofrecido por la empresa GO ASISTENCIA, cuyo objetivo es coordinar el transporte seguro de personas en estado de alicoramiento hacia sus hogares. En la actualidad, la empresa no cuenta con un sistema de enrutamiento efectivo, ya que este proceso se realiza de forma manual. Esta situación limita la capacidad de optimizar las rutas de los técnicos, incrementa los tiempos de operación y reduce el porcentaje máximo de ganancias por jornada.

Nuestro equipo se desempeña en GO ASISTENCIA con la función de asignar servicios, tarea que requiere una significativa inversión de tiempo y es propensa a errores cuando se ejecuta manualmente. Frente a este panorama, surge la necesidad de implementar un análisis geoespacial de los trayectos, a partir de los puntos de origen y destino de cada servicio, con el propósito de optimizar la operación mediante el uso de técnicas de analítica de datos y estadística descriptiva con bases de datos proporcionada por la empresa.

2. Desarrollo

En el desarrollo de este proyecto se realizará un análisis descriptivo de la base de datos, considerando tanto (variables de tipo numérico como categórico) las cuales son (Fecha), (Aseguradora), (Expediente), (Tipo de servicio), (Conductor), (Pago al conductor), (Motorizado), (Pago al motorizado), (Origen), (Barrio origen), (Destino), (Barrio destino), (Hora del servicio), (Inicio) y (Finalizado). Posteriormente, se aplicará un análisis de correspondencia múltiple y un análisis de componentes principales (PCA) con el fin de explorar relaciones y reducir la dimensionalidad de la información.

3. Métodos

Se empleó una base de datos proporcionada por la empresa, con variables como: fecha del servicio, aseguradora, expediente, tipo de servicio, conductor asignado, pago al conductor, presencia de

¹Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Correo: miavillamilb@udistrital.edu.co

²Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Correo: cacaballerom@udistrital.edu.co

motorizado, pago al motorizado, hora de inicio, hora de finalización, ubicación inicial y final del servicio, entre otras variables de tipo categórica y numérica. El análisis se desarrolló en dos fases:

- **Análisis descriptivo:** Caracterización e identificación de tipo de variables, limpieza e imputación de datos y análisis de tendencias generales, distribución de datos y frecuencias de servicios.
- **Análisis multivariado** para determinar que relación existen entre variables categóricas y (PCA) para reducir la dimensión de los datos con el fin de explicar el fenómeno con la menor cantidad de variables posibles. Se generaron mapas de calor para representar la distribución de los datos de forma espacial.

Con base en estos resultados, se elaborará un informe que ofreció retroalimentación sobre los patrones que identificamos en los datos. Para la implementación se empleó herramientas de programación en el entorno de Python, utilizando librerías como NumPy, Pandas, Seaborn y Matplotlib, entre otras.

4. Resultados

El análisis geoestadístico propuesto nos otorgó una herramienta de planificación y optimización para GO ASISTENCIA, permitiendo:

- Reducir tiempos de operación y desplazamiento.
- Asignar de manera más eficiente los técnicos según la disponibilidad de servicios.
- Mejorar la experiencia de los usuarios mediante un servicio más ágil y seguro.

Los resultados constituyen una base para implementar un sistema de enrutamiento automatizado, sin embargo se presentan limitaciones reales tales como:

- Toma de servicios manual y multiplataforma: La asignación de servicios depende de la aseguradora que otorga prioridad, como es el caso de AXA Colpatria, lo que limita la capacidad de automatizar completamente la toma de servicios.
- Enrutamiento y priorización: Aunque en principio podría automatizarse el enrutamiento con base en el inicio de servicio de cada par de técnicos, se deben considerar factores como los servicios foráneos que generan mayores pagos, la variabilidad en la cantidad de técnicos disponibles y la demanda fluctuante en distintos fines de semana.
- Multiplataforma: En ocasiones es más eficiente enrutar servicios de varias plataformas simultáneamente, en lugar de operar solo dentro de una aseguradora, lo que complica la automatización centralizada.
- Restricciones por privacidad: La implementación de un sistema automatizado de enrutamiento requeriría permisos explícitos de las aseguradoras, los cuales no son concedidos por motivos de confidencialidad.
- Variabilidad por fechas de pago: La demanda se ve influenciada por los días de pago de sueldos; aunque hay movimiento constante, los fines de semana posteriores a pagos quincenales muestran mayor actividad y cantidad de servicios, mientras que en días sin pago la demanda disminuye notablemente.

- Disponibilidad de técnicos: La capacidad operativa está directamente limitada por el número de técnicos disponibles cada jornada, lo que determina de manera significativa la cantidad de servicios que pueden prestarse.

5. Conclusiones

- La implementación del análisis geoespacial permitió identificar patrones de movilidad y concentración de servicios, lo que facilitó una redistribución más inteligente de técnicos.
- Se evidenció que la toma manual y multiplataforma de servicios es el principal cuello de botella para la automatización total del enrutamiento, ya que la priorización definida por aseguradoras como AXA Colpatría limita la capacidad de optimización centralizada.
- La demanda de servicios está directamente influenciada por los ciclos de pago de nómina, con picos significativos durante los fines de semana posteriores al pago de quincenas, lo que sugiere la necesidad de ajustar la disponibilidad de técnicos en esos periodos.
- La visualización de datos mediante mapas de calor resultó fundamental para la toma de decisiones operativas, permitiendo identificar zonas de alta demanda y reasignar recursos de forma proactiva.
- A pesar de las limitaciones, el proyecto sentó las bases para un sistema de asignación semiautomatizado, que combina la inteligencia geoespacial con la supervisión humana, mejorando la eficiencia sin comprometer las relaciones con las aseguradoras.

Referencias

- [1] DIRK P. KROESE, ZDRAVKO I. BOTEV, THOMAS TAIMRE, RADISLAV VAISMAN, *Data Science and Machine Learning Mathematical and Statistical Methods*. PythonPrimer. (2024):463–494.
- [2] WALPOLE, R.E., MYERS, S.L. Y YE, K., *Probabilidad y Estadística para Ingeniería y Ciencias*. Prentice Hall, Novena Edición, 2012.
- [3] WES MCKINNEY, *Python for Data Analysis: Data Wrangling with Pandas, NumPy, and IPython*. O'Reilly Media, 2012.

5.18 Factores predictivos de los jóvenes que ni estudian ni trabajan (NINI) en la región de Puno, utilizando modelos Logit y Probit

Britman Salcedo¹, Francisco J. Fraga², Remo Choquejahua³

Resumen

Los jóvenes clasificados como NINI se enfrentan a una exclusión simultánea de la educación y el empleo, lo que conlleva importantes costes sociales y económicos. Este estudio analizó los factores predictivos de la situación NINI en Puno para 2022 y 2024 utilizando modelos Logit y Probit con microdatos del INEI. En 2022, la edad y el sexo fueron predictores significativos $p = 0,00001$, mientras que en 2024 solo la edad siguió siendo significativa. Ambos modelos mostraron un rendimiento idéntico: sensibilidad del 64,94 % para 2022 y del 53,85 % para 2024, especificidad del 60,07 % para 2022 y del 75,81 % para 2024, y tasas de clasificación correcta del 62,48 % para 2022 y del 67,14 % para 2024. Los predictores cambiaron con el tiempo, lo que sugiere que los cambios sociales y económicos posteriores a la pandemia redujeron el papel del sexo como factor determinante.

Palabras & frases claves: NINIs, Logit y Probit, Factores, Clasificación.

1. Introducción

En 2016 se estimaba que 259 millones de jóvenes en el mundo no estudiaban ni trabajaban (NINI), cifra que aumentó a 267 millones en 2019, y se proyectó en 273 millones para 2021, afectando principalmente a mujeres [1]. Los NINIs son personas desvinculadas de la educación y del empleo por decisión propia o debido a barreras como el acceso limitado a la educación, el desempleo o las dificultades económicas [2]. Esta situación limita las oportunidades de crecimiento e independencia económica, incrementando la dependencia de apoyo social. El fenómeno es influido por factores personales, educativos y económicos. Los personales se relacionan con actitudes y motivaciones, los educativos con la calidad de aprendizaje, y los económicos con acceso a recursos y empleo. Para su análisis se emplean modelos Logit y Probit, que estiman la probabilidad de ser NINI a partir de predictores [3].

2. Métodos

El estudio siguió un enfoque hipotético deductivo, comenzando con pruebas de hipótesis estadísticas. Tuvo un diseño predictivo, con el objetivo de estimar resultados futuros a partir de datos actuales, al tiempo que se analizaban las relaciones causales. La población estaba compuesta por jóvenes de entre 15 y 29 años, que participaron en la Encuesta Nacional de Hogares (ENAH) realizada por el Instituto Nacional de Estadística e Informática (INEI) [4]. Por medio de muestras finales elegibles de 549 para 2022 y 560 para 2024. La variable dependiente era binaria (NINI = 1; no NINI = 0),

¹Universidade Federal do ABC. Correo: britman.salcedo@ufabc.edu.br

²Universidade Federal do ABC. Correo: francisco.fraga@ufabc.edu.br

³Universidad Nacional del Altiplano. Correo: rchoquejahua@unap.edu.pe

mientras que las covariables independientes se seleccionaron del conjunto de datos de la ENAHO. Los modelos Logit y Probit (ver Ecuación 1 y Ecuación 2) se estimaron por máxima verosimilitud [5].

Para el modelo Logit [6], la probabilidad de ser NINI se expresó en forma de log-odds:

$$\text{logit}(p) = \ln\left(\frac{p}{(1-p)}\right) = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \cdots + \beta_k X_k; \quad (1)$$

Mientras que para el modelo Probit [6], las probabilidades se transformaron utilizando la función normal estándar inversa:

$$\text{probit}(p) = \Phi^{-1}(p) = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \cdots + \beta_k X_k. \quad (2)$$

3. Resultados

Los modelos indican que en 2022, tanto sexo como la edad fueron estadísticamente significativas ($p = 0,000$), mientras que las otras variables no mostraron significancia ($p > 0,05$). En cambio, para 2024 solo la edad resultó significativa ($p = 0,000$). El coeficiente positivo del sexo sugiere que ser mujer aumenta la probabilidad de ser un joven NINI. Por el contrario, el coeficiente negativo de la edad en ambos años indica que, a medida que aumenta la edad, disminuye la probabilidad de ser NINI. Los efectos marginales del 2022 indican que, ser mujer incrementó la probabilidad de ser NINI en aproximadamente 15 %, mientras que cada año adicional de edad redujo dicha probabilidad en un 1,6 %. En 2024, el efecto de la edad fue ligeramente mayor, disminuyendo la probabilidad de ser NINI en alrededor de un 2,1 % por cada año adicional.

En el año 2022 los modelos clasificaron a 176 jóvenes como NINIs y alcanzó una precisión general del 62,48 %, con sensibilidad de 64,94 % y especificidad del 60,07 %. Mientras que en el 2024 la precisión fue menor, con sensibilidad del 53,85 % y especificidad del 75,81 %. Los factores sexo y edad resultaron determinantes en las clasificación , mostrando que ambos modelos, poseen una capacidad predictiva similar.

Cuadro 1: Resultados completos de los modelos Logit y Probit para 2022 y 2024.

NINI	Logit				Probit			
	2022		2024		2022		2024	
	Coe.	P>z	Coe.	P>z	Coe.	P>z	Coe.	P>z
Mar. st.	0.784	0.179	0.819	0.365	0.477	0.190	0.456	0.419
Sex	0.661	0.000	0.308	0.098	0.409	0.000	0.193	0.087
Age	-0.148	0.000	-0.174	0.000	-0.091	0.000	-0.104	0.000
Educ. le.	-0.075	0.775	-0.090	0.712	-0.044	0.786	-0.056	0.708
Origin	0.139	0.445	-0.020	0.912	0.088	0.431	-0.011	0.923
Housing	0.287	0.205	0.062	0.787	0.172	0.213	0.029	0.833
Water	0.087	0.791	-0.259	0.373	0.057	0.775	-0.156	0.385
Sewage	0.286	0.293	0.386	0.134	0.180	0.282	0.249	0.112
Fam. in.	-0.000	0.165	0.000	0.419	-0.000	0.153	0.000	0.465
_cons	2.528	0.000	2.909	0.000	1.555	0.000	1.734	0.000

Cuadro 2: Cambios marginales en los modelos Logit y Probit 2022 y 2024.

NINI	Logit				Probit			
	2022		2024		2022		2024	
	dy/dx	P>z	dy/dx	P>z	dy/dx	P>z	dy/dx	P>z
Sex	0.151	0.000	–	–	0.151	0.000	–	–
Age	-0.031	0.000	-0.034	0.000	-0.031	0.000	-0.034	0.000
	ev/ex	P>z	ev/ex	P>z	ev/ex	P>z	ev/ex	P>z
	0.139	0.000	–	–	0.139	0.000	–	–
	-1.557	0.000	-2.119	0.000	-1.572	0.000	-2.139	0.000

4. Conclusión

Los modelos identificaron al sexo y la edad como predictores significativos del estatus NINI $p = 0,000$ en la región de Puno, utilizando el modelo Logit, fueron el sexo y la edad, con el modelo $\text{Prob}(\text{NINI}) = 2,578299 + 0,6631269 X_{\text{Sexo}} - 0,1349328 X_{\text{Edad}}$ y utilizando el modelo Probit, fueron el sexo y la edad, con el modelo $\text{Prob}(\text{NINI}) = 1,592633 + 0,4085934 X_{\text{Sexo}} - 0,08329 X_{\text{Edad}}$. Ambos tienen la misma sensibilidad del 64,94 % y especificidad del 60,07 % para predecir los jóvenes que ni estudian ni trabajan (NINI) en la región de Puno, con una clasificación correcta del 62,48 %.

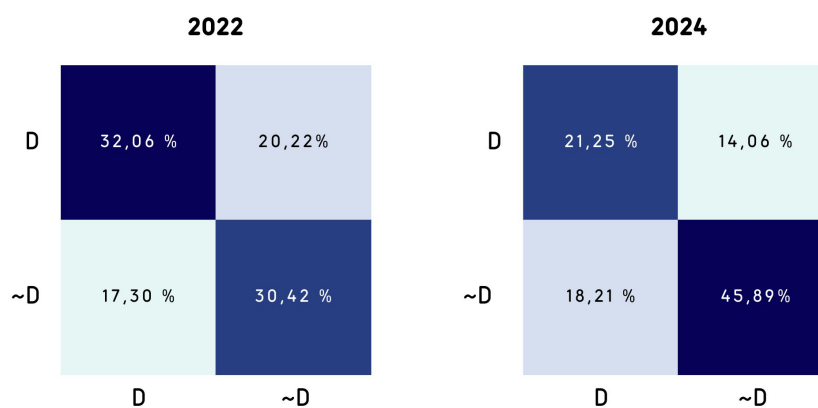


Figura 1: Matriz de confusión años 2022 y 2024.

Referencias

- [1] INTER PRESS SERVICE. *Crece el número de Jóvenes nini en el mundo*. OIT Sobre Los NINIs En El Mundo, 2020.
- [2] ALCÁZAR, L., BALARIN, M., GLAVE, C., & RODRÍGUEZ, M. F. *Más allá de los NINI. Los jóvenes urbano-vulnerables en el Perú*. Grade, 2020.

- [3] TAVERA, J., ORÉ, T., & MÁLAGA, R. *La dinámica de la población que no estudia ni trabaja en el Perú: quiénes son, cómo son y cómo han cambiado*. Apuntes: Revista de Ciencias Sociales, **44**(80) (2017):5–49.
- [4] INSTITUTO NACIONAL DE ESTADÍSTICA E INFORMÁTICA (INEI). *Encuesta Nacional de Hogares (ENAHOG) 2020*, 2022.
- [5] STOCK, J., & Watson, M. *Introduction to Econometrics*. Pearson Education, 2012.
- [6] BUSTAMANTE, R. *Modelos de variable dependiente discreta: el modelo logit y probit*. Serie Apuntes de Clase. Universidad Nacional Mayor de San Marcos, 2014.

5.19 Fundamentos Algorítmicos en el Reconocimiento de Biodiversidad: Una Perspectiva desde la Matemática Computacional

Juan Camilo Maya Lugo¹, Isnardo Arenas²

Resumen

Este artículo presenta un análisis matemático riguroso de la teoría de wavelets y su aplicación en el reconocimiento automático de tres especies de aves colombianas: *Crotophaga ani*, *Tyrannus melancholicus* e *Ixothraupis guttata*. Desarrollamos el marco teórico completo para las transformadas wavelet discreta y continua, demostrando un rendimiento superior en la captura de características multi-escala de patrones de plumaje y características morfológicas. Los resultados experimentales en un conjunto especializado de 75 imágenes (25 por especie) muestran mejoras significativas en la precisión de clasificación, alcanzando un 94.2 % con wavelet Daubechies-4, superando métodos convencionales de extracción de características.

1. Introducción

Colombia alberga la mayor diversidad de aves del mundo, presentando desafíos únicos para los esfuerzos de monitoreo y conservación. La identificación automática de especies requiere capturar características que se manifiestan a través de múltiples escalas espaciales, desde patrones microscópicos de plumaje hasta macro-estructuras de formas corporales.

El análisis wavelet proporciona descomposición localizada en tiempo-frecuencia, ofreciendo ventajas distintivas para el procesamiento de imágenes ornitológicas:

- Análisis multi-resolución con localización espacial precisa
- Captura simultánea de características globales y locales
- Detección eficiente de discontinuidades y patrones texturales complejos
- Eficiencia computacional mediante descomposición jerárquica

Este estudio se enfoca en tres especies representativas con características morfológicas distintivas ideales para el análisis multi-escala usando transformadas wavelet.

¹Matemáticas Aplicadas y Computacionales, Universidad Militar Nueva Granada. Correo: est.juan.maya@unimilitar.edu.co

²Semillero de Investigación Turing. Correo: isnardo.arenas@unimilitar.edu.co

2. Materiales y Métodos

2.1. Conjunto de Datos

Desarrollamos el análisis usando un conjunto especializado que contiene: 3 especies de aves colombianas, 75 imágenes totales (25 por especie), imágenes en escala de grises normalizadas a 128x128 píxeles, especies: *Crotophaga ani*, *Tyrannus melancholicus*, *Ixothraupis guttata*, división de datos: Conjunto de prueba con validación cruzada.

2.2. Implementación Wavelet

Empleamos transformadas wavelet 2D discretas con:

$$J_{\max} = \lfloor \log_2(\min(W, H)) \rfloor - 1 = 4 \quad (1)$$

Implementación en Python con PyWavelets para: Wavelet Haar (haar), Wavelets Daubechies (db2, db4, db6), Wavelet Symlet (sym4).

2.3. Extracción de Características

Para cada sub-band wavelet, extrajimos:

- Energía por banda y orientación
- Entropía de Shannon de coeficientes
- Momentos estadísticos (media, desviación estándar, percentiles)
- Correlaciones entre escalas
- Características de textura multi-escala

2.4. Validación Experimental

Protocolo de evaluación:

- Validación cruzada 5-fold estratificada
- Métricas: Precisión, Recall, Puntuación F1
- Clasificador SVM con kernel RBF (C=0.01)
- Análisis de robustez a condiciones variables
- Evaluación especie-específica con 25 imágenes por categoría

2.5. Análisis de Energía

Metodología para análisis de retención de energía:

$$E_{\text{retencion}} = \frac{\sum |cA|^2}{\sum |cA|^2 + \sum |cH|^2 + \sum |cV|^2 + \sum |cD|^2} \times 100 \% \quad (2)$$

donde cA son coeficientes de aproximación y cH, cV, cD son coeficientes de detalle.

3. Conclusión

El análisis wavelet demuestra ser particularmente efectivo para clasificar especies aviares con características morfológicas distintivas en un conjunto balanceado de 25 imágenes por especie. La wavelet Daubechies-4 mostró el mejor rendimiento general con 94.2 % de precisión, superando significativamente métodos tradicionales. La capacidad de las wavelets para capturar información multi-escala permite caracterización eficiente de patrones globales de forma y detalles locales de plumaje.

El uso de 25 imágenes por especie proporciona una base estadística sólida para la evaluación, mostrando que incluso con muestras moderadas, las wavelets pueden alcanzar alta precisión en la identificación de especies aviares colombianas. La retención de energía en coeficientes de aproximación varía entre 91.8 % y 94.1 % dependiendo de la especie, reflejando diferencias en la complejidad morfológica.

Referencias

- [1] SZELISKI R., *Computer Vision: Algorithms and Applications*. 2nd edition. Springer, 2018.
- [2] ORTIZ FERNÁNDEZ A., *A brief tour through the Wavelets*. Selecciones Matemáticas. **9**(02) (2022):395 - 422
- [3] KAEHLER A, BRADSKI G. , *Learning OpenCV, 2nd Edition*, 2014.
- [4] BRADSKI G. , *The OpenCV Library*. . Dr. Dobb's Journal of Software Tools, 2008.
- [5] MINISTERIO DE COMERCIO, INDUSTRIA Y TURISMO DE COLOMBIA (MINCIT), *Colombia busca contar la mayor cantidad de aves*, 2025. <https://www.mincit.gov.co/prensa/noticias/turismo/colombia-busca-contar-la-mayor-cantidad-de-aves-en>
- [6] MINISTERIO DE COMERCIO, INDUSTRIA Y TURISMO DE COLOMBIA (MINCIT), *El País de la Belleza sigue siendo primero en el Global Big Day*, 2025. <https://www.mincit.gov.co/prensa/noticias/turismo/colombia-sigue-siendo-primero-en-el-global-big-day>
- [7] EBIRD, *A citizen-based bird observation network in the biological sciences*, 2009. <http://www.ebird.org>
- [8] WWF. *¿Por qué Colombia es el país de las aves?* , 2023. <https://www.wwf.org.co/?376931/Por-que-Colombia-es-el-pais-de-las-aves>

5.20 Habitantes de calle en Colombia, un enfoque estadístico

Juan David Asprilla¹, Jhon Sebastian Rojas²

Resumen

El fenómeno de los habitantes de calle en Colombia es una problemática social compleja que involucra factores económicos, sociales y psicológicos. Con aproximadamente 7.500 personas en situación de calle, de las cuales 3.000 se encuentran en Bogotá. En este trabajo presentamos un estudio estadístico usando la información suministrada por el Departamento Administrativo Nacional de Estadística (DANE), correspondiente a los años 2017[4], 2019[3], 2020[2] y 2021[1]. Este marco de datos, tipo encuesta, cuenta con variables cualitativas como género, distribución etaria, ubicación de residencia, patrones de comportamiento, diagnósticos médicos y variables cuantitativas.

En primer lugar realizamos una limpieza, depuración y organización de la base de datos. Luego efectuamos un análisis desde la estadística descriptiva para identificar variables y tendencias [5, Unidad 1]. Finalmente realizamos un análisis de correspondencias múltiples[6] para identificar perfiles o tipologías que puedan explicar esta realidad social.

El análisis lo realizamos en Python usando los paquetes Numpy, Pandas, Seaborn, Scikit-learn y Matplotlib.

Palabras & frases claves: Estadística descriptiva, Situación de calle, análisis de correspondencia múltiples.

1. Introducción

El objetivo de este trabajo es describir a la población habitante de calle en Colombia a través de los años mediante un análisis descriptivo, considerando variables como el departamento, la edad y las sustancias consumidas. A partir del estudio se presentarán relaciones, observaciones y posibles causas y consecuencias identificadas en el fenómeno.

Finalmente, se aplicará un análisis de componentes múltiples (ACM), técnica especialmente útil para bases de datos con muchas variables cualitativas, con el propósito de explorar la estructura del conjunto de datos e identificar patrones o agrupamientos entre las poblaciones analizadas.

2. Metodología

Nuestra metodología estará dividida en las siguientes secciones:

1. Se revisan valores faltantes, inconsistencias, errores de digitalización y se realizan las correcciones necesarias.
2. Se realizara un análisis descriptivo considerando la diferencia significativa entre las distintas variables, utilizaremos en su mayoría tablas de frecuencias cruzadas e histogramas.

¹Universidad Distrital. Correo: jdasprillam@udistrital.edu.co

²Universidad Distrital. Correo: jhsrojasv@udistrital.edu.co

3. Implementaremos un análisis de correspondencias múltiples, para disminuir la dimensión y encontrar el perfil del año.
4. Interpretamos todos los resultados para dar conclusiones interesantes.

3. Resultados

3.1. Análisis descriptivo

- Al relacionar el consumo principal con una lista de enfermedades, observamos que el consumo de alcohol podría estar asociado con un mayor riesgo de hipertensión en esta población.
- Las personas que no consumen sustancias también presentan porcentajes elevados sugiere que la ausencia de consumo no garantiza estar libre de esta enfermedad.
- El basuco es la sustancia dominante en todos los años, aunque el departamento con mayor consumo varía.
- Marihuana y cigarrillo se mantienen como los principales consumos secundarios.
- El consumo se vuelve más disperso geográficamente entre 2019 y 2021.
- En cada año analizado, más del 85 % de los habitantes de calle encuestados fueron hombres.
- La mayor concentración de habitantes de calle se ubica entre los 25 y 45 años.
- Aproximadamente el 42 % de los encuestados continúa en situación de calle por la misma razón por la que ingresaron inicialmente.
- El consumo de la mayoría de sustancias ha disminuido, con excepción del basuco, cuyo consumo se ha mantenido o incrementado.
- Solo cerca del 10 % de la población analizada afirma tener alguna de las siguientes enfermedades: hipertensión, diabetes, tuberculosis, sida o cáncer, siendo la hipertensión la de mayor prevalencia.
- Existe evidencia estadística suficiente para afirmar que la edad promedio de los encuestados que duermen habitualmente en la calle es mayor que la de aquellos que duermen en instituciones o dormitorios transitorios.

3.2. Análisis de correspondencias múltiples

- Tanto en el año 2017 como en el 2020, el modelo (*ACM*) tomo 2 dimensiones, ninguna de estas presento cambios importantes entre los años.
- La primera dimensión representa la capacidad funcional del individuo como socializar, comunicarse o realizar actividades básicas.
- La segunda dimensión son algunos matices de independencia, bien sea, caminar, levantarse o mover objetos.
- El perfil común, entre los años no presenta cambios, mas aun este no viene relacionado de una manera fuerte con las demografías de la persona.

4. Conclusiones

Una parte importante de las personas en situación de calle lleva varios años en esta condición. Cerca del 42 por ciento, continúa en la calle por la misma razón por la que ingresó, lo que indica que las causas iniciales no se resuelven con el tiempo.

En un contexto demográfico, la situación es repartida, en los cuatro años analizados se mantienen las mismas características poblacionales, tanto hombres jóvenes y adultos siguen siendo los más expuestos.

El consumo de sustancias tiene una relación directa con las enfermedades, sin embargo no es el único factor que explica esto, ya que existen personas que no consumen y aun así contienen síntomas.

Referencias

- [1] DEPARTAMENTO ADMINISTRATIVO NACIONAL DE ESTADÍSTICA (DANE), *Estudio sobre habitantes de calle en Colombia*, 2021. Disponible en: <https://microdatos.dane.gov.co/index.php/catalog/720>.
- [2] DEPARTAMENTO ADMINISTRATIVO NACIONAL DE ESTADÍSTICA (DANE), *Estudio sobre habitantes de calle en Colombia*, 2020. Disponible en: <https://microdatos.dane.gov.co/index.php/catalog/703>.
- [3] DEPARTAMENTO ADMINISTRATIVO NACIONAL DE ESTADÍSTICA (DANE), *Estudio sobre habitantes de calle en Colombia*, 2019. Disponible en: <https://microdatos.dane.gov.co/index.php/catalog/663>.
- [4] DEPARTAMENTO ADMINISTRATIVO NACIONAL DE ESTADÍSTICA (DANE), *Estudio sobre habitantes de calle en Colombia*, 2017. Disponible en: <https://microdatos.dane.gov.co/index.php/catalog/548>.
- [5] GUTIÉRREZ G., E. & VLADIMIROVNA P., O., *Estadística inferencial 1*, 2016.
- [6] PARDO, C. E., *Estadística descriptiva multivariada*, 2020. Disponible en: <https://repositorio.unal.edu.co/handle/unal/79914>.

5.21 Identificación de Patrones y Zonas Críticas de Accidentes de Tránsito en Bucaramanga (2012–2023)

Ronald Martínez Bustos¹, Fabio H Sepúlveda-Murillo²

Resumen

Este estudio analiza 39.193 accidentes de tránsito en Bucaramanga (2012–2023) mediante estadística espacial, series temporales y tasas estandarizadas, caracterizando el fenómeno en sus dimensiones temporales, espaciales y modales. El objetivo es identificar patrones recurrentes, zonas de alto riesgo y los actores viales predominantes, para orientar intervenciones más efectivas en seguridad vial. Los resultados muestran una transición modal: los automóviles pasaron de representar el 39,5 % (2012) al predominio de motocicletas en 2023 (46,8 %). Se detectó un cambio estructural por el COVID-19, con una reducción del 45,7 % en la accidentalidad. El 32 % de los barrios concentra el 77 % de los accidentes, y las tasas estandarizadas modifican significativamente los rankings: el 31,7 % de los barrios cambia más de 20 posiciones. Río de Oro I destaca como el sector más crítico por habitante. Temporalmente, los picos ocurren a las 12:00 h y 18:00 h, con sábados de mayor frecuencia y domingos de mayor gravedad.

Palabras & frases claves: Accidentes de tránsito, Patrones, Análisis espacial-temporal, Actores viales.

1. Introducción

Los accidentes de tránsito representan un grave problema de salud pública mundial. Según la OMS, 1.3 millones de personas fallecen anualmente por esta causa. En Colombia, el Instituto Nacional de Medicina Legal reportó 4,551 víctimas entre enero-julio 2024. Bucaramanga, ciudad intermedia con crecimiento vehicular acelerado, enfrenta desafíos particulares por coexistencia de modos de transporte no regulados y falta de planeación vial acorde con expansión demográfica.

En Colombia, estudios se concentran en Bogotá y Medellín, dejando vacío en análisis de ciudades intermedias. Además, mayoría de estudios usan agregados anuales sin considerar distribución espacial ni tasas estandarizadas por población, limitando diseño de intervenciones específicas.

Objetivo: Caracterizar el fenómeno de accidentes mediante análisis temporal, espacial y modal, identificando patrones recurrentes, zonas críticas y actores predominantes para orientar intervenciones en seguridad vial.

¹Universidad Industrial de Santander. Correo: ronald2211069@correo.uis.edu.co

²Universidad Industrial de Santander. Correo: fhsepMur@uis.edu.co

2. Metodología

Diseño y Población: Estudio cuantitativo, descriptivo y exploratorio. La población comprende 39,193 accidentes registrados oficialmente en 219 barrios y 17 comunas de Bucaramanga durante el período 2012–2023 (141 meses).

Fuentes de datos:

1. Secretaría de Tránsito de Bucaramanga (39,193 registros, 24 variables).
2. DANE (proyecciones poblacionales por comuna).
3. Área Metropolitana de Bucaramanga (AMB) para Shapefiles de barrios.

Variables de Estudio: Se clasificaron en dos grupos:

- **Principales:** Temporales (fecha, hora, año, mes, día, franjas), Espaciales (comuna, barrio), Caracterización (gravedad: daños 50.0 %, heridos 48.4 %, muertos 1.6 %) e Involucramiento vehicular (12 tipos: desde peatón hasta maquinaria pesada).
- **Derivadas:** HORA_NUM (0-24 continuo), DIA_SEMANA, tasa anual promedio (accidentes/10k hab.), rankings de frecuencia vs. tasa y cuadrantes estratégicos (Q1-Q4).

Técnicas estadísticas:

El análisis se realizó en RStudio utilizando los siguientes enfoques:

1. **Descriptivas:** Frecuencias y medidas de tendencia/dispersión.
2. **Bivariadas:** Tablas de contingencia y matrices de co-ocurrencia.
3. **Series temporales:** Descomposición STL, prueba ADF, Ljung-Box, Kruskal-Wallis y detección de cambios estructurales (PELT, Binary Segmentation, AMOC).
4. **Tasas estandarizadas:** Cálculo por unidad espacial y análisis comparativo de rankings.
5. **Análisis espacial:** SIG con paquete sf, mapas coropléticos, categorización de riesgo (6 niveles) y análisis de heterogeneidad.

3. Resultados

3.1. Perfil General y Dinámica Temporal

El análisis de 39,193 eventos (2012–2023) evidencia un sistema con una media mensual de $278,1 \pm 94,3$ accidentes. La Tabla 1 condensa las estadísticas descriptivas, destacando una relación 1:1 entre daños materiales y víctimas físicas.

Temporalmente, la serie presenta una tendencia decreciente ($p < 0,001$) interrumpida por una **ruptura estructural en febrero de 2020** (COVID-19), reduciendo la media mensual en un 45.7 %. La recuperación post-pandemia (2022–2023) se estabilizó al 77.4 % de los niveles históricos, sugiriendo un nuevo equilibrio de movilidad.

A nivel horario, persiste un patrón bimodal con picos a las 12:00h y 18:00h, y una *paradoja nocturna*: menor frecuencia (29.7 %) pero un 31.2 % mayor gravedad.

Cuadro 1: Caracterización simplificada de la siniestralidad (2012–2023)

Dimensión	Indicador Clave	Valor
Gravedad	Solo Daños / Heridos+Muertos	50.0 % / 50.0 %
Letalidad	Total fallecidos	627 (1.6 %)
Vehículo Dominante	Automóvil (Global)	34.2 %
	Motocicleta (Tendencia)	+74.6 % crecimiento
Días Críticos	Sábado (Mayor Frecuencia)	16.5 %
	Domingo (Mayor Gravedad)	54.1 % eventos graves

3.2. Transición Modal

Se confirma la “**motociclización**” de la accidentalidad: la participación de motocicletas creció un 74.6 % relativo, mientras los automóviles cayeron un 35.2 %, invirtiendo la relación de 1.47:1 (2012) a 0.55:1 (2023). Este cambio es crítico dado que la motocicleta presenta una gravedad del 54.2 %, superior a cualquier otro actor vial motorizado.

3.3. Análisis Espacial Estandarizado

La estandarización por tasas (accidentes/10k hab) reveló un sesgo sistemático en los mapas de calor tradicionales (Correlación Spearman $\rho = 0,623$), reconfigurando la priorización territorial:

- **Concentración:** El 17.8 % de los barrios concentran el 58.0 % de los accidentes.
- **Riesgo Oculto:** Barrios como *Río de Oro I* (#1 en Tasa, #8 en Frecuencia) emergen como puntos críticos invisibilizados, con tasas 8.5 veces superiores al promedio.
- **Matriz de Priorización:** C1 (Prioridad Máxima): 41 barrios con Alta Frecuencia y Alta Tasa (e.g., Centro). C3 (Riesgo Oculto): 41 barrios con Baja Frecuencia absoluta pero Alta Tasa de riesgo (e.g., Los Cedros), que requieren intervención urgente pese a su menor volumen total.

Referencias

- [1] KLANJČIĆ, M., GAUVIN, L., TIZZONI, M. & SZELL, M., *Identifying urban features for vulnerable road user safety in Europe*. EPJ Data Science, **11**(27) (2022).
- [2] PEBESMA, E., *Simple Features for R: Standardized Support for Spatial Vector Data*. The R Journal, **10**(1) (2018):439–446.
- [3] BIVAND, R. S., PEBESMA, E. & GÓMEZ-RUBIO, V., *Applied Spatial Data Analysis with R*. 2nd ed. New York: Springer, 2013.
- [4] GONZÁLEZ, N. R. & DIRECCIÓN DE TRÁNSITO DE BUCARAMANGA, *Informe de gestión Grupo Control Vial: Comparativo años 2021–2022 (enero–diciembre)*. Informe de Gestión – Dirección de Tránsito de Bucaramanga, No. 132.9.0.64, Versión 01, 2023.

-
- [5] QGIS DEVELOPMENT TEAM, *QGIS Geographic Information System*. Open Source Geospatial Foundation Project 2025. Disponible en: <https://qgis.org>.
 - [6] R CORE TEAM, *R: A Language and Environment for Statistical Computing*. Vienna, Austria: R Foundation for Statistical Computing, 2025. Disponible en: <https://www.R-project.org/>.
 - [7] HAINING, R., *Spatial Data Analysis: Theory and Practice*. Cambridge University Press, 2003.
 - [8] CLIFF, A. & ORD, J., *Spatial Autocorrelation*. London: Pion, 1973.
 - [9] TOBLER, W. R., *Cellular Geography*. In S. Gale & G. Olsson (Eds.), *Philosophy in Geography*, (1979):379–386
 - [10] ANSELIN, L., *Spatial Econometrics*. In H. Smith & J. Doe (Eds.), *Handbook of Spatial Analysis in the Social Sciences*, (2022):101–122
 - [11] FUENTES, I. T., OLIVELLA, J. & FRANQUESA, P., *Characterization of Traffic Accidents in Barcelona*. Lecture Notes on Data Engineering and Communications Technologies, 2025.
 - [12] GUNDOGDU, I. B., *A new approach for GIS-supported mapping of traffic accidents*. Proceedings of the Institution of Civil Engineers: Transport, 2011.
 - [13] PÉREZ-SALA, L., CURADO, M., TORTOSA, L. & VICENT, J.F., *Deep learning model of convolutional neural networks powered by a genetic algorithm for prevention of traffic accidents severity*. Chaos, Solitons and Fractals, 2023.
 - [14] BABU, S.N. & TAMILSELVI, J.J., *Map Reduce approach for road accident data analysis using data mining techniques*. International Journal of Advanced Intelligence Paradigms, 2024.
 - [15] SANTOYO ROJAS, J. A. & SUELTA GUERRERO, V., *Análisis e identificación de factores negativos que inciden en la movilidad del municipio de Bucaramanga*. Tesis de pregrado, Universidad Industrial de Santander, 2017.
 - [16] OSMA RUEDA, J. L., *Factores asociados a la severidad del trauma ocasionado por lesiones en motocicleta en el área metropolitana de Bucaramanga*. Tesis de maestría, Universidad Industrial de Santander, 2011.

5.22 Modelos de Regresión para Datos de Conteo con Exceso de Ceros

Isabel Cristina Acevedo Agudelo¹, Raúl Alejandro Morán Vásquez²

Resumen

Este trabajo presenta una comparación de algunos modelos de regresión para datos de conteo con exceso de ceros y sobredispersión, incluyendo los modelos Poisson inflado en ceros (ZIP), Binomial Negativo inflado en ceros (ZINB) y Hurdle, siguiendo la metodología propuesta por [3]. Se revisan los fundamentos teóricos de las distribuciones Poisson y Binomial Negativa, y se implementan los modelos utilizando el paquete `psc1` en R [9]. Los resultados evidencian que los modelos tradicionales no capturan adecuadamente la presencia de ceros excesivos, mientras que los modelos Hurdle y ZINB ofrecen un ajuste superior según los criterios AIC, BIC y las pruebas de Vuong. Estos enfoques resultan especialmente útiles en el análisis de datos de salud, como el número de visitas médicas realizadas por pacientes con enfermedades crónicas.

Palabras & frases claves: Datos de conteo, exceso de ceros, ZIP, ZINB, Hurdle, sobredispersión, R.

1. Introducción

El modelado de datos de conteo en el ámbito de los servicios de salud constituye un desafío relevante para la estadística aplicada, especialmente cuando se analizan variables como el número de visitas médicas realizadas por pacientes con enfermedades crónicas. Estas variables suelen presentar características particulares, entre las cuales destacan el exceso de ceros y la sobredispersión, condiciones que limitan la aplicación y validez de los modelos clásicos como la regresión de Poisson [1]. El exceso de ceros se manifiesta cuando una proporción considerable de pacientes no realiza ninguna visita médica durante el periodo de observación [2], lo que puede reflejar tanto barreras de acceso al sistema de salud como un adecuado control de la enfermedad. Por su parte, la sobredispersión (varianza mayor que la media) evidencia la heterogeneidad entre los individuos que sí utilizan los servicios sanitarios [3].

Para abordar estas particularidades, se han desarrollado modelos avanzados que amplían el marco de los Modelos Lineales Generalizados (MLG) [4], entre los cuales destacan los modelos inflados en ceros (Zero-Inflated Models) y los modelos de obstáculo (Hurdle Models). Los primeros, introducidos por [5] y [6], suponen que los ceros provienen de dos procesos distintos: uno estructural, que genera ceros de manera determinista, y otro de conteo, que puede producir ceros aleatorios. En contraste, los modelos Hurdle [6] dividen el proceso en dos etapas: la primera modela la decisión de participación o acceso (es decir, superar el “obstáculo”), y la segunda describe la intensidad del conteo condicional a haber participado. La elección entre ambos enfoques no siempre es evidente. La selección del modelo más apropiado debe considerar tanto criterios estadísticos –como el AIC, BIC y el test de Vuong– como fundamentos teóricos sobre el proceso generador de datos subyacente [7], [8]. En el contexto de las enfermedades crónicas, comprender los mecanismos que explican

¹Universidad de Antioquia, Medellín - Colombia. Correo: icristina.acevedo@udea.edu.co

²Universidad de Antioquia, Medellín - Colombia. Correo: raul.moran@udea.edu.co

la no utilización del servicio y la frecuencia de uso entre los usuarios permite una interpretación más completa de los patrones de atención médica y favorece la planificación sanitaria basada en evidencia.

El presente estudio tiene como propósito analizar y comparar distintos modelos para datos de conteo con exceso de ceros, incluyendo la regresión Poisson, la Binomial Negativa, y sus extensiones infladas en ceros y Hurdle. A través de datos simulados que representan el número de visitas médicas por paciente con tres tipos de enfermedades crónicas, se busca demostrar que los modelos inflados en ceros y los modelos de obstáculo ofrecen un mejor ajuste frente a los modelos tradicionales, especialmente en presencia de sobredispersión y ceros estructurales.

2. Metodología

Se realizó una simulación de datos de 500 pacientes con tres tipos de enfermedades crónicas (40 % diabetes, 35 % hipertensión, 25 % EPOC), registrando el número de visitas médicas anuales. El proceso de generación de datos incorporó dos componentes:

Componente binario: Probabilidad de ser cero estructural (pacientes que no visitan al médico)

Componente de conteo: Número de visitas entre quienes acceden al sistema, modelado con distribución binomial negativa

Se compararon seis modelos: Poisson, Binomial Negativo, ZIP, ZINB, Hurdle Poisson y Hurdle Binomial Negativo, utilizando criterios de información (AIC, BIC) y tests de Vuong para la selección del mejor modelo.

3. Resultados

3.1. Estadísticas Descriptivas

Para la simulación realizada con un tamaño de muestra $n = 500$ y una proporción de ceros del 40,8 %, con media de 9,1 visitas médicas anuales, y su varianza de 181,51. Además, la proporción de ceros de las visitas médicas por tipo de enfermedad es para Diabetes del 0,4393, Hipertensión 0,4054 y EPOC 0,3589.

En la Figura 1 se aprecia que la distribución de los datos presenta un marcado exceso de ceros, evidenciando la necesidad de modelos que consideren esta característica.

La Figura 2, se muestra la proporción de ceros (pacientes que no realizaron visitas médicas durante el último año) según el tipo de enfermedad crónica y su nivel de severidad. Se observa que, en Diabetes, alrededor del 43 % de los pacientes con casos leves y el 46 % con casos graves no acudieron al médico. En Hipertensión, la proporción de ceros es del 36 % para casos leves y del 47 % para casos graves. En EPOC, la diferencia es más marcada: solo el 24 % de los pacientes leves no asistieron, frente a un 56 % de los graves.

3.2. Comparación de Modelos

En la Figura 3 se comparan los diferentes ajustes, observándose que los modelos ZINB y Hurdle representan de manera más adecuada la distribución empírica de los conteos, especialmente en los

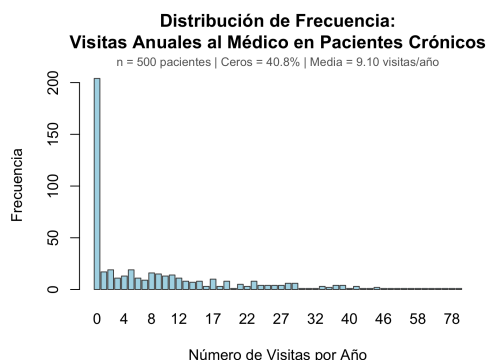


Figura 1: Distribución de las visitas médicas

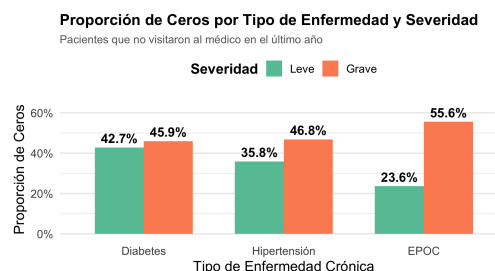


Figura 2: Proporción de ceros por tipo de enfermedad y severidad

valores bajos de visitas. Así mismo, en el Cuadro 1 se observan los resultados obtenidos a partir de los diferentes criterios de comparación de modelos y en la y la Figura 4 se realiza la comparación mediante el criterio de información AIC se muestra que la distribución de Poisson es la menos adecuada para este tipo de datos, mientras que Hurdle y ZINB muestran mejores ajustes.

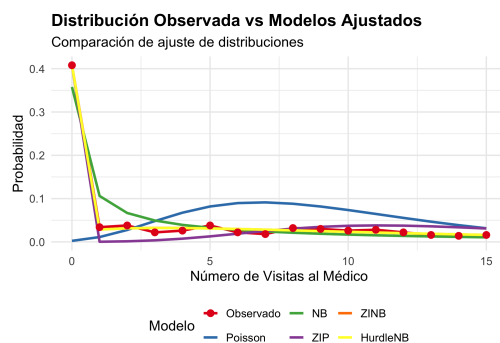


Figura 3: Comparación del ajuste de los modelos

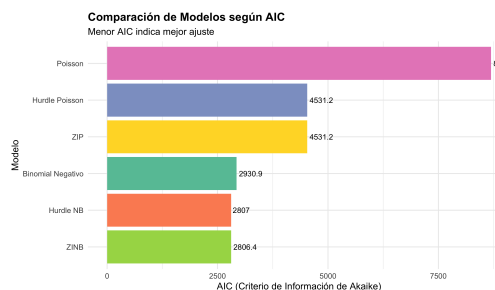


Figura 4: Comparación de los criterios de información AIC

Cuadro 1: Comparación de modelos de conteo con exceso de ceros

Modelo	LogLik	AIC	BIC	Δ AIC
ZINB	-1390.224	2806.448	2861.238	0.000
Hurdle NB	-1390.475	2806.951	2861.741	0.503
Binomial Negativa	-1458.452	2930.904	2960.406	124.456
ZIP	-2253.592	4531.184	4581.760	1724.736
Hurdle Poisson	-2253.600	4531.201	4581.777	1724.753
Poisson	-4340.246	8692.492	8717.779	5886.044

En el análisis comparativo de los modelos con el test de Vuong se demuestra que el modelo ZINB

es significativamente superior al Binomial Negativo estándar ($z = 7,08$, $p < 0,0001$).

Sin embargo, la comparación entre el ZINB y el Hurdle Binomial Negativo no muestra diferencias significativas ($z = -0,899$, $p = 0,184$), indicando que ambos enfoques capturan adecuadamente la estructura de los datos. Ante esta equivalencia estadística, se selecciona el modelo ZINB como final basado en su menor valor de AIC (2806,448 vs. 2806,951) y su mayor adecuación teórica para el contexto de utilización de servicios de salud.

El modelo ZINB permite distinguir entre dos tipos de ceros: estructurales (pacientes que no acceden al sistema) y muestrales (pacientes que podrían haber tenido visitas pero no las tuvieron). El modelo **ZINB** demostró el mejor ajuste según el criterio de información de Akaike (AIC = 2806,448). El test de Vuong confirmó la superioridad del ZINB sobre el modelo Binomial Negativo estándar ($p < 0,001$).

Referencias

- [1] CAMERON, ADRIAN COLIN & TRIVEDI, PRAVIN K., *Regression analysis of count data*. Cambridge University Press. **53** (2013).
- [2] FENG, CINDY XIN, *A comparison of zero-inflated and hurdle models for modeling zero-inflated count data*. Journal of Statistical Distributions and Applications. **8**(1) (2021):8.
- [3] ZEILEIS, ACHIM, KLEIBER, CHRISTIAN & JACKMAN, SIMON, *Regression models for count data in R*. Journal of Statistical Software. **27** (2008):1–25.
- [4] NELDER, JOHN A. & WEDDERBURN, ROBERT WM, *Generalized Linear Models*. Journal of the Royal Statistical Society: Series A. **135**(3) (1972):370–384.
- [5] LAMBERT, DIANE, *Zero-inflated Poisson regression, with an application to defects in manufacturing*. Technometrics. **34**(1) (1992):1–14.
- [6] MULLAHY, JOHN, *Specification and testing of some modified count data models*. Journal of Econometrics. **33**(3) (1986):341–365.
- [7] GREENE, WILLIAM H., *Accounting for excess zeros and sample selection in Poisson and negative binomial regression models*, 1994.
- [8] HU, MEI-CHEN, PAVLICOVA, MARTINA & NUNES, EDWARD V., *Zero-inflated and hurdle models of count data with extra zeros: examples from an HIV-risk reduction intervention trial*. The American Journal of Drug and Alcohol Abuse. **37**(5) (2011):367–375.
- [9] JACKMAN, SIMON, *pscl: Classes and methods for R. Developed in the political science computational laboratory, Stanford University. Department of political science, Stanford University, Stanford, ca. R package version 1.03.5.*, 2010. <http://www.pscl.stanford.edu/>

5.23 Rompiendo el Molde: Identificando los Diversos Perfiles de Éxito Académico en Colombia con MCA y Machine Learning

Juan Pablo Gomez Morales , Jonnathan Steven Forero Vargas , Yerson Ferney Torres Caballero

1. Introducción

Las pruebas Saber Pro constituyen un instrumento fundamental para evaluar la calidad de la educación superior en Colombia. No obstante, los análisis tradicionales suelen obviar la diversidad de trayectorias académicas exitosas. Este estudio se enfoca en los estudiantes de Matemáticas y Ciencias Naturales que presentaron dichas pruebas entre 2016 y 2024, con el objetivo de identificar patrones de rendimiento y perfiles académicos mediante técnicas multivariadas y de machine learning.

A partir de datos oficiales del ICFES, se aplica Análisis de Correspondencias Múltiples (MCA), junto con Análisis de Componentes Principales (PCA) para reducir la dimensionalidad de los datos y el clustering K-Means para caracterizar grupos estudiantiles. Adicionalmente, se emplean modelos de regresión lineal múltiple para cuantificar el efecto de los perfiles identificados en el rendimiento académico.

El estudio busca superar los enfoques agregados tradicionales y aportar una visión más detallada y representativa del desempeño académico en el área de Matemáticas y Ciencias Naturales, con implicaciones para el diseño de políticas educativas en Colombia.

2. Metodología

La investigación se desarrolló mediante un diseño metodológico secuencial que integra técnicas estadísticas y de machine learning. Como fuente principal se utilizaron los datos oficiales del ICFES (DataIcfes) [1] del período 2016–2024, que incluyen puntajes de competencias genéricas y específicas, áreas de conocimiento y variables sociodemográficas de los estudiantes.

La fase inicial comprendió el procesamiento de datos mediante las librerías pandas y numpy, ejecutando procesos de limpieza, estandarización de categorías y tratamiento de valores atípicos. Dado que las bases de datos con respecto a las pruebas genéricas y específicas eran distintas, se debieron unir las mismas a partir del consecutivo por estudiante que identifica a cada uno de ellos.

También se realizó una clasificación de las carreras por área y núcleos de conocimiento, columnas que se agregaron apropiadamente al DataFrame con la intención de clasificar más apropiadamente los resultados y a su vez ganar más información. Posteriormente, se realizó un análisis exploratorio mediante estadísticas descriptivas y visualización con matplotlib y seaborn.

Para el análisis multivariado, se implementaron dos enfoques complementarios: Análisis de Correspondencias Múltiples (MCA) combinado con clustering K-Means para la identificación de perfiles estudiantiles a partir de variables categóricas, y Análisis de Componentes Principales (PCA) aplicado sobre los puntajes de los módulos de conocimiento para detectar patrones subyacentes de habilidad académica.

Todo el proceso analítico fue implementado utilizando scikit-learn para las técnicas de clustering y PCA, garantizando un enfoque reproducible y metodológicamente sólido en la caracterización de los perfiles académicos.

3. Resultados

A continuación se presentan los principales hallazgos del estudio, donde se analiza el rendimiento académico en conjunto con variables sociales, económicas, demográficas, entre otras, de los estudiantes. Este enfoque integral permite identificar perfiles estudiantiles que reflejan la diversidad de contextos y realidades presentes en la educación superior colombiana.

3.1. Análisis de las pruebas genéricas

Los resultados se derivan del análisis de 2,2 millones de registros (2016–2024) y se centran en la segmentación de la población según su estructura de habilidad y contexto socioacadémico y socio-económico.

3.1.1 Estructura de la habilidad y dimensiones latentes (PCA)

El análisis descriptivo confirma que el Área de Matemáticas y Ciencias Naturales es el grupo de mayor desempeño del país, con un puntaje global promedio de 164,64, superando significativamente la media nacional. El desempeño más alto se da en razonamiento cuantitativo (172,72) e inglés (173,31).

Para explorar los patrones subyacentes, se aplicó Análisis de Componentes Principales (PCA) a los cinco puntajes genéricos. Los resultados muestran que el 73 % de la varianza total es explicada por los siguientes tres componentes principales:

1. **Primer componente principal:** El puntaje global y el módulo de lectura crítica tienen pesos altos (4.8 y 4.0), lo cual significa que captura el rendimiento en la prueba de los estudiantes.
2. **Segundo componente principal:** El índice socioeconómico y el estrato de vivienda tienen pesos altos (0.63 y 0.60), lo cual significa que captura condiciones socioeconómicas de los estudiantes.
3. **Tercer componente principal:** La variable dominante aquí es el año de nacimiento con un peso muy alto de 0.83. Esta refleja la edad o generación de los estudiantes.

3.1.2 Perfiles Estudiantiles y Caracterización de MCN (K-Means)

El Clustering K-Means aplicado a las coordenadas del PCA identificó cuatro perfiles estudiantiles con características socioacadémicas distintivas:

- **Cluster 0 – “Estudiantes Promedio” (37.6 %):** Presentan rendimiento académico medio (153.35 puntos globales) y nivel socioeconómico bajo-medio (estrato 2.24). Con una edad promedio de 25 años, destacan en Inglés (154.71) y Lectura Crítica (158.07). Representan el grupo más numeroso del sistema educativo.

- **Cluster 1 – “Estudiantes en Desventaja Académica” (28.7 %):** Registran el rendimiento más bajo (121.42 puntos) y nivel socioeconómico bajo (estrato 2.10). Con 26 años en promedio, muestran dificultades generalizadas en todas las competencias evaluadas.
- **Cluster 2 – “Estudiantes Adultos” (12.9 %):** Se caracterizan por mayor edad (40 años promedio) y rendimiento medio-bajo (133.96 puntos). Presentan el índice socioeconómico más bajo (47.21), sugiriendo desafíos adicionales por su condición de estudiantes-trabajadores.
- **Cluster 3 – “Estudiantes de Alto Rendimiento” (20.8 %):** Exhiben excelente desempeño académico (179.53 puntos) y nivel socioeconómico medio-alto (estrato 3.47). Como los más jóvenes (24 años), destacan notablemente en Inglés (193.87) y Competencias Ciudadanas (179.47).

La distribución revela que 66.3 % de los estudiantes se ubican en clusters de rendimiento medio o bajo, mientras que la brecha de inglés entre los extremos alcanza 61.3 puntos, evidenciando profundas desigualdades socioacadémicas en el sistema educativo colombiano.

3.1.3 Análisis en núcleos específicos y género

El estudio de los núcleos específicos de MCN complementó los hallazgos:

- **Sesgo de muestra:** Se observó que los núcleos de Matemáticas (puras y aplicadas), Física y Geología obtienen los puntajes más altos de MCN, pero son los subgrupos con la menor cantidad de estudiantes. Esta correlación inversa entre el rendimiento promedio superior y la baja muestra es crucial para la interpretación.
- **Paridad de género:** A pesar de la segregación en la participación (baja presencia femenina en Física/Matemáticas frente a alta en Biología/Química), el estudio confirmó que la diferencia en el puntaje promedio global entre hombres y mujeres es mínima en los núcleos, sugiriendo una paridad de habilidad académica en el área MCN.
- **Puntos fuertes y débiles:** Las áreas de Matemáticas y Ciencias Naturales destacan principalmente en razonamiento cuantitativo e inglés. En general, el desempeño es más bajo y uniforme en comunicación escrita y lectura crítica para todos los núcleos del área.

3.2. Análisis pruebas - específicas

Las pruebas específicas evalúan el dominio disciplinar de las Matemáticas y Ciencias Naturales en esta misma área de conocimiento, mientras que las pruebas genéricas proporcionan la información contextual sobre condiciones económicas, regionales e institucionales. Esta integración permite analizar cómo estos factores socioeducativos inciden en el desempeño académico específico, ofreciendo una visión multidimensional del rendimiento estudiantil que trasciende los puntajes aislados. Dado que el estudio se centra en los estudiantes del área de Ciencias Matemáticas y Naturales, se analizaron los resultados de las pruebas específicas correspondientes a este campo del conocimiento. Entre estas se incluyen: Pensamiento científico (que abarca ciencias biológicas, matemáticas y estadística, química, ciencias de la tierra y ciencias físicas), entre otras.

Los resultados en las pruebas de Pensamiento Científico revelan patrones diferenciados entre los programas del área de Matemáticas y Ciencias Naturales. Destacan Astronomía y Física en Ciencias Físicas (173.1 y 172.7 puntos), mientras Ciencias de la Computación y Ciencia de Datos lideran en

Matemáticas y Estadística (172.7 y 170.1 puntos). El programa de Matemáticas obtiene un puntaje sólido de 168.5 puntos en la prueba de Matemáticas y Estadística, ubicándose en un rango competitivo aunque por debajo de programas aplicados como Ciencias de la Computación. Este patrón sugiere que, dentro del área MCN, los programas con enfoque más aplicado o especializado tienden a obtener mejores resultados en las pruebas específicas de Pensamiento Científico, mientras que Matemáticas puras mantiene un desempeño consistente pero moderado.

A nivel regional, Bogotá y Santander presentan los mejores resultados en todas las disciplinas científicas, con promedios significativamente mayores que los de departamentos como Atlántico y Boyacá, que no superan los 100 puntos. Entre las instituciones, la Universidad Industrial de Santander destaca con los promedios más altos y consistentes, seguida por la UNAD y el Politécnico Grancolombiano.

Referencias

- [1] ICFES, *Data ICFES – repositorio de datos de ICFES*, 2025. Disponible en: <https://www.icfes.gov.co/investigaciones/data-icfes/>.
- [2] DIRK P. KROESE, ZDRAVKO I. BOTEV, THOMAS TAIMRE Y RADISLAV VAISMAN, *Data Science and Machine Learning: Mathematical and Statistical Methods*. Chapman and Hall/CRC, 2024.
- [3] THE PANDAS DEVELOPMENT TEAM, *pandas documentation*, 2024. Disponible en: <https://pandas.pydata.org/docs/>.
- [4] MICHAEL GREENACRE, *Correspondence Analysis in Practice*. Third Edition. CRC Press, Taylor & Francis Group, 2017.
- [5] FREUND, *Estadística Matemática con Aplicaciones*. Prentice Hall, 1990,
- [6] MOOD, *Introduction to the Theory of Statistics*. McGraw-Hill, 1973.

5.24 Un estudio estadístico de colombianos detenidos en el exterior

Manuela Cuervo¹, Cesar Pinto², Oscar Ramirez³

Resumen

La situación legal de los ciudadanos colombianos en el extranjero constituye un problema de relevancia nacional. Este trabajo aborda dicha problemática mediante un análisis de datos cuantitativo, utilizando el conjunto de datos *Colombianos detenidos en el exterior*, suministrado por el Ministerio de Relaciones Exteriores [1], que recopila información del período 2018-2025. El marco de datos incluye variables como el país de reclusión, consulado, género y grupo etario, entre otras.

La investigación aplicada comprende las fases de depuración, limpieza y estandarización de la información, seguidas de un análisis descriptivo para caracterizar las principales variables involucradas [2, p. 463–494]. Finalmente, se realiza un Análisis de Correspondencias Múltiples (MCA) para reducir la dimensionalidad e identificar tendencias relevantes en los registros analizados [3, p. 433–444]. De esta manera, se logra organizar los datos en conjuntos con características compartidas, aportando una perspectiva cuantitativa que enriquece la comprensión del fenómeno y facilita futuros estudios comparativos en contextos sociales y migratorios.

El análisis estadístico se realizó utilizando Python y las librerías NumPy, Pandas, scikit-learn, Seaborn y Matplotlib.

Palabras & frases claves: análisis descriptivo base de datos, colombianos detenidos en el exterior, análisis de correspondencias múltiples.

1. Introducción

El presente análisis tiene como objetivo caracterizar de manera integral la situación jurídica, demográfica y delictiva de las personas detenidas en el exterior, a partir de un conjunto de datos suministrado por los consulados. Para ello, se llevó a cabo un proceso de limpieza y depuración que permitió corregir inconsistencias, reducir la proporción de valores desconocidos y garantizar la calidad de la información utilizada. Posteriormente, se realizaron análisis descriptivos, temporales y categóricos con el fin de identificar tendencias, patrones y posibles vacíos en el registro de información. Finalmente, se aplicó un Análisis de Correspondencias Múltiples (MCA) para explorar relaciones entre variables cualitativas y obtener una visión global de las estructuras subyacentes en los datos. Este estudio ofrece insumos relevantes para comprender la dinámica del fenómeno y para orientar futuras estrategias institucionales en materia de protección consular, registro estadístico y cooperación internacional.

2. Desarrollo

¹Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Correo: mCuervor@udistrital.edu.co

²Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Correo: crpintom@udistrital.edu.co

³Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Correo: oscdramirez@udistrital.edu.co

Con el fin de llevar a cabo un análisis sólido, primero se realizó un proceso de limpieza del conjunto de datos. Se inició corrigiendo errores de codificación que generaban valores duplicados en varias columnas. Luego, se identificaron 218 616 registros con el valor “Desconocido” en la columna país prisión. Así mismo, se creó un diccionario a partir de la variable *consulado país*, asociando cada consulado con el país de prisión más frecuente mediante la función *groupby* y la moda. Posteriormente, se desarrolló una función que asignara un país correspondiente a los valores desconocidos según su consulado. Con este procedimiento, el número de datos clasificados como “Desconocido” se redujo a 791.

Una vez depurada la base, se realizó un análisis descriptivo que permitió caracterizar la situación jurídica de las personas detenidas en el exterior. La categoría más frecuente es la de personas condenadas (42.1 %), seguida de quienes se encuentran en investigación (36.5 %) y aquellos en etapa de juicio (17.3 %). Esta distribución concuerda con la naturaleza de los procesos penales, en los que las sentencias suelen extenderse por periodos prolongados. Respecto a los delitos, predomina el narcotráfico (39.1 %), seguido del hurto (20.1 %). Un 16.7 % se clasifica como “Desconocido”, lo que evidencia vacíos de información en algunos países. Homicidio o tentativa de homicidio (12.9 %) y la categoría Otros (11.2 %) completan el panorama delictivo.

El análisis temporal permite identificar la evolución y las tendencias de los fenómenos jurídicos a lo largo de los años. En 2018 se observa un número reducido de casos (4,845), lo que sugiere un nivel inicial bajo de reportes o detenciones. A partir de 2019 se presenta un crecimiento constante, alcanzando su punto más alto en 2022 con 76,621 detenidos, lo que podría asociarse a un fortalecimiento en los mecanismos de registro o a un aumento real de los casos en el exterior. Sin embargo, tras este pico, se aprecia una tendencia descendente en los años posteriores, con 72,521 en 2023, 62,981 en 2024 y 41,966 en 2025, lo que podría reflejar una disminución en las detenciones, una mejora en la situación jurídica de los connacionales o una reducción en los reportes. En conjunto, los datos revelan un comportamiento variable, con un periodo de crecimiento sostenido hasta 2022 seguido de una moderada contracción en los años más recientes.

En cuanto a la variable *extraditado_repatriado*, el 94 % de los registros presenta el valor “Desconocido”, lo que revela una importante brecha de información. Esta ausencia de datos puede explicarse por las dificultades administrativas y los altos costos asociados a los procesos de extradición y repatriación, que requieren coordinación diplomática, trámites judiciales complejos y recursos logísticos significativos. Aunque los casos de extradición 5.6 % superan ampliamente a los de repatriación 0.15 %, ambos constituyen una proporción muy pequeña del total, evidenciando limitaciones en la gestión estatal de estos procedimientos y la necesidad de fortalecer los sistemas de registro y actualización.

En el análisis por grupo etario se observa que la población adulta concentra la mayoría de los casos (44.5 %) y presenta las cifras más altas en casi todas las categorías delictivas, especialmente narcotráfico, hurto y homicidio. Un 29.7 % de registros tiene edad desconocida, lo cual afecta la capacidad de caracterizar con precisión tendencias etarias asociadas al delito. Los adultos jóvenes representan un 13.1 % y los adultos mayores un 11.7 %, ambos con patrones similares aunque de menor magnitud. En contraste, los menores de edad representan menos del 1 %, lo que refleja que la población detenida en el exterior se compone mayoritariamente de adultos.

Por género, se evidencia una marcada predominancia masculina. Los hombres concentran la mayor participación en todos los delitos analizados: narcotráfico, hurto, homicidio, porte ilegal de armas y crimen organizado. El narcotráfico muestra una diferencia notable, con un 28.1 % de participación

masculina frente a un 7.5 % femenina. En general, las mujeres aparecen en proporciones mucho menores, manteniéndose entre el 2 % y el 7 % en la mayoría de los delitos. Estos resultados coinciden con tendencias globales sobre la composición de las poblaciones penitenciarias, donde la criminalidad está sustancialmente asociada a la población masculina.

Finalmente, se aplicó un Análisis de Correspondencias Múltiples (MCA) con el fin de estudiar simultáneamente las relaciones entre las variables cualitativas. El MCA transforma las categorías en indicadores binarios y permite identificar proximidades entre ellas en un espacio de dimensiones reducidas. Esto facilita la detección de patrones y asociaciones, como afinidades entre tipos de delitos, grupos etarios, géneros y situaciones jurídicas. En este estudio, el MCA complementa el análisis descriptivo al proporcionar una visión global de las estructuras latentes en los datos, revelando agrupamientos no evidentes a simple vista y permitiendo una mejor interpretación del comportamiento de las personas detenidas en el exterior.

3. Conclusiones

El estudio revela que la población detenida en el exterior se caracteriza principalmente por adultos y hombres, con predominio de delitos como narcotráfico y hurto y una mayor presencia de personas en etapa de condena. El análisis temporal muestra un aumento constante de casos hasta 2022, seguido de una disminución en los años posteriores, lo cual podría deberse tanto a variaciones reales en las detenciones como a mejoras o limitaciones en los sistemas de reporte.

Asimismo, se identificaron vacíos significativos en la información relativa a extradiciones, repatriaciones y edad, lo que limita la profundidad del análisis en algunos aspectos. Estos hallazgos subrayan la importancia de fortalecer los procesos de recolección y actualización de datos consulares, así como de continuar aplicando métodos multivariados como el MCA para comprender de manera más integral las dinámicas que afectan a esta población.

Referencias

- [1] MINISTERIO DE RELACIONES EXTERIORES. *Colombianos detenidos en el exterior*. Base de datos en línea. Recuperado 12 de sep de 2025, 2022. https://www.datos.gov.co/Estadisticas-Nacionales/Colombianos-detenidos-en-el-exterior/e97j-vuf7/about_data.
- [2] DIRK P KROESE, ZDRAVKO BOTEV, THOMAS TAIMRE, AND RADISLAV VAISMAN. *Python primer*. In *Data science and machine learning: mathematical and statistical methods*, chapter D, pages 463–494. Chapman and Hall/CRC, 2019. Capítulo D: Python Primer.
- [3] JAKE VANDERPLAS. *Python data science handbook: Essential tools for working with data*. In *Python data science handbook: Essential tools for working with data*, chapter 5, pages 433–444. O'Reilly Media, Inc, 2016.

TOPOLOGÍA Y GEOMETRÍA DIFERENCIAL



Grupo GIM

El grupo de investigación en matemáticas de la UIS, Grupo GIM-UIS, busca promover y desarrollar las matemáticas en la región, y evidenciar las actividades que realiza un matemático. Cuenta con profesores investigadores y estudiantes de la Escuela de Matemáticas. Sus líneas de investigación son: Topología general, Teoría de conjuntos, Análisis Funcional y Geometría. Los miembros del grupo publican regularmente en revistas científicas reconocidas mundialmente, participa en eventos académicos nacionales e internacionales, y dirige trabajos de grado en matemáticas a nivel de pregrado y posgrado.

GIM promueve la relación con grupos de otras universidades de la región ya sea a través de investigaciones conjuntas o de la realización de eventos de carácter nacional o internacional.

6.1 Clasificación de hipersuperficies usando el operador de Cheng-Yau.

S. Carolina García-Martínez.¹

Resumen

En esta charla estudiaremos cuales superficies inmersas en los 3-espacios forma no llanos (riemannianos y lorentzianos) satisfacen que el vector curvatura media es función propia del operador Cheng-Yau. Adicionalmente, mostraremos cuales hipersuperficies en la 4-esfera euclídeana unitaria satisfacen la condición.

Palabras & frases claves: Operador de Cheng-Yau, transformación de Newton, vector curvatura media.

1. Introducción

Consideremos $\psi : M^n \rightarrow \mathbb{M}_q^{n+1}(c)$ una inmersión isométrica de una hipersuperficie no-degenerada M en un espacio forma $(n+1)$ -dimensional no llano $\mathbb{M}_q^{n+1}(c)$ de curvatura $c = \pm 1$ y de índice $q = 0, 1$. Es bien conocido que la ecuación de Laplace-Beltrami afirma que

$$\Delta\psi = n\vec{H}, \quad (1)$$

donde Δ es el operador Laplace-Beltrami de la hipersuperficie y $\vec{H}$ denota el vector curvatura media de la inmersión. Dado que $\vec{H} = HN - c\psi$, donde H es la función curvatura media de M en $\mathbb{M}_q^{n+1}(c)$ y N es un campo vectorial normal unitario a M en $\mathbb{M}_q^{n+1}(c)$, se sigue de aquí que $\Delta\psi = \lambda\psi$ para una constante real λ si y sólo si $H = 0$, esto es, si y solo si M es una hipersuperficie minimal en $\mathbb{M}_q^{n+1}(c)$, obteniendo así una simple versión del Teorema de Takahashi para el caso particular de hipersuperficies en $\mathbb{M}_q^{n+1}(c)$ [8, 7].

De (1) se sigue que toda hipersuperficie en $\mathbb{M}_q^{n+1}(c)$ que satisface la condición $\Delta\psi = \lambda\psi$, con $\lambda \in \mathbb{R}$, trivialmente satisface la condición más débil $\Delta\vec{H} = \lambda\vec{H}$. De ahí que Alías, Ferrández y Lucas en [1] clasificaron las hipersuperficies en $\mathbb{M}_q^{n+1}(c)$ que satisfacen la condición $\Delta\vec{H} = \lambda\vec{H}$. Note que esta ecuación diferencial característica respecto al operador de Laplace-Beltrami ha sido ampliamente estudiada, por ejemplo si $\lambda = 0$ son las hipersuperficies conocidas como biarmónicas.

Es importante resaltar que el operador Laplace-Beltrami es un operador diferencial intrínseco de segundo orden que aparece naturalmente como el operador linealizado de la curvatura media por variaciones normales. En una forma similar, el operador Cheng y Yau denotado aquí por $\square$ aparece naturalmente como el operador linealizado de la primera variación de la curvatura escalar de la hipersuperficie. Esos dos operadores comparten muchas propiedades en común y gracias a las transformaciones de Newton, el operador $\square$ se puede ver como una generalización de Δ . De ahí que muchos teoremas como el de Takahashi hayan sido generalizados a este operador (véase [4, 6]). Por ende, Alías, Ramirez-Ospina y García-Martínez iniciamos un estudio de la condición $\square\vec{H} = \lambda\vec{H}$. En

¹Universidad Nacional de Colombia, sede Bogotá. Correo: sacgarcia@unal.edu.co

esta charla, mostraremos los resultados de clasificación que hemos obtenido [2] para superficies en $\mathbb{M}^3(c)$ y en [3] para las hipersuperficies en $\mathbb{S}^4$. Así como, los casos que aún permanecen abiertos.

Referencias

- [1] L.J. ALÍAS, A. FERRÁNDEZ AND P. LUCAS. *Hypersurfaces in the non-flat Lorentzian space forms with a characteristic eigenvector field*, J. Geom. **52** (1995):10–24.
- [2] L.J. ALÍAS, S. C. GARCÍA-MARTÍNEZ AND H. FABIÁN RAMÍREZ-OSPINA, *Surfaces in non-flat 3-space forms satisfying $\square \vec{H} = \lambda \vec{H}$* , Bull. Malays. Math. Sci. Soc. **46**(185) (2023):1–15.
- [3] L.J. ALÍAS, S.C. GARCÍA-MARTÍNEZ AND H.F. RAMÍREZ-OSPINA. *Classification of hypersurfaces in the Euclidean 4-sphere satisfying $\square \vec{H} = \lambda \vec{H}$* , Bull. Malays. Math. Sci. Soc. **35**(308) (2025):1–29.
- [4] L.J. ALÍAS AND N. GÜRBÜZ. *An extension of Takahashi theorem for the linearized operators of the higher order mean curvatures*, Geom. Dedicata **121** (2006):113–127.
- [5] S.Y. CHENG AND S.T. YAU. *Hypersurfaces with constant scalar curvature*, Math. Ann. **225** (1977):195–204.
- [6] O.J. GARAY. *An extension of Takahashi's theorem*, Geom. Dedicata **34** (1990):105–112.
- [7] S. MARKVORSEN. *A characteristic eigenfunction for minimal hypersurfaces in space forms*, Math. Z. **202** (1989):375–282.
- [8] T. TAKAHASHI. *Minimal immersions of Riemannian manifolds*, J. Math. Soc. Japan **18** (1966):380–385.

6.2 Propiedades de la Función $\wp$.

Sergio Macías.¹

Resumen

Haremos un recorrido histórico que motivó la definición de la Función $\wp$.

Palabras & frases claves: Continuo, continuo descomponible continuo homogéneo, continuo indescomponible, descomposición, Función $\mathcal{T}$ de Jones, Función $\wp$.

1. Introducción

Hablaremos de algunos de los trabajos de W. Sierpiński, F. Burton Jones, James T. Rogers, C. Hagopian and J. Prajs, que motivaron la definición de la Función $\wp$.

Referencias

- [1] S. MACÍAS, *Hausdorff continua and the uniform property of Effros*, Topology Appl., **230** (2017):338–352.
- [2] S. MACÍAS, *Topics on Continua, Second Edition*, Springer Cham, 2018.
- [3] S. MACÍAS, *Set Function $\mathcal{T}$, An account on F. B. Jones' Contributions to Topology* Developments in Mathematics, 67, Springer Cham 2021.
- [4] S. MACÍAS, *On the set function $\wp$* , Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae, **65** (2024):99–129.
- [5] S. MACÍAS, *On Effros continua and the uniform property of Effros*, Revista Integración (Temas de Matemáticas) de la Escuela de Matemáticas, Universidad Industrial de Santander, Bucaramanga, Colombia. **43**(1) (2025):49–59.

¹Universidad Nacional Autónoma de México. Correo: sergiom@matem.unam.mx

6.3 El Teorema de descomposición de Hodge en variedades de Kähler

Alexánder Pérez Guzmán¹

Resumen

Se presentarán las ideas fundamentales de la teoría de Hodge y su relación con la cohomología de de Rham, destacando el aporte de William Hodge en la década de 1930. Se introducirá la noción de estructuras cuasi complejas y la construcción de las (p, q) -formas diferenciales, lo que conduce naturalmente a la definición de la cohomología de Dolbeault. Posteriormente, se expondrá el *Teorema de descomposición de Hodge*, haciendo énfasis en su validez para variedades de Kähler compactas y en la correspondencia que establece entre cohomología de de Rham, cohomología de Dolbeault y formas armónicas. Así mismo, se presentarán ejemplos algunos como el espacio proyectivo complejo y las variedades proyectivas algebraicas complejas. Finalmente, se hará mención de la *Conjetura de Hodge*, uno de los problemas del Milenio donde se evidencia la presencia de este teorema.

Palabras & frases claves: Teoría de Hodge, Variedades de Kähler, Teorema de descomposición de Hodge.

1. Introducción

La teoría de Hodge se originó en la década de 1930 gracias al matemático William Hodge, quien buscó refinar la teoría desarrollada por Georges de Rham sobre un tipo particular de cohomología en variedades suaves, construida a partir de p -formas diferenciales.

Su aporte consistió en vincular estos conceptos con el análisis, introduciendo operadores como el adjunto de la derivada exterior, lo que permitió definir el operador de Laplace–Beltrami y, con ello, el concepto de forma armónica. Hodge demostró que cada clase de cohomología de de Rham posee un único representante armónico.

Más adelante, las (p, q) -formas diferenciales surgieron como una generalización natural, y los esfuerzos se orientaron a obtener un resultado análogo al caso anterior. De esta manera, se obtuvo el *Teorema de descomposición de Hodge*.

2. Extenso del resumen

Una *estructura cuasi compleja* sobre una variedad real suave M es un endomorfismo J definido en cada espacio tangente de M , tal que $J^2 = -Id$. Esta condición garantiza que cada espacio tangente de M adquiera una estructura compleja, y de manera análoga, también lo hace cada espacio cotangente.

¹Universidad del Valle. Correo: alexander.perez@correounivalle.edu.co

En particular, la complejificación del espacio cotangente en un punto $p \in M$ se descompone como:

$$T_{p,\mathbb{C}}^*M = T_p^{1,0}M \oplus T_p^{0,1}M,$$

donde $T_p^{1,0}M$ y $T_p^{0,1}M$ corresponden a los espacios propios asociados a los valores propios $+i$ y $-i$ de J , respectivamente. De esta manera, el espacio de las (p, q) -formas diferenciales en M es:

$$\Omega^{p,q}(M) = C^\infty(M, \bigwedge^p T^{1,0}(M) \wedge \bigwedge^q T^{0,1}(M)).$$

A partir de la derivada exterior d , se introducen los operadores ∂ y $\bar{\partial}$, cuya acción se organiza en el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccccccc} & & \vdots & & \vdots & & \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \\ \cdots & \longrightarrow & \Omega^{p,q+1}(X) & \xrightarrow{\partial} & \Omega^{p+1,q+1}(X) & \longrightarrow & \cdots \\ & & \uparrow \bar{\partial} & & \uparrow \bar{\partial} & & \\ \cdots & \longrightarrow & \Omega^{p,q}(X) & \xrightarrow{\partial} & \Omega^{p+1,q}(X) & \longrightarrow & \cdots \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \\ & & \vdots & & \vdots & & \end{array}$$

donde se satisface:

$$\partial^2 = \bar{\partial}^2 = 0, \quad \partial\bar{\partial} = -\bar{\partial}\partial, \quad d = \partial + \bar{\partial}.$$

Adicionalmente, se tiene la descomposición:

$$\Omega^k(M) = \bigoplus_{p+q=k} \Omega^{p,q}(M).$$

Al igual que la cohomología de de Rham se construye a partir de p -formas diferenciales, la *cohomología de Dolbeault* se define en términos de (p, q) -formas:

$$H_{\bar{\partial}}^{p,q}(M) = \frac{\ker(\Omega^{p,q}(M) \longrightarrow \Omega^{p,q+1}(M))}{\text{Im}(\Omega^{p,q-1}(M) \longrightarrow \Omega^{p,q}(M))}.$$

Además, se introduce el operador de Laplace $\Delta_{\bar{\partial}}$ asociado a $\bar{\partial}$, con el cual se define el espacio de (p, q) -formas armónicas $\mathcal{H}^{p,q}(M)$.

Por otro lado, una variedad Riemanniana M se denomina *variedad de Kähler* si la 2-forma ω asociada a la métrica g es cerrada, es decir, si cumple $d\omega = 0$. Como se mencionó en la introducción, Hodge demostró que toda clase de cohomología de de Rham tiene un único representante armónico. El siguiente teorema se puede entender como la generalización correspondiente al caso de las (p, q) -formas:

Teorema: (Descomposición de Hodge, 1941)

Sea M una variedad de Kähler compacta y sea $H^{p,q}(M) \subseteq H^{p+q}(M, \mathbb{C})$ el subespacio formado por las clases de cohomología de de Rham que poseen representantes de tipo (p, q) . Entonces:

$$H^{p,q}(M) \cong H_{\bar{\partial}}^{p,q}(M) \cong \mathcal{H}^{p,q}(M),$$

y además,

$$H^k(M, \mathbb{C}) \cong \bigoplus_{p+q=k} H^{p,q}(M), \quad H^{q,p}(M) = \overline{H^{p,q}(M)}.$$

Un ejemplo fundamental de variedad Kähler compacta es el espacio proyectivo complejo $\mathbb{P}(V)$, el cual satisface plenamente el teorema anterior. Más generalmente, toda variedad algebraica proyectiva compleja es Kähler y cumple las propiedades de descomposición de Hodge.

La *Conjetura de Hodge* constituye uno de los escenarios más famosos donde se aplica el *Teorema de descomposición de Hodge*. Esta conjetura, que forma parte de los siete problemas del Milenio, sigue siendo uno de los grandes enigmas abiertos de las matemáticas contemporáneas, sin una demostración ni una refutación concluyente hasta la fecha.

Referencias

- [1] CATTANI E., ZEIN F. E., GRIFFITHS, P. A., TRÁNG L. D., *Hodge Theory*. Mathematical Notes, Princeton University Press, 2014. ISBN 9780691161341.

6.4 La cohomología de Khovanov como invariante topológico de nudos

Carlos Wilson Rodríguez Cárdenas¹

Resumen

La cohomología de Khovanov básicamente es un invariante topológico de nudos que asigna una cadena compleja de grupos de homología a un nudo N en $\mathbb{R}^3$, más exactamente, a la clase de isotopía de las proyecciones planas de N . La invarianza en este caso significa que cualquiera que sea la proyección asociada a N la homología es la misma para el nudo, es decir que la cohomología de Khovanov es invariante bajo movimientos de Reidemeister. La característica de Euler de este complejo de homología es precisamente el polinomio de Jones. De aquí se infiere que el polinomio de Jones hace parte de algún invariante más elaborado para variedades 4-dimensionales que podría relacionarse con la Teoría Gauge de Donaldson y la de Seiberg-Witten en cuatro dimensiones.

Palabras & frases claves: Nudos, entrelazados, suavización de cruces, cohomología de nudos, característica de Euler, invariantes de nudos.

1. Introducción

Se muestra cómo se categorifica la teoría de nudos y cómo se asocia ésta con la categoría de módulos graduados sobre un anillo R a partir de un funtor $\mathfrak{F}$ denominado una Teoría de Campos Cuánticos Topológica 2-dimensional, (1+1)-dimensional TQFT (Topological Quantum Field Theory). Esta asociación está relacionada con las posibles suavizaciones que se le hagan a cada cruce de un diagrama plano del nudo. La cantidad de estas posibles suavizaciones para un diagrama con n cruces es 2^n , por lo tanto se puede relacionar cada suavización, que no es más que un conjunto de circunferencias disyuntas, con los vértices de un cubo n -dimensional en donde cada arista representa un cobordismo 2-dimensional entre las circunferencias determinadas. A este cubo se le aplica el funtor $\mathfrak{F}$ y se obtiene un cubo en la categoría de módulos graduados sobre el anillo R . A partir de este cubo se genera un bicomplejo de grupos de homología, C , del cual se obtiene la cohomología de Khovanov $\mathcal{H}$ que es también un bicomplejo, donde los subgrupos $\mathcal{H}^{i,j}$ son submódulos graduados.

2. Cohomología de Nudos

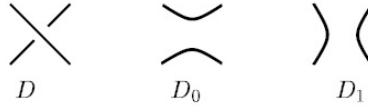
La idea principal para obtener la Cohomología de Khovanov asociada a un nudo o enlace L es reemplazar el bracket de Kauffman renormalizado $\langle \widehat{L} \rangle$, por una cadena compleja de R -módulos graduados, $R = \mathbb{Z}[c]$, que será denotada por $[L]$, cuya característica de Euler graduada es precisamente $\langle \widehat{L} \rangle$.

Al igual que el bracket de Kauffman, $\langle \cdot \rangle$, que se define usando tres axiomas, también se puede definir el corchete de cadenas “[.]” a partir de los siguientes tres axiomas:

- i. $[[\emptyset]] = 0 \rightarrow R \rightarrow 0$,

¹Universidad Industrial de Santander. Correo: cwrodrig@uis.edu.co

- ii. $[[\bigcirc L]] = A \otimes [[L]]$, donde A es un módulo con una estructura de álgebra de Frebenius.
- iii. $[[D]] = \mathcal{E}(0 \rightarrow [[D_0]] \rightarrow [[D_1]]\{1\} \rightarrow 0)$, donde $\mathcal{E}$ es un operación que forma un complejo de cadena tomando las sumas directas de las diagonales consecutivas del bicomplejo $0 \rightarrow [[D_0]] \rightarrow [[D_1]]\{1\} \rightarrow 0$. Los diagramas D_0 y D_1 corresponden al mismo diagrama plano D excepto en una vecindad de un cruce como se muestra en la figura. El operador “ $\{ \cdot \}$ ” es el operador cambio de grado.



Para un diagrama con n cruces, se puede aplicar (iii) iterativamente 2^n veces. El álgebra A tiene dimensión graduada $q + q^{-1}$. El operador “ $\{ \cdot \}$ ” tiene como efecto que al aplicarlo a “ $[[\cdot]]$ ” la dimensión graduada de “ $[[\cdot]]\{1\}$ ” resulta ser la dimensión graduada de “ $[[\cdot]]$ ” multiplicada por q .

Las dos posibles **suavizaciones** de cualquier cruce del diagrama plano D de un nudo se muestran en la figura anterior y las denominaremos **0-suavización** y **1-suavización**.

Sea D un diagrama con n cruces asociado al enlace L . Supongamos que se tiene un ordenamiento del conjunto de cruces de D , $\mathfrak{N} = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$. Se denotará como C_α , ($\alpha = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$, con $a_i \in \{0, 1\}$ y $|\alpha| = \sum_i a_i$), la suavización de tipo α de D , donde C_α se obtiene de D tras efectuar una suavización de tipo a_i -suavización en el cruce x_i de D .

Para cada diagrama D con n cruces se forma un cubo n -dimensional, $V_S(D)$, en la categoría de cobordismos orientados, de tal forma que al vértice α de $V_S(D)$, se le hace corresponder la suavización C_α de D , y a cada arista del cubo se le hace corresponder un cobordismo, que se denotará S_{α^*} , donde α^* se obtiene a partir de α reemplazando una componente donde existe un cero por $*$. El cobordismo S_{α^*} va de los círculos que conforman la suavización C_α a los círculos que conforman la suavización C_{α^*} , donde α^* se obtiene al reemplazar la componente $*$ de α^* por un uno.

Puesto que cada $[D]^i$ es un R -módulo graduado entonces $C(D)$ es un complejo de R -módulos graduados, $C^i(D) = \bigoplus_j C^{i,j}(D)$, y por lo tanto $\mathcal{H}^i$ también es un R -módulo graduado.

Definición 3. El i -ésimo grupo de homología es $\mathcal{H}^i(D)$ y es igual a $\bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} \mathcal{H}^{i,j}(D)$, donde $\mathcal{H}^{i,j}(D)$ es el j -ésimo grupo de cohomología de $C^{i,j}(D)$.

Teorema 4. (Khovanov) Las clases de isomorfía de los grupos de homología $\mathcal{H}^r(D)$ son invariantes del enlace L , D es un diagrama cualquiera asociado a L .

Teorema 5. (Khovanov) El polinomio de Jones normalizado de un Link L con un diagrama plano asociado D es la característica de Euler graduada del complejo C , es decir

$$J(L) = \sum_r (-1)^r t^r \dim_Q([D]^r[-n_m]\{n_p - 2n_m\}) = \sum_r (-1)^r t^r \dim_Q \mathcal{H}^r.$$

Referencias

- [1] M. KHOVANOV, *A Categorification of The Jones Polynomial*. Duke Math Journal, **101**(3) (2000):359–426. arXiv math.QA/9908171
- [2] M. KHOVANOV, *A Functor-Valued Invariant of Tangles*. Algebraica and Geometric Topology. **2** (2002):665–741.
- [3] C.W. RODRÍGUEZ, *El funtor TQFT y la cohomología de Khovanov*. Revista Integración Escuela de Matemáticas Universidad Industrial de Santander. **24**(2) (2006):51–67.

6.5 Sucesiones tipo Fibonacci en grupos finitos

Rafael Isaacs¹

Resumen

Disquisiciones alrededor de los ciclos que se forman al aplicar $s_0 = a$, $s_1 = b$ y la ley recursiva $s_{n+2} = s_{n+1} * s_n$ sobre un grupo $(G, *)$ finito. Se demuestran algunos resultados usando teoría elemental (muy elemental) de números y algo de álgebra lineal. Se enuncian muchas conjeturas.

Palabras & frases claves: sucesiones de Fibonacci, grupos finitos, números de Pisano.

1. Introducción

Para introducirnos recomendamos: Fibonacci-Saenz de Cabezón.

La sucesión A001175 de OEIS comprende los Números Pisanos (porque Fibonacci se llamaba Leonardo de Pisa, era de Pisa) consiste de los periodos de la sucesión de Fibonacci módulo m cuando iniciamos en forma tradicional con 0 y 1:

$$1, 3, 8, 6, 20, 24, 16, 12, 24, 60, 10, 24, \dots$$

Por ejemplo $p_4 = 6$ porque la sucesión de Fibonacci módulo 4 es

$$0, 1, 1, 2, 3, 1, 0, 1, 1, 2, 3, \dots$$

que es de periodo 6. En la siguiente gráfica representamos el periodo que llamamos *ficiclo* en donde no nos interesa el inicio.

2. Distribución de los ficclos en $\mathbb{Z}_m$

Usando SAGE podemos indagar muchas cuestiones sobre la distribución de los ficclos en el grupo aditivo distribución módulo m . Por ejemplo podemos mostrar la lista de las longitudes de los k ficclos en $\mathbb{Z}_n$ para $n = 1, \dots, 17$:

```
1 --> [1]
2 --> [1, 3]
3 --> [1, 8]
4 --> [1, 6, 3, 6]
5 --> [1, 20, 4]
6 --> [1, 24, 8, 3]
7 --> [1, 16, 16, 16]
8 --> [1, 12, 6, 12, 3, 6, 12, 12]
9 --> [1, 24, 24, 8, 24]
```

¹Profesor jubilado UIS. Correo: rafaisaacs@saber.uis.edu.co

10 --> [1, 60, 20, 3, 12, 4]
 11 --> [1, 10, 10, 10, 10, 10, 10, 10, 10, 10, 5, 10, 5]
 12 --> [1, 24, 24, 6, 8, 3, 24, 6, 24, 24]
 13 --> [1, 28, 28, 28, 28, 28, 28]
 14 --> [1, 48, 16, 48, 16, 48, 16, 3]
 15 --> [1, 40, 40, 20, 40, 8, 40, 8, 8, 8, 8, 4]
 16 --> [1, 24, 12, 24, 6, 24, 12, 24, 3, 6, 24, 24, 24, 12, 12]
 17 --> [1, 36, 36, 36, 36, 36, 36, 36, 36]

La distribución en G es la colección de números $1 < l_2 \leq \dots \leq l_k$ que nos indica las longitudes de los fícclos en G , por ejemplo para $\mathbb{Z}_{10}$ es 1, 3, 4, 12, 20, 60 mientras para $\mathbb{Z}_{12}$ se tiene 1, 3, 6, 6, 8, 12, 24, 24, 24, 24, 24. Muy sencillo es demostrar que para cualquier grupo la suma de los elementos de la distribución es n^2 siendo n la cardinalidad del grupo.

No sabemos si pueden existir dos grupos no isomorfos que tengan la misma distribución.

Haciendo

$$F_m = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

esta matriz nos da los elementos de la sucesión pues tenemos que

$$F_m^n \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_n \\ a_{n+1} \end{pmatrix}$$

Veremos que la longitud de cualquier fícclo de $\mathbb{Z}_m$ divide a p_m el número pisano que coincide con la longitud de los fícclos de longitud mayor y que es exactamente el orden de F_m en las matrices 2×2 de $\mathbb{Z}_m$.

Pero para ciertos grupos no abelianos la longitud de cada uno de los fícclos divide a la longitud de los fícclos de longitud mayor y no sabemos si esto sí sucede para grupos abelianos.

Otro resultado sencillo que demostraremos: Si $\mathbb{Z}_m$ contiene un fícclo de orden 4 entonces 5 divide a m . Esto es válido para cualquier grupo abeliano.

Así indagaremos por resultados trabajables, por ejemplo cuando el número de elementos de G es primo. Se espera que los asistentes puedan plantear hipótesis, algunas quedarán como conjeturas, otras serán demostrables con pocas herramientas de teoría de números y álgebra lineal.

Referencias

- [1] BRENNAN BENFIELD AND MICHELLE MANES, *The Fibonacci Sequence is Normal Base 10*. (2022):501–517. arXiv:2202.08986 [math.NT].
- [2] H. T. ENGSTROM, *On Sequences defined by linear relations*. Trans. Am. Math. Soc. **33**(1) (1931):501–517.
- [3] J. D. FULTON AND W. L. MORRIS, *On arithmetical functions related to the Fibonacci numbers*. Acta Arithmetica. **16** (1969):105–110.

- [4] R. F. ISAACS, *Algunas sucesiones definidas recursivamente y valores propios*. Revista Integración, Temas De matemáticas. **18**(1) (2000):9–17.
- [5] J. E. NIETO SAID, *Teoría de Números para Olimpiadas Matemáticas*. Departamento de Matemática, Facultad de Ciencias, Universidad del Zulia, Maracaibo, Venezuela, 2003.
- [6] JOHN H. CONWAY AND R. GUY, *The Book of Numbers*. Springer, 1995.

6.6 Introducción a los Espacios de Berkovich

Andrés Sarrazola¹

Resumen

El análisis no arquimediano enfrenta dificultades fundamentales debido a la naturaleza topológica del campo base. Sea K un cuerpo algebraicamente cerrado, completo respecto a un valor absoluto no arquimediano no trivial. La topología inducida sobre K es de Hausdorff, pero también totalmente disconexa y no localmente compacta, lo cual complica la definición satisfactoria de funciones analíticas. La teoría de análisis rígido, desarrollada por Tate [1], ofrece una solución parcial mediante el uso de topologías de Grothendieck, permitiendo construir funciones analíticas bien definidas. Sin embargo, el espacio topológico subyacente no se modifica, lo que limita el alcance de la teoría para otras aplicaciones, como la definición de operadores tipo Laplaciano o nociones naturales de funciones armónicas y subarmónicas.

La teoría de espacios de Berkovich resuelve estas dificultades de manera notable. En particular, la recta afín de Berkovich $\mathbb{A}_{\text{Berk}}^1$ sobre K es un espacio topológico localmente compacto, de Hausdorff y conexo por caminos, que contiene a K como subespacio denso. Añadiendo un punto en el infinito de forma adecuada, se obtiene la recta proyectiva de Berkovich $\mathbb{P}_{\text{Berk}}^1$, la cual es compacta, de Hausdorff, y no solo conexa por caminos, sino únicamente conexa por caminos: cualquier par de puntos se puede unir mediante un arco único.

Este cursillo tiene como objetivo ofrecer una introducción concreta y visual a la teoría analítica de Berkovich, con especial énfasis en la recta proyectiva $\mathbb{P}_{\text{Berk}}^1$. Aunque la teoría general requiere herramientas sofisticadas, este caso particular puede estudiarse con un aparato técnico relativamente accesible y ya muestra aplicaciones significativas. Además, las curvas de Berkovich (espacios analíticos de dimensión uno) pueden entenderse eficazmente a partir del teorema de reducción semiestable y una comprensión detallada de la estructura local de $\mathbb{P}_{\text{Berk}}^1$.

Palabras & frases claves: espacios de Berkovich.

1. Introducción y descripción del curso

El presente cursillo tiene como objetivo introducir de manera gradual y estructurada los fundamentos de la teoría de espacios analíticos de Berkovich, con énfasis tanto en el contexto topológico como en la perspectiva algebraico-analítica que sustenta la construcción de estos espacios. A lo largo de cuatro sesiones, se abordarán las herramientas esenciales que permiten comprender y visualizar la geometría no arquimediana en términos de espacios que superan las limitaciones topológicas del análisis rígido clásico.

La primera sesión estará dedicada al estudio de campos valuados desde el punto de vista topológico, lo cual servirá como punto de partida para introducir estructuras normadas tales como grupos y anillos normados, así como anillos de Banach. También se explorarán productos tensoriales completos y la noción del espectro como herramienta de análisis funcional en este contexto.

En la segunda sesión se abordarán las álgebras de Banach sobre campos no arquimedianos, así como la transformación de Gelfand, elemento clave para comprender el espectro de una álgebra

¹Universidad EIA. Correo: andres.sarrazola@eia.edu.co

en términos geométricos. Se estudiarán además propiedades relevantes del espectro, incluyendo su comportamiento frente a extensiones del campo base, así como los primeros ejemplos geométricos: el disco cerrado y el disco general de Berkovich.

La tercera sesión estará enfocada en el análisis de la estructura de árbol del disco cerrado de Berkovich, propiedad distintiva que permite visualizar y explorar la geometría de estos espacios. Se discutirán también cuestiones topológicas como la metrizabilidad y su inmersión en espacios afines, junto con la introducción de las álgebras afinoides y sus propiedades fundamentales.

Finalmente, en la cuarta sesión se presentarán los dominios afinoides y las G -topologías (tanto débil como fuerte), que permiten dotar a los espacios de Berkovich de una estructura local adecuada para la definición de haces coherentes. Se discutirá también la noción de función reducción y se introducirá el functor GAGA en el contexto no arquimediano, cerrando así el recorrido por los elementos fundamentales de esta rica teoría.

2. Campos valuados y estructuras normadas

La teoría de espacios de Berkovich surge, en parte, como una respuesta a las limitaciones topológicas del análisis no arquimediano clásico. Sea K un cuerpo algebraicamente cerrado, completo con respecto a un valor absoluto no arquimediano no trivial. La topología inducida sobre K por dicho valor absoluto es de Hausdorff, pero también totalmente disconexa y no localmente compacta. Estas características impiden formular de manera natural una teoría satisfactoria de funciones analíticas sobre K .

Para remediar esta situación, Tate desarrolló el análisis rígido, una teoría basada en la introducción de una topología de Grothendieck que permite definir funciones analíticas en este entorno. Aunque poderosa, esta teoría no modifica el espacio topológico subyacente, lo que sigue limitando ciertas aplicaciones, por ejemplo, la definición de operadores diferenciales como el Laplaciano, o el estudio de funciones armónicas y subarmónicas en K .

La teoría de Berkovich ofrece una solución elegante y ampliamente satisfactoria. La recta afín de Berkovich $\mathbb{A}^{1,\text{Berk}}$ es un espacio topológico localmente compacto, de Hausdorff y conexo por caminos, que contiene a K como subespacio denso. Al añadir un punto en el infinito de manera adecuada, se obtiene la recta proyectiva $\mathbb{P}^{1,\text{Berk}}$, la cual es compacta, de Hausdorff y *únicamente* conexa por caminos: cualquier par de puntos distintos puede unirse mediante un arco único. Esta propiedad está estrechamente relacionada con la estructura de árbol profinito real ($\mathbb{R}$ -árbol) que subyace en estos espacios, y que permite definir operadores tipo Laplaciano análogos a los del análisis clásico sobre grafos finitos, dando lugar a una teoría robusta de funciones armónicas y subarmónicas.

El punto de partida para la construcción de estos espacios es la noción de seminormas multiplicativas. Dados un cuerpo k con un valor absoluto (que puede ser arquimediano, no arquimediano o incluso trivial) y un anillo A , una seminorma multiplicativa sobre A es una función $|\cdot|_x : A \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ que satisface:

$$|0|_x = 0, \quad |1|_x = 1, \quad |fg|_x = |f|_x \cdot |g|_x, \quad |f + g|_x \leq |f|_x + |g|_x.$$

La recta afín de Berkovich $\mathbb{A}^{1,\text{Berk}}$ se define como el conjunto de todas las seminormas multiplicativas sobre $k[T]$ que extienden el valor absoluto dado en k . Topológicamente, se dota a este conjunto de

la topología más débil para la cual cada función $x \mapsto |f|_x$, con $f \in k[T]$, es continua.

En el caso arquimediano clásico, por el teorema de Gelfand-Mazur, toda seminorma multiplicativa sobre $\mathbb{C}[T]$ que extiende el valor absoluto usual es de la forma $f \mapsto |f(z)|$ para algún $z \in \mathbb{C}$. Esto implica que $\mathbb{A}_{\mathbb{C}}^{1,\text{Berk}}$ es homeomorfa a $\mathbb{C}$, identificable con el espacio de Gelfand de los ideales maximales de $\mathbb{C}[T]$.

En el mundo no arquimediano, la situación es mucho más rica: existen muchas más seminormas que las dadas por evaluación puntual. Por ejemplo, dado un disco cerrado $B(a, r) = \{z \in K : |z - a| \leq r\}$, se puede definir la seminorma $|f|_{B(a,r)} := \sup_{z \in B(a,r)} |f(z)|$, que es multiplicativa por el lema de Gauss. Esto da lugar a una gran variedad de puntos de $\mathbb{A}^{1,\text{Berk}}$, incluyendo aquellos asociados a discos irracionales (con radio no en $|K^*|$) e incluso a discos de radio cero.

Más aún, cada punto de $\mathbb{A}^{1,\text{Berk}}$ se puede describir como el límite de una sucesión decreciente de discos cerrados. Esta observación lleva al siguiente resultado fundamental [2]:

Teorema 1 (Clasificación de Berkovich). *Todo punto $x \in \mathbb{A}^{1,\text{Berk}}$ corresponde a una sucesión decreciente de discos cerrados $B(a_1, r_1) \supseteq B(a_2, r_2) \supseteq \dots$ tal que $|f|_x = \lim_{n \rightarrow \infty} |f|_{B(a_n, r_n)}$. Dos sucesiones de este tipo determinan el mismo punto si y solo si sus intersecciones son iguales (cuando no vacías), o son cofinales (cuando vacías).*

En consecuencia, los puntos de $\mathbb{A}^{1,\text{Berk}}$ se clasifican en cuatro tipos:

- **Tipo I:** puntos de K .
- **Tipo II:** discos con radio en $|K^*|$.
- **Tipo III:** discos con radio $\ell \notin |K^*|$.
- **Tipo IV:** intersecciones vacías de sucesiones de discos.

Esta rica estructura permite conectar el espacio totalmente desconexo K mediante la incorporación de puntos correspondientes a discos cerrados, dotando así a $\mathbb{A}^{1,\text{Berk}}$ de una topología mucho más adecuada para el análisis.

3. Analitificaciones

La teoría analítica de Berkovich permite reinterpretar muchos conceptos clásicos de la geometría compleja en el entorno no arquimediano, revelando una estructura rica y sorprendentemente accesible desde el punto de vista topológico y algebraico. Uno de los aspectos más notables de esta teoría es la posibilidad de visualizar y analizar espacios como la recta proyectiva de Berkovich no solo como objetos abstractos definidos por seminormas multiplicativas, sino como espacios topológicos concretos, dotados de una geometría interna que refleja la interacción entre la topología no arquimediana y la estructura algebraica de los anillos involucrados.

En esta dirección, los discos cerrados juegan un papel fundamental. Su organización en forma de árbol real proporciona una intuición geométrica poderosa: cada punto puede verse como representando una clase de discos anidados, lo que permite conectar el espacio K , originalmente totalmente desconexo, mediante trayectorias únicas y continuas. Esta estructura de árbol se traduce naturalmente en propiedades topológicas fuertes, como la metrizabilidad y la conexidad única por caminos, que enriquecen notablemente el análisis de estos espacios.

La herramienta algebraica central para modelar estos entornos locales son las álgebras afinoides, cuyas propiedades permiten controlar el comportamiento de funciones analíticas y su espectro. Estas álgebras proporcionan una base natural para estudiar los espacios de Berkovich de manera local, permitiendo construir recubrimientos adecuados y entender el pegado (gluing) de dominios afinoides, esenciales para una teoría global coherente.

En este contexto, se introducen también las G -topologías, que dotan a los espacios de Berkovich de una estructura de sitio adecuada para desarrollar una teoría de haces coherentes robusta. La función de reducción conecta estos desarrollos con la geometría algebraica clásica, permitiendo interpretar información analítica en términos de esquemas especiales. Finalmente, el functor GAGA en este marco ofrece una poderosa herramienta de comparación entre las categorías analítica y algebraica, abriendo la puerta a resultados de tipo cohomológico y aplicaciones en geometría aritmética y dinámica no arquimediana.

Referencias

- [1] J. TATE, *Rigid Analytic Spaces*. Inventiones mathematicae. **12** (1971):257–289.
- [2] A. VARSHNEY, *The Geometry of Berkovich Analytic Spaces*, 2022.

6.7 Curso: Museo de Matemáticas en GeoGebra

Claudia Granados Pinzón¹, Samuel Alburua Montes²

Resumen

Desde hace más de una década, la Universidad Industrial de Santander ha integrado el uso de GeoGebra en la enseñanza de la geometría, con el propósito de fortalecer la comprensión de sus propiedades. Con el acompañamiento del profesorado, los estudiantes realizan demostraciones visuales de resultados geométricos mediante esta herramienta digital, iniciativa que dio origen al Museo Virtual de Matemáticas UIS en GeoGebra.

Esta metodología no solo acerca a los estudiantes a las herramientas tecnológicas, sino que también impulsa la generación de aportes originales y significativos. La experiencia favorece el desarrollo del pensamiento lógico, la creatividad y la capacidad de resolución de problemas, al tiempo que fortalece competencias clave dentro del enfoque educativo STEAM.

Desde la antigüedad, la matemática ha sido esencial para comprender el mundo físico y, gracias a la tecnología, este conocimiento es hoy más accesible que nunca. En este contexto, el museo virtual se consolida como una iniciativa que reúne, preserva y difunde tanto aportes históricos como aplicaciones contemporáneas, ofreciendo una experiencia interactiva, dinámica y abierta a todo público.

En el curso presentaremos construcciones en GeoGebra sobre disecciones geométricas, fractales, teselaciones y diversos resultados geométricos.

Palabras & frases claves: Disecciones geométricas, fractales, teselados de Escher, teselados hiperbólicos, transformación conforme.

1. Introducción

Las matemáticas han sido, a lo largo de la historia, una herramienta fundamental para que la ciencia pueda comprender el mundo físico. Con el avance de la tecnología, el acceso al conocimiento se ha ampliado de manera notable, y hoy muchos de los objetos que antes solo podían encontrarse en un museo matemático están disponibles a tan solo un clic de distancia. En este contexto, el Museo Virtual de Matemáticas UIS en GeoGebra surge como una iniciativa destinada a acercar el desarrollo de este saber a todas las personas interesadas en explorarlo.

La creación de este museo virtual responde a la necesidad de reunir, preservar y difundir tanto las contribuciones históricas como las aplicaciones más recientes de la matemática moderna. Este espacio digital resalta el papel esencial de las matemáticas en el progreso científico, al integrar diversos contenidos en un entorno interactivo y dinámico. Asimismo, promueve el aprendizaje, la creatividad y el interés por esta disciplina, ofreciendo acceso abierto a todo tipo de público.

Dentro de este marco, la geometría dinámica ocupa un lugar destacado. Esta rama en constante expansión permite, mediante herramientas digitales, visualizar y explorar de forma interactiva múltiples conceptos geométricos. Aunque el uso de software especializado no reemplaza las demostraciones formales, sí abre un espacio que facilita la manipulación de figuras, el análisis de sus pro-

¹Universidad Industrial de Santander. Correo: cigranad@uis.edu.co

²Universidad Industrial de Santander. Correo: sealburua@outlook.com

piedades y una comprensión más profunda de conceptos complejos. En las últimas décadas, estas herramientas han transformado significativamente la enseñanza y el aprendizaje de la geometría.

La geometría, nacida como respuesta a problemas de medición, ha acompañado a la humanidad desde la antigüedad. Figuras como el círculo y la esfera fueron estudiadas por matemáticos como Arquímedes, cuyas investigaciones sentaron bases fundamentales que siglos después inspiraron a Newton y Leibniz en el desarrollo del cálculo. Este legado abrió camino al surgimiento de las múltiples geometrías que conocemos hoy.

A comienzos del siglo XIX, la geometría euclidiana aún se consideraba la verdadera descripción del espacio. Sin embargo, los trabajos de Bolyai (1832) y Lobachevski (1835) introdujeron la noción de geometrías no euclidianas, aunque en su momento sus aportes no lograron pleno reconocimiento. Más adelante, Gauss realizó avances significativos en el estudio de superficies en el espacio tridimensional, y Riemann, en su célebre conferencia de 1854, Sobre las hipótesis que sirven de fundamento a la geometría, planteó que la geometría consiste en un espacio y en una manera de asignar medidas intrínsecas en él. De esta visión surge la idea de que no existe una única geometría, sino infinitas, y que tampoco hay un espacio ambiente universal. Estos descubrimientos marcaron el inicio del desarrollo de las nuevas geometrías y dieron origen a ramas fundamentales de las matemáticas modernas.

En este marco histórico y pedagógico, las actividades vinculadas al Museo Virtual de Matemáticas UIS en GeoGebra fomentan la participación activa y la aplicación de conocimientos esenciales en la formación profesional. Las construcciones elaboradas por los estudiantes, hoy integradas en la plataforma del museo, abordan temas como disecciones geométricas, fractales y teselaciones. Estos aportes no solo enriquecen el proceso formativo de los participantes, sino que también contribuyen al cumplimiento de los objetivos del museo, consolidándolo como un espacio de aprendizaje, creación y divulgación matemática.

2. Museo Virtual de Matemáticas

Las matemáticas han sido una herramienta esencial para que la ciencia interprete y comprenda el mundo físico. Con el desarrollo de la tecnología, el acceso al conocimiento se ha ampliado significativamente, y hoy muchos de los objetos que antes solo podían encontrarse en un museo matemático están disponibles a tan solo un clic de distancia.

En este contexto, la geometría dinámica, mediante software especializado, ofrece la posibilidad de visualizar e interactuar con figuras, facilitando la comprensión de conceptos complejos a través de la experimentación, sin sustituir las demostraciones formales. Este enfoque fortalece el pensamiento lógico y espacial, enriquece el aprendizaje en otras áreas de las matemáticas y promueve la aplicación del conocimiento en contextos reales. Asimismo, estimula la creatividad, la resolución de problemas y el desarrollo de competencias clave para la educación STEAM y los entornos digitales.

Con estos objetivos, surge la iniciativa del Museo Virtual de Matemáticas UIS en GeoGebra, orientada a acercar el desarrollo de este saber a todas las personas interesadas en explorarlo. La Universidad Industrial de Santander ha incorporado el uso de GeoGebra en la enseñanza de la geometría desde hace más de una década, promoviendo el enfoque de la geometría dinámica en sus actividades académicas. Sin embargo, algunos temas de gran interés aún no habían sido explorados en profundidad.

En respuesta a ello, el Museo Virtual de Matemáticas UIS ha integrado de manera digital contenidos

como disecciones geométricas, fractales y teselaciones, elementos característicos de museos matemáticos físicos. Se espera que este espacio continúe creciendo con nuevas construcciones elaboradas por los estudiantes, cuyas aportaciones reflejan su motivación, fortalecen su sentido de responsabilidad y consolidan su protagonismo en el proceso de aprendizaje.

Referencias

- [1] GRANADOS PINZÓN, C. I. Y ACEVEDO RINCÓN, J. P., *Museo Virtual de Matemáticas UIS. Disecciones Geométricas y Fractales*. Revista Docencia Universitaria. (Número especial). (2024):4–7.
- [2] *GeoGebra: Museo Virtual de Matemáticas UIS*.
- [3] *YouTube: Museo Virtual de Matemáticas UIS*.

6.8 Acciones del grupo universal de Hausdorff sobre espacios

T_1

Juan Camilo Camacho Parra¹

Resumen

En esta charla hablaremos acerca de los resultados obtenidos por Al-Ta'ai y Saddam en [4] acerca de las acciones del grupo universal de Hausdorff de un grupo topológico cualquiera y de cómo este actúa sobre un espacio topológico T_1 . El interés de los autores se centra en estudiar las propiedades que dicha acción hereda o modifica, con el fin de comprender mejor la relación entre la estructura algebraica y las condiciones topológicas de separación.

Palabras & frases claves: Grupos topológicos, Grupo universal de Hausdorff, acciones de grupo.

1. Introducción

Dado un grupo G y una topología τ , decimos que G es un grupo topológico si tanto la operación binaria como la función inversión, que a cada elemento $g \in G$ asigna su inverso $g^{-1} \in G$, son funciones continuas.

Al considerar acciones de G sobre un conjunto X , es natural analizar cómo se comportan respecto a la topología. Por ello, definimos la acción de un grupo topológico G sobre un espacio topológico X como una función continua; es decir, una acción continua si dicha función es continua.

Por otro lado, buscamos estudiar el grupo de una manera más estructurada o “pura”. Para ello, consideramos el grupo cociente obtenido al tomar la clausura del elemento neutro del grupo, es decir, G/E , donde $E = \overline{\{e\}}$. El cociente resultante es un grupo topológico Hausdorff y denotado como grupo universal de Hausdorff. De esta forma, podemos analizar cómo interactúan los elementos de G sobre el espacio topológico X al pasar al cociente, y determinar las propiedades topológicas que se preservan.

Finalmente, supondremos que el espacio topológico X es un espacio T_1 , lo cual permitirá un estudio más detallado de la acción y de la estructura inducida en el cociente.

2. Grupo universal de Hausdorff

Definición 1. [5] *Un grupo topológico es un conjunto no vacío G que posee simultáneamente una estructura de grupo y de espacio topológico, de modo que las operaciones de grupo*

$$m : G \times G \rightarrow G, \quad (x, y) \mapsto xy$$

¹Universidad Industrial de Santander. Correo: juan2171210@correo.uis.edu.co

y

$$\text{in} : G \rightarrow G, \quad x \mapsto x^{-1}$$

son funciones continuas.

Definición 2. [2] Sea G un grupo topológico, $E = \overline{\{e\}}$ la clausura del elemento identidad. Decimos que G/E es el grupo universal de Hausdorff.

Este subgrupo E de G es normal y cerrado y por tanto G/E es también un grupo topológico dotado de la topología cociente.

Definición 3. [3] Un espacio topológico X es denominado T_1 si dados dos puntos distintos $x, y \in X$, existen vecindades U_x y U_y tales que $y \notin U_x$ y $x \notin U_y$.

La propiedad fundamental de G/E es ser Hausdorff y además de una propiedad universal el cual permite la factorización única de un homomorfismo continuo de G en un grupo topológico Hausdorff a través la función cociente $\pi_E : G \rightarrow G/E$.

Teorema 4. [1] Sea G/E el grupo cociente inducido por E , entonces G/E tiene la propiedad que si $f : G \rightarrow H$ en $\mathcal{TG}$, donde H es Hausdorff, existe un único morfismo $\hat{f} : G/E \rightarrow H$ en $\mathcal{TG}$ tal que $f = \hat{f} \circ \pi_E$, donde $\pi_E : G \rightarrow G/E$ es la proyección canónica de G sobre G/E .

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{f} & H \\ \pi_E \downarrow & \nearrow \hat{f} & \\ G/E & & \end{array}$$

Definición 5. [1] Sea G un grupo topológico que actúa sobre un espacio topológico X , esta acción es llamada **continua** si la aplicación $f : G \times X \rightarrow X$ dada por $f(g, x) = gx$ es continua. El espacio X es denominado un **G -espacio**.

Ahora si G actúa continuamente sobre un espacio T_1 , entonces la acción induce una acción continua del grupo universal de Hausdorff G/E sobre el mismo espacio.

Teorema 6. [4] Sea G un espacio topológico, f una acción sobre un espacio topológico X . Si X es T_1 y G/E es el grupo universal de Hausdorff, entonces existe una acción del grupo G/E sobre X tal que, el diagrama conmuta.

$$\begin{array}{ccc} G \times X & \xrightarrow{f} & X \\ \pi_E \times \text{id}_X \downarrow & \nearrow f^* & \\ G/E \times X & & \end{array}$$

Además, en caso de que la acción f sea propia, entonces f^* también será una acción propia.

Referencias

- [1] ARKHANGEL'SKII, A. V., TKACHENKO, M., *Topological Groups and Related Structures*. Atlantis Studies in Mathematics, Vol. 1. Atlantis Press, 2008.
- [2] HIGGINS, PHILIP J., *An Introduction to Topological Groups*. University Press, 1974.
- [3] MUNKRES, JAMES R., *Topología*. Prentice Hall, 2002.
- [4] SADDAM, HUSSEIN FAIQ & AL-TA'AI, ABID A., *Action of the Universal Hausdorff Group*. American Journal of Mathematics and Statistics. **4**(4) (2014):191–194.
- [5] SPINDLER, KARLHEINZ, *Abstract Algebra with Applications: Volume 1: Vector Spaces and Groups*. CRC Press, 2018.

6.9 Algunas aplicaciones de homología simplicial a problemas clásicos de la geometría

Valentina Martínez González¹

Resumen

El estudio sistemático de la topología algebraica fue iniciado a finales del siglo XIX (1.895-1.901) por el matemático francés Henri Poincaré en una serie de artículos donde estudio la estructura de los espacios topológicos mediante el uso de herramientas algebraicas. En esta charla abordaremos los complejos geométricos y poliedros finitos, utilizando la homología como método para identificar propiedades invariantes tales como la cantidad de agujeros y la conexidad [1, Sec 2.3. Pág 24].

En nuestro análisis final, el factor determinante es la estructura topológica de K y no la triangulación ni la orientación escogida. En particular, estudiaremos la clasificación de los cinco poliedros regulares a partir de la característica de Euler y de los números de Betti, con el fin de reducir la naturaleza abstracta de la topología algebraica a un marco más comprensible y visual. El trabajo muestra cómo el uso de la maquinaria algebraica proporciona un método eficaz para resolver problemas de geometría y topología, contribuyendo a la comprensión de la estructura subyacente de los poliedros.

Palabras & frases claves: Homología, característica de Euler, números de Betti, poliedros regulares, complejos geométricos, invariantes topológicos.

1. Introducción

La topología algebraica y la topología general, aunque surgieron de motivaciones diferentes, comparten el propósito común de describir la naturaleza de los espacios topológicos a través de propiedades invariantes bajo homeomorfismos. Mientras la topología general se consolidó como una teoría general para el análisis de funciones continuas, la topología algebraica nació motivada por problemas geométricos relacionados con trayectorias, superficies y espacios euclidianos.

La topología algebraica describe la estructura de un espacio topológico asociándole un sistema algebraico, nos basaremos en los grupos de homología simpliciales ya que ellos surgieron primero históricamente y para el objetivo de este trabajo es suficiente con su estructura [3]. Por lo tanto, los grupos proporcionan un método para comparar espacios mediante la homología. Para un espacio X el grupo asociado $G(X)$ refleja la estructura topológica y geométrica del espacio subyacente. Estos grupos reflejan características intrínsecas como la presencia de agujeros y la conexidad, aportando un método para comparar y clasificar espacios. Así, el poder de la topología algebraica se deriva del uso de la maquinaria algebraica para resolver problemas de topología y geometría. [1, Sec. 1.1. Pág 1,2].

En esta charla se estudian los complejos geométricos y poliedros finitos como casos de aplicación,

¹Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Correo: valmartinezg@udistrital.edu.co

debido a que son fáciles de visualizar y lo suficientemente generales como para permitir aplicaciones significativas [1, Sec 1.3, Pág 8]. Utilizaremos la triangulación como método conveniente para visualizar los poliedros y convertirlos a una forma estándar y la orientación como un vehículo conveniente para catalogar la disposición de los símplexes.

Las estructuras de homología nos indican la conexidad o la cantidad de agujeros n -dimensional [1, Sec 2.3. Pág 24]. La generalización de estos números de conectividad que utilizó Enrico Betti para estudiar curvas y superficies recibieron el nombre de números de Betti en su honor. J.W. Alexander demuestra que los números de Betti son invariantes topológicos y la invariancia topológica de los grupos de homología fue demostrada por Oswald Veblen en 1.922.

Este análisis no solo permite reducir la abstracción propia de la topología algebraica, sino también establecer un puente entre la teoría algebraica y las propiedades geométricas concretas de los poliedros regulares. En particular, la clasificación de los cinco poliedros regulares mediante la característica de Euler y la homología, mostrando cómo estas herramientas logran reducir la abstracción de la topología algebraica y revelar la estructura topológica y geométrica subyacente de dichos poliedros.

2. Complejos geométricos

Comenzaremos definiendo las clases de espacios para los que está definido la homología simplicial [1]. Para esto, primero necesitamos estudiar un poco geometría analítica. En particular, definiremos primero **un conjunto de puntos geoméricamente independientes**.

Una vez establecida la condición de independencia geométrica para los puntos, podemos definir la unidad básica de nuestra estructura: **el símplex**. A continuación describiremos sus **caras**, que constituyen las piezas que lo conforman y permiten descomponer su estructura.

Antes de construir objetos más complejos, debemos establecer el criterio de **símplexes propiamente unidos** para determinar cómo pueden intersectarse los símplexes entre sí para formar estructuras mayores sin solapamientos indebidos ni discontinuidades. Una vez que entendemos las reglas de construcción de los símplexes y sus interconexiones, podemos definir el objeto central de nuestro estudio **el complejo geométrico**.

Finalmente, el concepto de complejo geométrico nos permite relacionar los complejos geométricos con los espacios topológicos por medio de la **triangulización**, método conveniente para visualizar el poliedro y convertirlo a una forma estándar.

3. Orientación de los complejos geométricos

Una vez entendida la estructura geométrica de los símplexes, debemos asignarles un **sentido** para poder trabajar algebraicamente con ellos. Esta asignación introduce el concepto de **orientación**.

La orientación se formaliza a partir de permutaciones de vértices, construidas mediante transposiciones. La paridad de estas transposiciones nos permite distinguir entre orientaciones equivalentes u opuestas. De este modo, dotamos a cada símplex de una dirección bien definida, independiente de cómo se ensamblen entre sí.

Bajo esta convención, asumiremos que cada complejo posee una orientación elegida, que usaremos como herramienta para describir la disposición algebraica de sus símplexes. Llegando así a la propiedad de que **la suma de las incidencias compuestas es nula**. Esta propiedad es la motivación

fundamental para el teorema que establece que el **borde de un borde es cero**, un principio central en homología simplicial.

4. Grupos de homología

Para traducir esta información geométrica y combinatoria a un lenguaje algebraico, introducimos las **p -cadenas**, combinaciones formales de p -símplices orientados que forman un **grupo abeliano libre**.

A continuación definimos el **operador borde**, un homomorfismo que relaciona las cadenas de distintas dimensiones y organiza estos grupos en la llamada **sucesión de cadenas**. Esta estructura nos permitirá distinguir entre las configuraciones que cierran adecuadamente los **ciclos** y aquellas que son el borde de una cadena de dimensión superior los **bordes**.

El hecho fundamental -una consecuencia de que el borde de un borde es cero- es que todo borde es necesariamente un ciclo. Los elementos que realmente capturan información topológica son, entonces, los ciclos que no provienen de un borde. Su estudio conduce a la definición de los **grupos de homología**, los cuales identifican y clasifican los huecos de distintas dimensiones presentes en un complejo.

5. Estructura de los grupos de homología

Mostraremos que los grupos de homología de un complejo son independientes de la elección para sus símplices, específicamente nos concentraremos en el grupo de homología de dimensión cero $H_0(K)$ que es esta la que nos permitira determinar si el poliedro asociado $|K|$ es conexo.

6. El teorema de Euler-Poincaré

Los grupos de homología nos llevan a los **números de Betti** $R_p(K)$, que cuantifican los agujeros p -dimensionales independientes del complejo. Cada uno de estos números mide la complejidad topológica del espacio desde una perspectiva algebraica.

El **Teorema de Euler-Poincaré** revela una profunda relación entre la estructura combinatoria de un complejo simplicial y su topología subyacente. En particular, establece que la suma alternada del número de símplices de cada dimensión coincide con la suma alternada de los correspondientes números de Betti, que miden los agujeros independientes del espacio.

Cuando aplicamos estas ideas poliedros simples y regulares - los modelos de los sólidos platónicos -, obtenemos una restricción numérica crucial: solo ciertos valores de las características combinatorias son compatibles con las ecuaciones impuestas por Euler. Esta restricción es tan fuerte que reduce todas las posibilidades a únicamente cinco: el tetraedro, el cubo, el octaedro, el dodecaedro y el icosaedro.

Así, el recorrido que inicia con la construcción de complejos geométricos, pasa por la orientación, la teoría de cadenas, la homología y culmina con Euler-Poincaré, nos conduce de manera natural a la conclusión final de esta charla: **solo existen cinco sólidos platónicos**.

Referencias

- [1] CROOM, F. H. *Basic concepts of algebraic topology* Springer Science & Business Media, 2012.
- [2] MUNKRES, J. R. *Elements of algebraic topology*. CRC press, 2018.
- [3] MUNKRES, J. *Topology, Second Edition*. Prentice Hall, Incorporated, 2000
- [4] FRALEIGH, J. B. LOPEZ, M. *Algebra abstracta primer curso*, 1988.

6.10 Análisis de series temporales: un enfoque topológico con aplicaciones a datos medioambientales

Rafael Meléndez¹, Roberto Herrera², Deisy Villalba³

Resumen

El Análisis Topológico de Datos (ATD) constituye un campo emergente para la caracterización de estructuras ocultas en datos complejos, integrando herramientas de topología algebraica con enfoques estadísticos y computacionales. Este trabajo propone un marco metodológico basado en homología persistente para el análisis de series temporales univariadas. La estrategia emplea la incrustación de retardo temporal para reconstruir el espacio de fases y transformar las series en nubes de puntos que preservan sus propiedades topológicas. A partir de dichas representaciones, se construyen diagramas de persistencia (DP) y se calculan distancias de Wasserstein y Bottleneck, permitiendo cuantificar similitudes estructurales y establecer métricas comparativas entre series. La metodología incorpora una descomposición en ventanas superpuestas de longitud L , asociando cada segmento con una nube de puntos, lo que facilita la extracción de características robustas y la detección de patrones recurrentes. Se presentan simulaciones con señales periódicas, no sinusoidales y ruidosas, evaluando propiedades de convergencia y estabilidad topológica. Finalmente, se aplica el enfoque a datos reales de concentración de material particulado fino (PM2.5), evidenciando su potencial para el análisis estructural y la clasificación de series ambientales.

Palabras & frases claves: Análisis topológico de datos (TDA), homología persistente, series temporales, diagramas de persistencia, incrustación con retardo temporal.

1. Introducción

El Análisis Topológico de Datos (ATD) emplea conceptos de la topología algebraica para estudiar la forma y estructura de conjuntos de datos, constituyéndose en una herramienta clave para extraer información significativa en contextos complejos (Carlsson, 2009). Entre sus técnicas más destacadas se encuentra la homología persistente, la cual ha permitido desarrollar métodos innovadores para explorar propiedades topológicas y ha sido aplicada en problemas como la correspondencia de formas 3D, el modelado de sistemas recurrentes y la detección de periodicidad.

Aunque tradicionalmente el ATD se ha orientado al análisis de nubes de puntos en espacios de alta dimensión, su aplicación a series temporales ha despertado creciente interés. Una serie univariante puede transformarse en una colección de puntos en un espacio afín d -dimensional mediante la incrustación de retardo, técnica que permite posteriormente calcular la homología persistente. El teorema de Takens (1981) respalda este enfoque al demostrar que las incrustaciones con retardo generan subconjuntos topológicamente invariantes en sistemas dinámicos no caóticos, lo que posibilita distinguir entre diferentes series.

¹Universidad de La Guajira. Correo: rmelendez@uniguajira.edu.co

²Universidad del Atlántico. Correo: robertoherrera@uniatlantico.edu.co

³Universidad del Tolima. Correo: dvillalbar@ut.edu.co

En este contexto, las incrustaciones de retardo temporal no solo facilitan la recuperación de la dinámica subyacente de un sistema, sino que también potencian el uso del ATD en la caracterización y comparación de series temporales.

2. Incrustaciones de retardo temporal

La incrustación de retardo constituye una técnica fundamental para el análisis de series temporales, ya que permite transformarlas en representaciones dentro de un espacio euclidiano de dimensión fija $\mathbb{R}^d$, preservando sus propiedades topológicas esenciales. Este procedimiento, conocido también como reconstrucción del espacio de estados, se sustenta en la teoría de Takens (1981), la cual garantiza que una serie temporal pueda convertirse en una nube de puntos que refleja su dinámica subyacente. De este modo, se posibilita el estudio estructural y topológico de datos que, en su forma original, carecen de una representación geométrica natural, para más detalle teórico ver (Perea, 2019).

El enfoque consiste en transformar una serie temporal $[x_t, 1, 2, \dots, T]$, en su espacio de fase, es decir, una nube de puntos o un conjunto de puntos

$$v_i\{x_i, x_{i+\tau}, \dots, x_{i+d\tau}\}, \quad i = 1, 2, \dots, T + d\tau$$

donde τ es un parámetro de retardo y d especifica la dimensión de la nube de puntos.

La metodología se basó en el uso de ventanas deslizantes de tamaño fijo, dentro de las cuales se aplicaron sub-ventanas más cortas para capturar información local de los ciclos periódicos. A partir de estas sub-ventanas se construyeron diferentes incrustaciones de retardo y se generaron diagramas de persistencia, de los cuales se extrajeron características topológicamente estables. Finalmente, dichas características fueron empleadas para analizar a través de aprendizaje automático.

Distancias entre diagramas de persistencia. Para cuantificar la disimilitud entre dos diagramas de persistencia DP_1 y DP_2 , se utilizan comúnmente dos métricas de distancia: la distancia de Wasserstein y la distancia de cuello de botella (Mileyko et al., 2011).

3. Resultados

Existen varios métodos para escoger d = dimensión de retardo. Algunos autores (Pereira y de Mello, 2015; Seversky et al., 2016) simplemente asumen que d es 2 o 3, mientras que Perea ha sugerido el uso de $d = 15$ en series temporales después de una interpolación spline cúbica. Es así como la elección de d y τ determina entonces el número de puntos N en la nube de puntos.

En la Figura 1(a) se presenta una serie no periódica simulada definida como $f(t) = \cos(t) + \cos(\pi t)$, transformada mediante incrustación en dimensión $d = 2$ con un retardo $\tau = 3$. A partir del diagrama de persistencia (DP) obtenido, es posible calcular métricas como la distancia de Wasserstein o la de cuello de botella, lo que permite establecer comparaciones estructurales con otras series temporales.

Por su parte, la Figura 2 corresponde a la serie de concentraciones de PM2.5 registradas en la estación INEM de Medellín durante el 2023. Esta serie se transforma en una nube de puntos Figura 2(b) y en su correspondiente diagrama de persistencia Figura 2(c), lo que posibilita identificar similitudes entre patrones, así como aplicar técnicas de clasificación apoyadas en las distancias topológicas calculadas.

Figura 1: (a) A la izquierda se muestra la serie simulada no periódica, (b) las nubes de puntos y (c) a la derecha el diagrama de persistencia.

Figura 2: (a) A la izquierda se muestra la serie temporal de la estación INEM de Medellín de PM2.5, (b) las nubes de puntos y (c) a la derecha el diagrama de persistencia.

Referencias

- [1] C. M. PEREIRA, R. F. DE MELLO, *Persistent homology for time series and spatial data clustering*. Expert Systems with Applications. **42** (2015):6026–6038.
- [2] L. M. SEVERSKY, S. DAVIS AND M. BERGER, *On Time-Series Topological Data Analysis: New Data and Opportunities*. IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition Workshops, 2016.
- [3] G. CARLSSON, *Topology and data*. Bulletin of the American Mathematical Society. **46**(2) (2009):255–308.
- [4] F. TAKENS, *Detecting strange attractors in turbulence*. Lecture Notes in Mathematics. **898** (1981):366–381.
- [5] J. A. PEREA, *Topological time series analysis*. Notices of the American Mathematical Society. **66**(5) (2019):686–694.
- [6] Y. MILEYKO, S. MUKHERJEE, J. HARER, *Probability measures on the space of persistence diagrams*. Inverse Problems. **27**(12) (2011).

6.11 Complejidad topológica de las relaciones de Green

Y. Natali Delgado M.¹

Resumen

Un semigrupo es un conjunto con una operación asociativa; cuando el conjunto es un espacio topológico y la operación es continua, se le llama semigrupo topológico. Recientemente, ha habido un interés creciente en estudiar semigrupos polacos, es decir, semigrupos topológicos donde la topología es completamente metrizable y separable. Cada semigrupo tiene asociadas cinco relaciones de equivalencia llamadas relaciones de Green que han sido ampliamente estudiados y han demostrado ser una herramienta esencial para estudiar la estructura de semigrupos. Cuando el semigrupo es polaco, las relaciones de Green resultan analíticas. En esta charla, presentaremos algunos resultados sobre la teoría descriptiva de conjuntos y las relaciones de Green.

Palabras & frases claves: Semigrupo, relaciones de Green, polaco, boreliano, analítico, coanalítico.

1. Introducción

Un semigrupo es un conjunto S con una operación binaria asociativa. Para los semigrupos, el ejemplo más importante es el semigrupo X^X (el semigrupo de todas las funciones de X en X), ya que todo semigrupo es isomorfo a un subsemigrupo de X^X [1, Teorema 1.22]. Especialmente importante para esta charla es el caso X numerable. Pues sabemos que el semigrupo $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ admite una topología que lo hace semigrupo polaco y el semigrupo inverso $I(\mathbb{N})$ admite una topología que lo hace semigrupo inverso polaco, es decir, métrico completo y separable.[3]

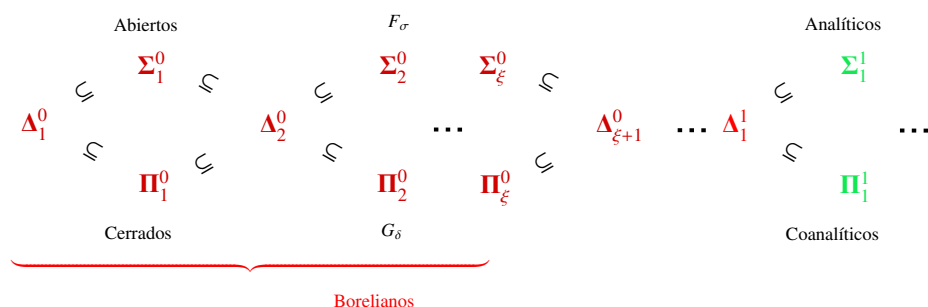
Al estudiar la estructura algebraica de un semigrupo es usual encontrarse con el concepto de ideal, esto es, dado un semigrupo S , decimos que $T \subseteq S$ es un ideal a izquierda en S si es cerrado bajo multiplicación a izquierda, es decir si $ST \subseteq T$; similarmente, definimos ideal a derecha e ideal bilátero. Una de las herramientas fundamentales para comprender un semigrupo son sus relaciones de Green, las cuales dan información sobre la estructura del semigrupo y cómo interactúan sus elementos dependiendo de los ideales principales que estos generan. En un semigrupo hay cinco relaciones de Green: $\mathcal{H}$, $\mathcal{L}$, $\mathcal{R}$, $\mathcal{D}$ y $\mathcal{J}$ que definimos a continuación:

$$\begin{aligned}(x, y) \in \mathcal{L} &\iff Sx \cup \{x\} = Sy \cup \{y\}, \\(x, y) \in \mathcal{R} &\iff xS \cup \{x\} = yS \cup \{y\}, \\(x, y) \in \mathcal{J} &\iff SxS \cup \{x\} = SyS \cup \{y\}, \\(x, y) \in \mathcal{H} &\iff (x, y) \in \mathcal{L} \cap \mathcal{R}, \\(x, y) \in \mathcal{D} &\iff (x, y) \in \mathcal{L} \circ \mathcal{R}.\end{aligned}$$

Donde, la composición $\mathcal{L} \circ \mathcal{R}$ se entiende como la composición usual de relaciones de equivalencia.

¹Universidad Industrial de Santander. Correo: yeslinataz@gmail.com

Para esta presentación estudiaremos algunos ejemplos de semigrupos como $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, además de algunos de sus subsemigrupos y determinar la complejidad topológica de estas relaciones (como subconjuntos de $S \times S$). Para explicar qué se entiende por complejidad topológica necesitamos recordar algunos conceptos de la teoría descriptiva de conjuntos. Esta teoría estudia varias clases de conjuntos de un espacio Polaco X , tales como la clase de los borelianos $\mathcal{B}(X)$, que es la σ -álgebra más pequeña que contiene a los abiertos de X ; los analíticos, que son las proyecciones de los borelianos de $X \times \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ y, la clase de los coanalíticos, que son los complementos de los analíticos. Estas tres clases permiten hacer una clasificación de los subconjuntos de un espacio métrico X que refleja la complejidad topológica. Cuando nos referimos a complejidad de un subconjunto boreliano de un espacio polaco, nos referimos a su posición dentro de la jerarquía de Borel. Podemos visualizar un poco esa jerarquía en el siguiente diagrama:



Resultados

Para ello estudiamos caracterizaciones de las relaciones de Green que permitan determinar su complejidad topológica. Lo primero que hicimos fue caracterizar las relaciones de Green de $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ y de algunos subsemigrupos importantes de $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, como el subsemigrupo $Inv(\mathbb{N})$ de las funciones inyectivas, el subsemigrupo $Sob(\mathbb{N})$ de las funciones sobreyectivas, el subsemigrupo $Mon(\mathbb{N})$ de las funciones monótonas y el subsemigrupo $FU(\mathbb{N})$ de las funciones finita a uno, es decir, aquellas donde la preimagen de cada elemento es un conjunto finito. Este último es el único semigrupo de los estudiados que no es polaco como subespacio de $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$.

De los semigrupos mencionados anteriormente, el semigrupo $Sob(\mathbb{N})$ resalta, puesto que a pesar de no tener una caracterización para la relación $\mathcal{J}$ en este semigrupo, mostramos un ejemplo de dos funciones que no están en $\mathcal{D}^{Sob}$, pero sí están en $\mathcal{J}^{Sob}$ ([2, Proposición 3.4.5]). Lo que muestra que es el único semigrupo de los que estudiamos en donde las relaciones $\mathcal{D}$ y $\mathcal{J}$ no son iguales. El cuadro 1 presenta de forma resumida los resultados obtenidos.

Semigrupo	Relaciones de Green			
	$(f, g) \in \mathcal{L}$	$(f, g) \in \mathcal{R}$	$(f, g) \in \mathcal{D}$	$(f, g) \in \mathcal{J}$
$\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$	$\text{Ker}(f) = \text{Ker}(g)$	$\text{Im}(f) = \text{Im}(g)$	$ \text{Im}(f) = \text{Im}(g) $	$ \text{Im}(f) = \text{Im}(g) $
$\text{Iny}(\mathbb{N})$	$ \mathbb{N} \setminus \text{Im}(f) = \mathbb{N} \setminus \text{Im}(g) $	$\text{Im}(f) = \text{Im}(g)$	$ \mathbb{N} \setminus \text{Im}(f) = \mathbb{N} \setminus \text{Im}(g) $	$ \mathbb{N} \setminus \text{Im}(f) = \mathbb{N} \setminus \text{Im}(g) $
$\text{Sob}(\mathbb{N})$	$\text{Ker}(f) = \text{Ker}(g)$	$\forall n \in \mathbb{N} f^{-1}(n) = g^{-1}(n) $	$\forall r \in \mathbb{N} M_r^f = M_r^g $	?
$FU(\mathbb{N})$	$\text{Ker}(f) = \text{Ker}(g)$	$\text{Im}(f) = \text{Im}(g)$	$FU(\mathbb{N}) \times FU(\mathbb{N})$	$FU(\mathbb{N}) \times FU(\mathbb{N})$
$\text{Mon}(\mathbb{N})$	$f = g$	$f = g$	$f = g$	$f = g$
$I(\mathbb{N})$	$\text{Dom}(f) = \text{Dom}(g)$	$\text{Im}(f) = \text{Im}(g)$	$ \text{Im}(f) = \text{Im}(g) $	$ \text{Im}(f) = \text{Im}(g) $

Cuadro 1: Caracterización de las relaciones de Green en algunos semigrupos

Con esas caracterizaciones a la mano ya pudimos calcular la complejidad topológica de las relaciones de Green respecto a la topología polaca de cada semigrupo. Los resultados obtenidos los presentamos en la Tabla 2.

Semigrupo	Inverso	Polaco	Complejidad Topológica				
			$\mathcal{L}$	$\mathcal{R}$	$\mathcal{H}$	$\mathcal{D}$	$\mathcal{J}$
S	$\times$	$\checkmark$	Σ_1^1	Σ_1^1	Σ_1^1	Σ_1^1	Σ_1^1
S	$\checkmark$	$\checkmark$	Π_1^0	Π_1^0	Π_1^0	Σ_1^1	Σ_1^1
$\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$	$\times$	$\checkmark$	Π_1^0	G_δ	G_δ	Δ_3^0	Δ_3^0
$\text{Iny}(\mathbb{N})$	$\times$	$\checkmark$	Δ_4^0	G_δ	G_δ	Δ_4^0	Δ_4^0
$\text{Sob}(\mathbb{N})$	$\times$	$\checkmark$	G_δ	Π_3^0	Π_3^0	Π_4^0	?
$FU(\mathbb{N})$	$\times$	$\times$	Π_1^0	G_δ	G_δ	Π_1^0	Π_1^0
$\text{Mon}(\mathbb{N})$	$\times$	$\checkmark$	Π_1^0	Π_1^0	Π_1^0	Π_1^0	Π_1^0
$I(\mathbb{N})$	$\checkmark$	$\checkmark$	Π_1^0	Π_1^0	Π_1^0	Δ_3^0	Δ_3^0

Cuadro 2: Complejidad topológica de las relaciones de Green en algunos semigrupos

Referencias

- [1] Cain, Alan J. *Nine Chapters on the Semigroup Art*. AJC Porto & Lisbon, 2020.
- [2] Delgado, N. *Las relaciones de Green y representación de semigrupos polacos*. Tesis de maestría, Universidad Industrial de Santander, 2025 <https://noesis.uis.edu.co/handle/20.500.14071/45196>
- [3] Pérez, J. and Uzcátegui, C. *Topologies on the symmetric inverse semigroup*. Semigroup Forum. **104** (2022):1–17.
- [4] Arana, K., Pérez, J. and Uzcátegui, C. *Pettis property for Polish inverse semigroups*. Applied General Topology- **24** (2023):455–467.
- [5] Di Prisco, C. and Uzcátegui, C. *Una introducción a la teoría descriptiva de conjuntos*. Ediciones Uniandes, 2020.

6.12 Descomposición de sucesiones de Palais Smale

Daimon Santiago Mayorga Carreño¹

Resumen

En esta ocasión, el tema principal de esta ponencia es mostrar el resultado de [1] aplicando la teoría blow-up a variedades Riemannianas compactas para describir la descomposición de soluciones como una función límite más una suma finitas de burbujas. Este estudio no solo permite entender el comportamiento cualitativo de las soluciones, sino también aporta herramientas para abordar problemas de existencia, compacidad y multiplicidad en ecuaciones con exponentes críticos.

La descomposición de sucesiones de Palais Smale es una herramienta fundamental en el análisis variacional de ecuaciones en derivadas parciales y problemas geométricos. Su importancia radica en que permite describir el comportamiento de ciertas sucesiones de funciones asociadas a un funcional de energía cuando no existe compacidad suficiente para garantizar la convergencia fuerte.

Palabras & frases claves: Geometría Riemanniana, Compacidad, Niveles de energía, Ecuaciones tipo Yamabe.

1. Introducción

En el contexto de las variedades Riemannianas es común encontrar estructuras geométricas especiales definidas a partir de soluciones de una ecuación diferencial. En particular, en una variedad Riemanniana (M^n, g) se destacan las ecuaciones tipo Yamabe

$$\Delta_g u + h_\alpha u = u^{p_n},$$

donde (h_α) es una sucesión de funciones diferenciables sobre M y p_n es el exponente crítico de Sobolev.

Para esta charla introduciremos las ecuaciones tipo Yamabe, su origen ver [3], luego hablaremos sobre la existencia de sucesiones de Palais Smale asociadas a un funcional vinculado a la ecuación y por ultimo daremos un vistazo rapidamente a la demostración del teorema de descomposición aplicando diferentes pasos para visualizar la técnica Blow-up ver[2]

Referencias

- [1] STRUWE, M. *A global compactness result for elliptic boundary value problems involving limiting nonlinearities*. Mathematische zeitschrift, **187**(4) (1984):511–517.
- [2] DRUET, O., HEBEY, E., & ROBERT, F. *Blow-up theory for elliptic PDEs in Riemannian geometry* (Vol. 45). Princeton University Press, 2009.

¹Universidad Industrial de Santander. Correo: daimon2238032@correo.uis.edu.co

- [3] LEE, J. M., & PARKER, T. H. *The yamabe problem*. Bulletin of the American Mathematical Society, **17**(1) (1987):37–91.

6.13 El teorema de Gauss-Bonnet

Fermín Navarro Hernández¹

Resumen

Esta charla tiene como objetivo determinar la profunda relación de la curvatura absoluta y la curvatura geodésica total a lo largo de una curva con la topología sobre una región simple de una superficie regular; esto es, comprender el significado geométrico y topológico del teorema de Gauss-Bonnet. Este estudio se centra en su versión local, además de realizar algunas aplicaciones simples citadas en [2]. La demostración de tal teorema no tiene bastante complejidad; la dificultad más grande es darle las interpretaciones e implicaciones geométricas y topológicas. Se presentarán algunos resultados sin demostración para poder formular la versión global del teorema, además de un único ejemplo.

El estudio se enfocará inicialmente en la versión local del teorema, enfatizando el papel de la curvatura absoluta como cuánto se deforma un pedazo de plano teniendo en cuenta la dirección normal. Además, la interpretación de la curvatura geodésica total como reflejo del comportamiento de la frontera de una región simple en el sentido intrínseco. Asimismo, se analizará el teorema de rotación de tangentes, que describe la variación total del ángulo tomado desde el vector tangente a una curva coordenada con la dirección del vector tangente a lo largo de una curva simple cerrada. Este resultado provee una conexión entre el análisis local de curvas sobre la superficie y las implicaciones topológicas globales, sirviendo como motivación para comprender el significado del término asociado a la frontera.

Palabras & frases claves: Curvatura absoluta, región simple y superficie regular.

1. Introducción

El teorema de Gauss-Bonnet es conocido por ser uno de los teoremas fundamentales de la geometría diferencial de superficies, el cual relaciona la geometría del objeto con su topología. Es fascinante poder evidenciar cómo la suma de los ángulos internos de un triángulo sobre la superficie difiere del caso de un triángulo plano, y cuya diferencia puede hacerse explícita usando este teorema, en particular la primera versión que publicó Gauss en 1828. Bonnet, por su parte, lo generalizó sobre regiones simples y regulares, una local y la otra global, respectivamente. Además, la maravillosa demostración es una aplicación del teorema de Green en el plano; esto sugiere profundizar en curvas simples a trozos. No es sorprendente darse cuenta de que resultados del álgebra lineal son fundamentales para el desarrollo, ya que trabajamos con espacios vectoriales de dimensión finita.

Para poder dar interpretaciones geométricas, es necesario definir algunos conceptos previos, los cuales se darán al inicio. También es importante descifrar algunos conceptos que se asocian a la geometría intrínseca de la superficie, razón que se abordará seguidamente. Para terminar, se trata el resultado objetivo de la investigación, el cual es el teorema de Gauss-Bonnet en su forma local, junto con algunas aplicaciones; adicionalmente, se da mención de algunos hechos topológicos para enunciar el teorema global y un ejemplo simple. Por último, se dan las conclusiones del trabajo.

¹Universidad Francisco José de Caldas. Correo: fnavarroh@udistrital.edu

2. Motivación:

Dar interpretaciones geométricas de álgebra lineal, cálculo vectorial y topología de los conceptos fundamentales es muy emocionante y nutritivo; por lo tanto, en esta charla hablaré acerca de los principios asociados al enunciado del teorema de Gauss-Bonnet, como la curvatura absoluta, la orientabilidad de una superficie, la región simple y el teorema de rotación de tangentes. Cabe añadir que nos centraremos en la versión local, puesto que la versión global tiene conceptos topológicos mucho más complejos, por ejemplo, las triangulaciones y la característica de Euler-Poincaré; sin embargo, mencionaremos los resultados correspondientes brevemente. La importancia radica en poder captar localmente el lugar donde se esconde la información geométrica de una región simple. Para terminar, una motivación de investigación futura es considerar la existencia de repercusiones posteriores de tipo Gauss-Bonnet, las cuales reflejan la relación entre geometría y topología vía invariantes, como lo muestran Kentaro Saji, Masaaki Umehara y Kotaro Yamada en su trabajo *The Geometry of Fronts* [4], en donde se construye un análogo para superficies singulares.

Referencias

- [1] APOSTOL, TOM M., *Calculus, Volume II: Multivariable Calculus and Linear Algebra with Applications to Differential Equations and Probability*. John Wiley & Sons, New York, 2nd edition, 1969.
- [2] DO CARMO, MANFREDO P., *Geometría diferencial de curvas y superficies*. Alianza Editorial, Madrid, 1984.
- [3] GUIMARAES, JÉSSICA DUARTE SILVA, *O teorema de Gauss-Bonnet e suas aplicações*. Master's thesis, Universidade Federal de Minas Gerais, 2020.
- [4] SAJI, KENTARO, UMEHARA, MASAÁKI & YAMADA, KOTARO, *The geometry of fronts*. *Annals of Mathematics*. **169**(2) (2009):491–529.
- [5] STRUIK, DIRK J., *Lectures on Classical Differential Geometry*. Dover Publications, New York, 2nd edition, 1988.

6.14 Espacios *CTS* y la propiedad fuerte de Choquet

Jeison Amorocho Morales¹, Carlos Enrique Uzcátegui²

Resumen

Decimos que un espacio topológico X es *CTS* si es compacto, T_1 y segundo numerable. En esta charla se estudiará la relación entre los espacios *CTS* y la propiedad fuerte de Choquet, lo cual permite analizar su representación mediante espacios posets. En particular, Mummert y Stephan (2010) demostraron que un espacio X es homeomorfo a un espacio MF de base numerable si y solo si es segundo numerable, T_1 y posee la propiedad fuerte de Choquet. Por otra parte, Morayne y Rałowski (2023) caracterizaron a los *CTS* que son espacios Baire.

Inicialmente se pensaba que todo *CTS* Baire tendría la propiedad fuerte de Choquet; sin embargo, se muestra que un *CTS* es de Baire si y solo si es de Choquet. Además, se construye un ejemplo de un espacio de Baire que no posee la propiedad fuerte de Choquet.

En este ponencia se discutirán estas ideas y se planteará la siguiente pregunta: ¿qué condiciones debe satisfacer un poset $\mathbb{J}$ para que $\text{MF}(\mathbb{J})$ sea compacto?

Palabras & frases claves: Espacios *CTS*, propiedad fuerte de Choquet, espacios Baire, espacios posets.

1. Introducción

Decimos que un espacio topológico X es *CTS* si es compacto, T_1 y segundo numerable. Recientemente se han estudiado métodos para representar espacios *CTS* mediante estructuras de carácter combinatorio ([1], [2], [4]).

En el primero de estos trabajos, M. Morayne y C. Ryll-Nardzewski [1] introdujeron un espacio *CTS*, denotado por $\mathcal{G}^{\max}(\mathcal{F})$, asociado a cada familia hereditaria $\mathcal{F}$ de subconjuntos finitos de $\mathbb{N}$, y demostraron que todo espacio *CTS* es homeomorfo a uno de estos espacios $\mathcal{G}^{\max}(\mathcal{F})$. Este resultado les permitió probar que todo *CTS* admite una extensión polaca que preserva borelianos. Por otro lado, Adam Bartoš, Tristan Bice y Alejandro Vignatti [2], asociaron a cada conjunto parcialmente ordenado $\mathbb{J}$ un espacio compacto $\text{Sel}(\mathbb{J})$ que llamaron el *espectro de* $\mathbb{J}$. En particular, estudiaron minuciosamente las bases de un espacio topológico ordenadas por inclusión. Y demostraron que todo espacio *CTS* es homeomorfo al espectro $\text{Sel}(\mathbb{J})$ donde $\mathbb{J}$ es una base del espacio con ciertas propiedades especiales. Además, desarrollaron un método para construir espacios topológicos a partir de posets numerables, aplicable a todos los *CTS*.

Por su parte, Mummert y Stephan demostraron en [4] que todo espacio segundo numerable T_1 con la propiedad fuerte de Choquet es homeomorfo a un espacio MF, es decir, al espacio de ultrafiltros de un poset (ver Teorema 2). Asimismo, establecieron que, en general, todo espacio MF es un espacio Baire. Finalmente, en [3], se caracteriza cuándo un espacio *CTS* es Baire (ver Teorema 3).

¹Universidad Industrial de Santander. Correo: jeisonamorocho@gmail.com

²Universidad Industrial de Santander. Correo: cuzcatea@saber.uis.edu.co

En esta ponencia abordaremos la relación entre los espacios *CTS*, la propiedad fuerte de Choquet y la noción de espacios *MF*. En particular, se muestra que un *CTS* es Choquet si y sólo si es Baire, además se contruye un ejemplo de *CTS* Baire que no posee la propiedad fuerte de Choquet. Así mismo, se define cuando un *CTS* es bueno y se muestra que estos tienen la propiedad fuerte de Choquet.

2. Marco teórico

Un **filtro** es un subconjunto F de un poset $\mathbb{Q}$ que satisface las siguientes dos condiciones:

1. Para cada $p, q \in F$, existe un $r \in F$ tal que $r \leq p$ y $r \leq q$.
2. para cada $p \in F$ y $q \in \mathbb{Q}$, si $p \leq q$ entonces $q \in F$.

Decimos que un filtro F es **acotado** si existe $r \in \mathbb{Q}$ tal que $r < q$ para cada $q \in F$. Además, F es **maximal** (o más conocido por **ultrafiltro**) si no hay ningún filtro estrictamente mayor que contenga a F .

Todo ultrafiltro es no acotado, pero en general no todo filtro no acotado es ultrafiltro. Para cualquier conjunto $\mathbb{Q}$, $UF(\mathbb{Q})$ denota el conjunto de filtros no acotados en $\mathbb{Q}$ y $MF(\mathbb{Q})$ el conjunto de ultrafiltros de $\mathbb{Q}$. Definimos en $UF(\mathbb{Q})$ una base para una topología, dada por

$$\{N_p : p \in \mathbb{Q}\},$$

donde

$$N_p = \{F \in UF(\mathbb{Q}) : p \in F\}.$$

Asimismo, al espacio $MF(\mathbb{Q})$ se le dota con la topología que hereda como subconjunto de $UF(\mathbb{Q})$. Los espacios UF y los espacios MF se denominan colectivamente espacios posets. Un espacio poset es de **base numerable** si se forma a partir de un poset numerable.

Teorema 1. (Mummert, Stephan, (2010) [4]). Sea $\mathbb{Q}$ un poset, entonces

1. Cada espacio $UF(\mathbb{Q})$ es T_0 .
2. Cada espacio $MF(\mathbb{Q})$ es T_1 .
3. Si $UF(\mathbb{Q})$ es T_1 , entonces $UF(\mathbb{Q}) = MF(\mathbb{Q})$.
4. Cada espacio poset es Baire.
5. Cada espacio poset tiene la propiedad fuerte de Choquet.

Teorema 2. (Mummert, Stephan, (2010) [4]). Un espacio topológico X es homeomorfo a un espacio MF de base numerable si y sólo si es segundo numerable, T_1 y tiene la propiedad fuerte de Choquet.

Teorema 3. (Morayne-Ralowski, (2023) [3]). Sea X un espacio *CTS*. Entonces, X es un espacio Baire si y solo si cada subconjunto abierto no vacío de X contiene un subconjunto cerrado con interior no vacío.

Proposición 4. Sea X un *CTS*, entonces X es un espacio Choquet si y solo si X es Baire.

Ejemplo 5. Sea $X = (0, 1] \cup \{\frac{-1}{2k} : k \in \mathbb{N}\} \cup \{\frac{-1}{2k+1} : k \in \mathbb{N}\}$ con la topología definida de la siguiente manera:

Para cada punto de la forma $\frac{-1}{2k}$, con $k \in \mathbb{N}$, se consideran abiertos básicos a los conjuntos de la forma

$$U_n^{(k)} = \left\{ \frac{-1}{2k} \right\} \cup \bigcup_{i \geq n} \left(\frac{1}{2i+2}, \frac{1}{2i} \right) \cup \left\{ \frac{-1}{2i} : i \geq n+k \right\},$$

para cada $n \in \mathbb{N}$.

Y para cada punto de la forma $\frac{-1}{2k+1}$, con $k \in \mathbb{N}$, se consideran abiertos básicos a los conjuntos de la forma

$$V_n^{(k)} = \left\{ \frac{-1}{2k+1} \right\} \cup \bigcup_{i \geq n} \left(\frac{1}{2i+1}, \frac{1}{2i-1} \right) \cup \left\{ \frac{-1}{2i+1} : i \geq n+k \right\},$$

para cada $n \in \mathbb{N}$.

En los demás puntos de X , la topología coincide con la topología usual de $\mathbb{R}$. Afirmamos que este espacio es CTS y Baire pero no posee la propiedad fuerte de Choquet.

Referencias

- [1] M. MORAYNE, C. RYLL-NARDZEWSKI. *Refinements of T1, compact and second countable topologies*, Topology and its Applications. **56** (1994):159–164. [https://doi.org/10.1016/0166-8641\(94\)90016-7](https://doi.org/10.1016/0166-8641(94)90016-7)
- [2] BARTOŠ, A., BICE, T., & VIGNATI, A. *Constructing compacta from posets*. Publ. Mat., **69**(1) (2025):217–265. <https://doi.org/10.5565/PUBLMAT6912510>
- [3] M. MORAYNE, RALOWSKI, R. *The Baire theorem, an analogue of the Banach fixed point theorem and attractors in T1 compact spaces*. Bulletin Des Sciences Mathématiques, **183** (2010):103231. <https://doi.org/10.1016/j.bulsci.2023.103231>
- [4] MUMMERT, C., & STEPHAN, F. *Topological aspects of poset spaces*. Michigan Mathematical Journal, **59**(1) (2010):3–24. <https://doi.org/10.1307/mmj/1272376025>

6.15 Espectros en geometría Riemanniana

Jurgen Julio Batalla¹

Resumen

Es bien conocido como el uso de valores propios de matrices han jugado un role importante en soluciones de problemas en Álgebra lineal. En un contexto infinito dimensional otro uso corresponde a relacionar el comportamiento de los valores propios de un operador diferencial con invariantes geométricos. Por ejemplo, André Lichnerowicz exploró como el primer valor propio del Laplaciano de una variedad cerrada está relacionado con su curvatura de Ricci. En la primera parte de esta charla haremos un recorrido sobre la geometría que generan los valores propios del Laplaciano y el operador de Dirac. En la parte final discutiremos una caracterización reciente de los primeros valores propios del Laplaciano conforme y el operador de Dirac en una clase conforme fija.

Palabras & frases claves: Operador de Dirac, Curvatura escalar.

Referencias

- [1] B. AMMANN, *A spin-conformal lower bound of the first positive Dirac eigenvalue*, Differ. Geom. Appl. **18**(1) (2003):21–32.
- [2] C. BÄR, *Real Killing spinors and holonomy*, Comm. Math. Phys. **154**(3) (1993):509–521.
- [3] O. HIJAZI, *A conformal lower bound for the smallest eigenvalue of the Dirac operator and Killing spinors*, Comm. Math. Phys. **104** (1986):151–162.

¹Universidad Industrial de Santander. Correo: jajuliob@uis.edu.co

6.16 Explorando el aquí y el ahora: la geometría del espacio-tiempo

Julián David Vera Varela¹

Resumen

En esta presentación se muestra el concepto de espacio-tiempo por medio de la relatividad especial a través de geometría Semi-Rimanniana. Para este fin, veremos al espacio tiempo como una variedad diferenciable isométrica a un 4-espacio de Minkowsky $\mathbb{R}_1^4$ y a través de ejemplos y fenómenos interesantes se ilustrará el como se comporta la geometría de nuestro universo. Así, esta presentación es una invitación a explorar nuestra realidad espacio-temporal a través de la física matemática.

Palabras & frases claves: Espacio-tiempo, Variedades, Geometría

1. Introducción

En el año 1905, Albert Einstein tras la publicación de su artículo tratando la relatividad especial, logró encontrar una teoría relativista que diera un concepto general del fenómeno de la gravedad. En esta teoría es donde se formula el concepto del espacio-tiempo, una forma de estudiar la geometría de del universo.

A la hora de estudiar el espacio-tiempo es necesario tener la noción de “cercanía” o el poder “separar” eventos ocurridos a lo largo del tiempo. Es decir, dotarlo con una estructura topológica de Hausdorff. Además, es necesario contar con una estructura de diferenciable para formular la noción de “cambio” y de esta manera logramos ver el espacio-tiempo como una variedad diferenciable isométrica a un 4-espacio de Minkowsky $\mathbb{R}_1^4$.

También mostraremos algunas de las implicaciones físicas que trae la forma de entender este fenómeno, todo a través de ejemplos intuitivos y fenómenos llamativos (como lo pueden ser las leyes de conservación dadas por el Teorema de Noether o la paradoja de los gemelos.)

Este trabajo hace parte del proyecto de trabajo de grado para optar por el título de matemático de la Universidad Distrital del autor, una invitación a el encuentro entre la matemática y la física.

2. Sección

Para lograr la construcción del espacio-tiempo empezaremos desde una teoría base (la geometría diferencial) e iremos escalando hasta llegar a la geometría del tiempo y la definición del espacio-tiempo.

Geometría de variedades. Se empezará con el concepto de *variedad suave*, para inmediatamente definir una estructura geométrica sobre la misma, es decir, vectores tangentes y campos vectoriales.

¹Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Correo: jdverav@udistrital.edu.co

Todos estos conceptos los daremos por medio de ejemplos clásicos como la esfera y el toro (de ejemplo mirar Figura 1). Después hablaremos de curvas y un teorema que dotará el plano tangente de su estructura geométrica en el mundo de las variedades.

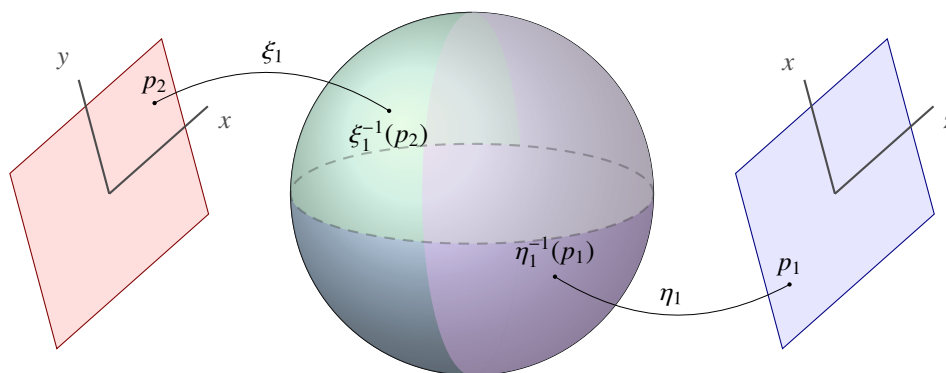


Figura 1

Tensores. Estos objetos son la columna vertebral del trabajo, por lo que vamos a definir lo que es un *tensor*, globalizaremos a *campo tensorial* y empezaremos a trabajar con tensores tipo $(0,2)$. Todo esto acompañado con ejemplos del manejo tensorial.

También hablaremos del producto escalar en variedades. Esto nos permitirá hablar del *tensor métrico* y definir las variedades riemannianas.

Variedades riemannianas y semi-riemannianas. Hablaremos sobre las variedades que admiten *estructura riemanniana*, es decir un producto interno simétrico definido positivo. Más aún, demostraremos que toda variedad admite estructura riemanniana y hablaremos también de las variedades semi-riemannianas (una variedad con un producto escalar no degenerado).

La geometría del tiempo y el espacio-tiempo. Hablaremos de algunas funciones importantes (una conexión, derivada covariante, geodésicas y aplicación exponencial). Esto con la finalidad de definir el cono de tiempo, además de visualizar el como se comportan los vectores en este espacio (Figura 2).

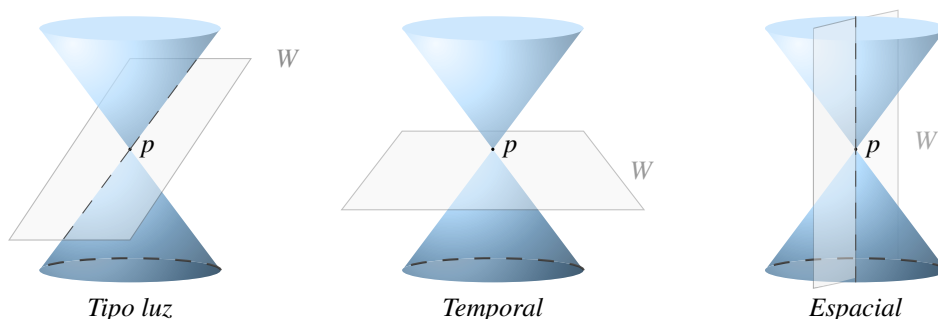


Figura 2

Finalmente definiremos el espacio-tiempo, en particular, miraremos la geometría del espacio-tiempo de Minkowsky (un espacio-tiempo isométrico a un espacio de Minkowsky $\mathbb{R}_1^4$) a través del cono de luz y lo compararemos con el espacio-tiempo newtoniano (vea Figura 3). Con esto, daremos un ejemplo de un efecto relativista conocido como *la paradoja de los gemelos*. Finalmente daremos unas conclusiones de este recorrido geométrico.

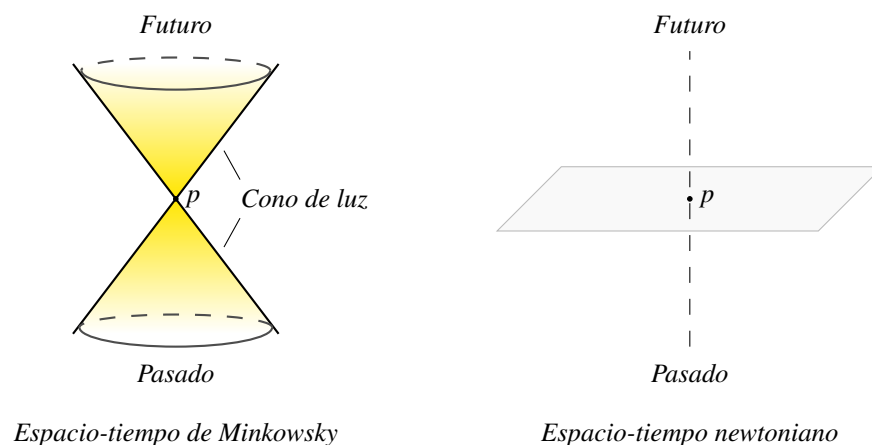


Figura 3

Referencias

- [1] BARRETT O' NEILL. *Semi-Riemannian geometry with aplications to relativity*, Academic Press, 1983.
- [2] A. EINSTEIN. *Zur Elektrodynamik bewegter Körper*. Annalen der Physik, 1905.
- [3] NATALIA AVERNA GARCÍA. *Introducción a la teoría de Morse*, Universidad Complutense de Madrid, 2024.
- [4] CONICO Y DANU, *How was Einstein led to make a contact with Differential Geometry for his theory of General Relativity?*, 28 de Junio de 2019, Blog, Stack Exchange, <https://hsm.stackexchange.com/questions/5188/how-was-einstein-led-to-make-a-contact-with-differential-geometry-for-his-theory/5195>
- [5] MANFREDO P. DO CARMO, *Geometria Riemanniana*, IMPA, Quinta edición, 2015.
- [6] ÁLVARO A. SANJUAN, *Algunos aspectos geométricos de las ecuaciones diferenciales ordinarias*, Universidad Distrital, 2002.
- [7] MANFREDO P. DO CARMO, *Differential Geometry of Curves and Surfaces*, IMPA, 1976.
- [8] STEPHEN HAWKING, *Breve histoia del tiempo*, Editorial Planeta, 2016.
- [9] VICENZO BARONE, *Albert Einstein: Constructor de Universos*, Biblioteca Buridán, 2016.

6.17 Formulando la refracción en óptica geométrica por medio de la geometría de contacto

Juan José Gómez Romero¹, Ricardo Uribe-Vargas²

Resumen

La geometría de contacto da una descripción natural de la propagación de ondas a través del principio de Fermat-Huygens de contacto, la cual facilita el estudio de singularidades de frentes de onda y la simulación computacional de dicho fenómeno. En este trabajo formulamos los principios de Huygens y Fermat de la óptica geométrica usando la geometría de contacto, y exploramos la formulación del fenómeno de refracción en el contexto de geometría de contacto. Al estudiar la ley de Snell notamos que esta tiene una descripción natural en términos de geometría de contacto, lo cual da las bases necesarias para la descripción de esta ley en la formulación de contacto como una acción sobre fibras en la interfaz de dos medios ópticos.

Palabras & frases claves: geometría de contacto, propagación de frentes de onda, principio de Huygens, ley de Snell.

1. Introducción

En la comunidad de física matemática la geometría de contacto no ha recibido tanta atención como otras teorías geométricas, esto a pesar de proporcionar una descripción natural de varias teorías físicas, como por ejemplo: óptica geométrica (por medio de la teoría de propagación de ondas de Huygens), termodinámica de Gibbs, teoría de control, y mecánica clásica no-conservativa [1].

La geometría de contacto facilita y permite profundizar en el estudio de la geometría de la propagación de ondas, fenómeno el cual es altamente no trivial aún en el caso más sencillo de frentes equidistantes en el plano euclidiano; como lo es la inversión de las curvas equidistantes de una elipse [2, 3].

En los últimos años, la implementación de la geometría de contacto en software de propagación de frentes de onda ha sido un tema de creciente interés [4]. Sin embargo, su implementación no ha llegado sin dificultades en la interpretación física de los resultados obtenidos. Las inconsistencias físicas halladas pueden ser atribuidas al método de implementación de la ley de Snell en la representación de contacto, lo cual motiva el estudiar la apropiada descripción de la difracción con elementos propios de la geometría de contacto y el cómo esta afecta la implementación de la formulación de contacto de la óptica geométrica.

2. Propagación de frentes de onda y el principio de Huygens en la formulación de contacto

Empezamos a construir la formulación de contacto de la óptica geométrica. Considere un medio óptico M para el cual sus propiedades ópticas están dadas por una métrica Riemanniana, y descri-

¹Université Bourgogne Europe - LMB. Correo: gomezromerojuanjose@gmail.com

²Université Bourgogne Europe - LMB. Correo: Eduardo-Ricardo.Uribe-Vargas@ubourgogne.fr

bimos a un frente de onda en M como una hipersuperficie co-orientada $S \subset M$. La hipersuperficie t -equidistante S_t a S es definida como el conjunto de puntos finales de los segmentos geodésicos de longitud t normales a la hipersuperficie en sus puntos iniciales.

Bajo esta construcción, las hipersuperficies equidistantes S_t se comportan como frentes de onda usuales de óptica geométrica. Para cada punto $p \in S$ vamos a tomar su elemento de contacto co-orientado tangente a S . Esto nos permite considerar cada frente de onda en propagación S_t como el frente de un mapeo Legendriano de una subvariedad Legendriana L_{S_t} del espacio de elementos de contacto co-orientados de M , ST^*M , (también conocido como el fibrado cotangente proyectivizado de M) lo cual nos da el siguiente teorema.

Teorema 1 (Teorema de Huygens #1). *Las hipersuperficies equidistantes son frentes de mapeos Legendrianos.*

Podemos escribir una segunda versión del teorema de Huygens de contacto en el cual se describe el mecanismo de propagación de ondas usando el flujo geodésico de los elementos de contacto co-orientados de M .

Teorema 2 (Teorema de Huygens #2). *El flujo geodésico de los elementos de contacto co-orientados preserva la estructura de contacto natural de la variedad de elementos de contacto co-orientados.*

Corolario 3. *El teorema 1 es una consecuencia del teorema 2.*

Usando los teoremas 1 y 2, podemos afirmar que el flujo geodésico de g es generado por un campo vectorial de Reeb. Dado que todos los frentes de onda pueden ser descritos de esta manera, el principio de Huygens se visualiza naturalmente en este formalismo (ver Figura 1).

Figura 1: Visualización del principio de Huygens por medio del flujo geodésico de elementos de contacto co-orientados.

3. Proposición de la ley de Snell de contacto

En el tratamiento clásico, la refracción es tratada usando la ley de Snell, al relacionar la velocidad y dirección de los rayos en cada medio en un punto de la interfaz. Considerando que la ley de Snell es una consecuencia del principio de Fermat, esta debe tener una representación natural en la formulación de contacto.

Considere el caso de dos medios ópticos con una interfaz bien definida, separándolos (Figura 2-Izquierda). Los frentes equidistantes S_t de una fuente puntual $p \in M_1$ van a experimentar una deformación al pasar por la interfaz debido a la refracción. Por el teorema 1 podemos tomar los levantamientos Legendrianos de los frentes refractados, donde notamos que la refracción se traduce en una discontinuidad de los levantamientos sobre las fibras de la interfaz.

En la Figura 2-derecha, tenemos una representación de cómo la ley de Snell actúa sobre los rayos incidentes desde los dos medios en un punto de la interfaz. Esta acción es discontinua, específicamente en los ángulos críticos de reflexión interna total, y posee dos puntos estables correspondientes a rayos perpendiculares a la interfaz.

Entonces, tenemos dos tipos de discontinuidades en el espacio de elementos de contacto co-orientados como resultado de la refracción. Hay una discontinuidad de los flujos geodésicos al pasar de un medio al otro, y hay una discontinuidad de los levantamientos Legendrianos de los frentes refractados. Ambas discontinuidades deben de ser tratadas de manera conjunta al ser consecuencias ligadas a la refracción. Esto implica que al tratar la refracción en la formulación de contacto únicamente considerando el cambio de flujo geodésico, el comportamiento físico del sistema no va a seguir los principios clásicos de la óptica geométrica, como fue evidenciado en [4]. Por lo tanto, para representar correctamente la refracción en la formulación de contacto, debemos de definir una acción adicional sobre las fibras de la interfaz, la cual describa el cómo debe de tratarse la discontinuidad de los levantamientos Legendrianos de los frentes refractados.

Figura 2: (Izquierda) Visualización de los levantamientos Legendrianos de los frentes de onda de una fuente puntual, donde los frentes de onda son refractados entre dos medios ópticos. (Derecha) Representación gráfica de la acción de la ley de Snell en la fibra de la interfaz y su efecto en los rayos incidentes.

Referencias

- [1] V. I. ARNOLD, *Mathematical Methods of Classical Mechanics*. Graduate texts in mathematics. Springer, New York, 1989.
- [2] V. I. ARNOLD, *Singularities of caustics and wave fronts*. Mathematics and its applications. Springer, Dordrecht, 1990.
- [3] H. GEIGES, *An introduction to contact topology*. Cambridge University Press, 2008.
- [4] D. GARCÍA-PELÁEZ, C. S. LÓPEZ-MONSALVO, AND A. RUBIO PONCE, *Light propagation through optical media using metric contact geometry*. Journal of Mathematical Physics, **63**(7). (2022).

6.18 Ideales de subconjuntos densos en ninguna parte sobre espacios de Dow

Raúl Figueroa Sierra¹

Resumen

En esta ponencia presentamos el único contraejemplo conocido a la Dicotomía de Categoría en ZFC. Para ello, analizamos la interacción entre propiedades topológicas de un espacio X y las propiedades combinatorias del ideal de sus subconjuntos densos en ninguna parte $\text{nwd}(X)$.

En particular, mostramos que los espacios de Dow D , introducidos en [1], cumplen las condiciones necesarias para que $\text{nwd}(D)$ constituya un contraejemplo a la dicotomía. Este trabajo se realizó en colaboración con Alan Dow, Osvaldo Guzmán y Michael Hrušák (véase [2]).

Palabras & frases claves: espacios de Dow, ideales de subconjuntos densos en ninguna parte, Dicotomía de Categoría.

1. Introducción

Sea X un conjunto no vacío. Un **ideal** $\mathcal{I}$ sobre X es una familia no vacía de subconjuntos de X que es cerrada por paso a subconjuntos y por uniones finitas. Es decir, si $A \in \mathcal{I}$ y $B \subseteq A$ entonces $B \in \mathcal{I}$, y si $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{I}$ entonces $\bigcup_{i=1}^n A_i \in \mathcal{I}$. Supondremos siempre que el ideal es *propio*, esto es, $X \notin \mathcal{I}$, y que contiene todos los subconjuntos finitos de X .

Decimos que un ideal $\mathcal{I}$ sobre X es **alto** si, para todo $Y \in [X]^{\mathbb{N}}$, existe $A \in \mathcal{I}$ tal que $A \cap Y$ es infinito. Aquí $[X]^{\mathbb{N}}$ denota la colección de subconjuntos infinitos y numerables de X . Dado un ideal $\mathcal{I}$ sobre X , escribimos $\mathcal{I}^+ = \mathcal{P}(X) \setminus \mathcal{I}$ para denotar la familia de conjuntos $\mathcal{I}$ -positivos, es decir, los subconjuntos de X que no pertenecen a $\mathcal{I}$. Si $Y \in \mathcal{I}^+$, entonces la restricción de $\mathcal{I}$ a Y viene dada por $\mathcal{I} \upharpoonright Y = \{A \cap Y : A \in \mathcal{I}\}$, que es un ideal sobre Y .

Consideraremos principalmente ideales en conjuntos numerables. En este caso, los identificamos con ideales sobre $\mathbb{N}$. La topología desempeña un papel fundamental en el estudio de ideales sobre $\mathbb{N}$.

1.1. Orden de Katětov

Para comparar la complejidad combinatoria de dos ideales, una herramienta esencial es el orden de Katětov:

1. Una función $f : X \rightarrow Y$ es una **función de Katětov** de $(X, \mathcal{I})$ a $(Y, \mathcal{J})$ si para todo $A \subseteq Y$, $A \in \mathcal{J}$ implica $f^{-1}[A] \in \mathcal{I}$.
2. Decimos que $\mathcal{J}$ está **Katětov por debajo** de $\mathcal{I}$ (se escribe $\mathcal{J} \leq_K \mathcal{I}$) si existe una función de Katětov de $(X, \mathcal{I})$ a $(Y, \mathcal{J})$.
3. Diremos que $\mathcal{I}$ y $\mathcal{J}$ son **Katětov equivalentes** si $\mathcal{J} \leq_K \mathcal{I}$ y $\mathcal{I} \leq_K \mathcal{J}$.

¹Universidad de los Andes. Correo: r.figueroa@uniandes.edu.co

1.2. Dicotomía de Categoría

Denotamos por fin el ideal de los subconjuntos finitos de $\mathbb{N}$. El ideal fin es crítico para ideales altos: un ideal $\mathcal{I}$ sobre $\mathbb{N}$ es alto si y sólo si $\text{fin} \leq_K \mathcal{I}$.

Dado un espacio topológico (X, τ) , un subconjunto $A \subseteq X$ se dice **denso en ninguna parte** respecto de τ si la clausura de A tiene interior vacío. Si en la topología τ todos los conjuntos finitos son densos en ninguna parte, la colección de conjuntos densos en ninguna parte constituye un ideal en X , que denotamos por $\text{nwd}(X)$.

En particular, denotamos por nwd al ideal sobre $\mathbb{Q}$ de subconjuntos densos en ninguna parte del espacio topológico $\mathbb{Q}$ con la topología usual. El ideal nwd es un ideal de tipo $F_{\sigma\delta}$ y es crítico para ideales Cohen-indestructibles: un ideal $\mathcal{I}$ sobre $\mathbb{N}$ es Cohen-indestructible si y sólo si $\mathcal{I} \leq_K \text{nwd}$.

Denotamos por $\mathcal{ED}$ el ideal sobre $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ formado por aquellos subconjuntos $A \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ que pueden cubrirse mediante una cantidad finita de columnas verticales y de gráficas de funciones de $\mathbb{N}$ en $\mathbb{N}$. El ideal $\mathcal{ED}$ es crítico para ideales selectivos: un ideal $\mathcal{I}$ sobre $\mathbb{N}$ es selectivo si y sólo si $\mathcal{ED} \leq_K \mathcal{I}$.

Los ideales borelianos altos admiten una clasificación elegante en el orden de Katětov, dada por la **Dicotomía de Categoría** de Hrušák.

Teorema 1 (Hrušák, 2017). *Sea $\mathcal{I}$ un ideal boreliano alto sobre $\mathbb{N}$. Entonces se cumple una de las siguientes alternativas:*

1. $\mathcal{I} \leq_K \text{nwd}$,
2. existe un conjunto $X \in \mathcal{I}^+$ tal que $\mathcal{ED} \leq_K \mathcal{I} \restriction X$.

Esto plantea la cuestión natural de si dicha dicotomía podría extenderse a una clase más amplia de ideales. En otras palabras: ¿es todo ideal sobre $\mathbb{N}$ o bien Katětov por debajo de nwd , o bien admite una restricción Katětov por encima de $\mathcal{ED}$? Se sabe que la respuesta es negativa bajo la Hipótesis del Continuo (incluso bajo hipótesis más débiles como $\mathfrak{b} = \mathfrak{c}$), donde existen contraejemplos sencillos. Sin embargo, el panorama en el marco de ZFC es mucho más complejo.

2. Resultados principales

El objetivo principal de esta ponencia es exhibir, dentro de ZFC, un contraejemplo a la Dicotomía de Categoría. Nuestro análisis se centra en los ideales de subconjuntos densos en ninguna parte sobre espacios topológicos numerables. La siguiente tabla muestra algunos resultados previos sobre ideales de conjuntos densos en ninguna parte.

Propiedad de X	Propiedad de $\text{nwd}(X)$	Referencia
Espacio totalmente desconectado y sin puntos aislados	$\text{nwd}(X)$ es alto	[4] M. Kwela & A. Nowik (2018)
Espacio de segunda numerabilidad	$\text{nwd}(X)$ es de tipo $F_{\sigma\delta}$	[4] M. Kwela & A. Nowik (2018)
Espacio totalmente desconectado y sin puntos aislados	$\text{nwd}(X)$ no es F_σ	[4] M. Kwela & A. Nowik (2018)
La topología τ es analítica cuando se considera como subconjunto de $2^{\mathbb{N}}$	$\text{nwd}(X)$ no es un ideal P	[5] S. Todorčević & C. Uzcátegui

El primer paso consiste en identificar condiciones topológicas que aseguren que $\text{nwd}(X)$ no satisface la Dicotomía de Categoría. El siguiente es el resultado principal que presentaremos en esta ponencia.

Teorema 2 (Dow, Figueroa-Sierra, Guzmán, Hrušák, 2025). *Sea (X, τ) un espacio topológico que satisface:*

1. X es numerable,
2. (X, τ) es de Hausdorff,
3. (X, τ) es 0-dimensional,
4. (X, τ) tiene la propiedad de Fréchet-Urysohn, y
5. (X, τ) posee π -carácter no numerable en todo punto.

Entonces el ideal $\text{nwd}(X)$ no satisface la Dicotomía de Categoría.

Definición 3. *Un espacio topológico (X, τ) se llama **espacio de Dow** si X es numerable y la topología τ cumple las siguientes propiedades: es de Hausdorff, 0-dimensional, de Fréchet-Urysohn y posee carácter π no numerable en cada punto.*

Si (X, τ) es un espacio de Dow, diremos que τ es una topología de Dow sobre X . En [1], Dow demostró el siguiente resultado asociado a nuestro objetivo.

Teorema 4 (Dow, 2014). *Existe un espacio topológico $\mathfrak{D} = (\mathbb{N}^{<\mathbb{N}}, \tau_{\mathfrak{D}})$ Hausdorff, 0-dimensional, de Fréchet-Urysohn y con π -peso al menos $\mathfrak{b}$.*

Aunque en [1] no se afirma explícitamente que $\mathfrak{D}$ tiene π -carácter no numerable en todo punto, mostraremos cómo adaptar la construcción para garantizar que esta condición también se cumpla. Así, habremos obtenido el contraejemplo buscado en ZFC.

Referencias

- [1] ALAN DOW, *π -weight and the Fréchet-Urysohn property*. Topology Appl. **174** (2014):56–61.
- [2] ALAN DOW, RAÚL FIGUEROA-SIERRA, OSVALDO GUZMÁN AND MICHAEL HRUŠÁK, *The category dichotomy for ideals*. To appear in Annals of Pure and Applied Logic, 2025.
- [3] MICHAEL HRUŠÁK, *Katětov order on Borel ideals*. Arch. Math. Logic **56** (2017):831–847.
- [4] MARTA KWELA AND ANDRZEJ NOWIK, *Ideals of nowhere dense sets in some topologies on positive integers*. Topology Appl. **248** (2018):149–163.
- [5] STEVO TODORČEVIĆ AND CARLOS UZCÁTEGUI, *Analytic topologies over countable sets*. Topology Appl. **111** (2001):299–326.

6.19 ¿Qué puede decirnos la geometría algebraica sobre las reacciones químicas?

Astrid Liliana Contreras¹

Resumen

En esta charla presentaremos una introducción matemática a la Teoría de Redes de Reacciones Químicas (CRNT), destacando cómo el álgebra, particularmente la geometría algebraica, permite analizar la dinámica de estos sistemas. Mostraremos cómo las ecuaciones diferenciales modelan la evolución de las concentraciones de especies químicas y cómo los estados estacionarios del sistema corresponden a soluciones de sistemas polinomiales. Exploraremos el papel de las variedades algebraicas en la comprensión del comportamiento cualitativo de las redes y discutiremos brevemente el uso de herramientas algebraicas para determinar la existencia, multiplicidad y estabilidad de estos estados. Esta perspectiva algebraica resulta clave para aplicaciones en biología [2], química e ingeniería de sistemas.

Palabras & frases claves: Redes de reacciones, equilibrios de un sistema, multiestacionaridad, acción de masas.

1. Introducción

Las redes de reacciones químicas son modelos fundamentales para describir procesos dinámicos en sistemas biológicos, químicos e ingenieriles. Desde una perspectiva matemática, estas redes se representan mediante sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias que describen la evolución temporal de las concentraciones de las especies químicas involucradas. No obstante, el análisis algebraico –y particularmente la geometría algebraica– ofrece herramientas poderosas para comprender la estructura y el comportamiento cualitativo de estos sistemas.

En esta charla abordaremos cómo los sistemas polinomiales que surgen del principio de acción de masas permiten estudiar los llamados estados estacionarios de una red. A través del análisis de las variedades algebraicas asociadas, es posible determinar la existencia, multiplicidad y estabilidad de dichas soluciones. Además, exploraremos cómo ciertos aspectos estructurales de la red, representados mediante grafos y matrices, se relacionan con propiedades algebraicas fundamentales. Nuestro objetivo es mostrar que el enfoque algebraico no solo aporta claridad teórica, sino también métodos concretos para estudiar redes de reacciones químicas desde una perspectiva matemática rigurosa.

Referencias

- [1] CONTRERAS MENDOZA, A. L. *Multiestacionaridad e inyectividad: Un enfoque desde la geometría algebraica*. Paskín Matemático, 7(1) (2025):23.
- [2] DICKENSTEIN, A. M. *Algebraic geometry tools in systems biology*, 2020.

¹Universidad Autónoma de Bucaramanga. Correo: acontreras793@unab.edu.co

- [3] FEINBERG, M. *Foundations of chemical reaction network theory*, Springer, 2019.
- [4] PASCUAL, B -ESCUDERO, A. TORRES. *Herramientas algebraicas y combinatorias para el estudio de sistemas dinámicos polinomiales*. La Gaceta de la RSME, **25**(2) (2022):299–325.

6.20 Representación de ideales analíticos

Julián Enrique Neira Díaz¹, Carlos Enrique Uzcátegui Aylwin²

Resumen

Un ideal $I \subseteq P(\mathbb{N})$ es una familia cerrada bajo uniones finitas y subconjuntos. En particular, son de interés aquellos ideales que pueden describirse a través de una submedida semicontinua inferiormente en representaciones como $Fin(\phi)$ o $Exh(\phi)$. En los años 90, Mazur y Solecki caracterizaron los ideales F_σ y los P-ideales analíticos a través de este tipo de submedidas. En la ponencia se presentarán las generalidades de estas representaciones, la representación de ideales en espacios de Banach y algunos ejemplos ilustrativos. En particular, para el ideal de densidad cero, $\mathcal{Z} = \{A \subseteq \mathbb{N} : d(A) = 0\}$, se mostrará la submedida ϕ para la cual $\mathcal{Z} = Exh(\phi)$.

Palabras & frases claves: P-ideales analíticos; Submedidas semicontinuas inferiormente; Ideal de densidad cero.

1. Introducción

El estudio de los ideales se da en la teoría de conjuntos y la topología descriptiva. Estos aparecen como herramientas para formalizar nociones de convergencia, por ejemplo, el uso del ideal $Fin(\mathbb{N}) = \{A \subseteq \mathbb{N} : A \text{ es finito}\}$ para omitir finitamente muchos términos.

A finales de los años 60, surgen estudios de conjuntos intuitivamente pequeños, como lo son los magros y los de medida nula, por lo que se empiezan a considerar ideales en $\mathbb{N}$ que describan las propiedades de ser pequeño, como

$$\mathcal{Z} = \left\{ A \subseteq \mathbb{N} : \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|A \cap \{0, \dots, n\}|}{n+1} = 0 \right\},$$

el **ideal de densidad cero**. Posteriormente, a inicios de los años 90, se comienza el estudio sistemático de los ideales y se establecen distintos órdenes como formas de comparar y clasificar la complejidad de un ideal respecto a otro, como lo son el orden de Rudin-Keisler, de Rudin-Blass y de Katetov.

En la ponencia se presentarán aquellos ideales inducidos por submedidas semicontinuas inferiormente. Sea $\phi : P(\mathbb{N}) \rightarrow [0, \infty]$, ϕ es una **submedida** si

1. $\phi(\emptyset) = 0$;
2. $\phi(A) \leq \phi(A \cup B) \leq \phi(A) + \phi(B)$, para cualesquiera $A, B \subseteq \mathbb{N}$;
3. $\phi(\{n\}) < \infty$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

¹Universidad Industrial de Santander. Correo: julianenr6@gmail.com

²Universidad Industrial de Santander. Correo: cuzcatea@saber.uis.edu.co

Además, ϕ es **semicontinua inferiormente** si para todo $A \subseteq \mathbb{N}$,

$$\phi(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \phi(A \cap \{0, \dots, n\}).$$

Por otro lado, ϕ es **no patológica** si es el supremo de medidas, esto es,

$$\phi(A) = \sup\{\mu(A) : \phi \geq \mu \text{ y } \mu \text{ es medida}\}, \text{ para todo } A \subseteq \mathbb{N}.$$

Se dice que I es inducido por una submedida cuando existe ϕ submedida tal que $I = Fin(\phi)$ o $I = Exh(\phi)$, donde

$$Fin(\phi) = \{A \subseteq \mathbb{N} : \phi(A) < \infty\} \text{ y}$$

$$Exh(\phi) = \{A \subseteq \mathbb{N} : \lim_{n \rightarrow \infty} \phi(A \setminus \{0, \dots, n\}) = 0\}.$$

En afán de describir los ideales a través de submedidas semicontinuas inferiormente, Mazur y Solecki en [5] y [6] caracterizaron los ideales F_σ y los P-ideales analíticos como $Fin(\phi)$ y $Exh(\phi)$, respectivamente. Con esto, Solecki en particular logró una noción de medida en los P-ideales analíticos, pasando de una definición combinatoria a una analítica.

En la ponencia se mostrarán los resultados de Mazur y Solecki con algunos ejemplos ilustrativos. En particular, como $\mathcal{Z}$ es un P-ideal analítico, se mostrará ϕ para la cual $\mathcal{Z} = Exh(\phi)$. Luego, se presentará la representación de ideales en espacios de Banach, que se conecta fuertemente con los resultados de Mazur y Solecki y las submedidas no patológicas.

2. Ideales representables por submedidas

Un ideal es **P-ideal** cuando es casi cerrado bajo uniones numerables, esto es, dada $\{A_n \in I : n \in \mathbb{N}\}$, existe $A \in I$ tal que $A_n \setminus A$ es finito, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Ejemplo 1. $\mathcal{Z}$ y $Fin(\mathbb{N})$ son P-ideales.

Ejemplo 2. Sea $\{A_n : n \in \mathbb{N}\}$ una partición de $\mathbb{N}$ en infinitos conjuntos infinitos. La familia

$$I_1 = \{A \subseteq \mathbb{N} : A \text{ interseca finitos } A_n \text{'s}\}$$

es un ideal pero no un P-ideal.

Por otro lado, I es un ideal **analítico** si visto en $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ con la topología producto vía función característica es un conjunto analítico, esto es, existe $f : X \rightarrow \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ continua con X polaco tal que $f(X) = I$. En un espacio polaco, todo conjunto boreliano (en particular F_σ , G_δ y $F_{\sigma\delta}$) es analítico.

En general, $Exh(\phi) \subseteq Fin(\phi)$. El siguiente resultado es un hecho conocido que se encuentra en [3].

Proposición 3. Si ϕ es una submedida semicontinua inferiormente, entonces $Fin(\phi)$ es F_σ y $Exh(\phi)$ es un P-ideal $F_{\sigma\delta}$.

Sea I un ideal. Diremos que I es un **P-ideal no patológico** si $I = \text{Exh}(\phi)$ y que I es **F_σ no patológico** si $I = \text{Fin}(\phi)$, para alguna ϕ no patológica.

Ahora se presentarán las caracterizaciones de Mazur y Solecki.

Teorema 4. (Mazur, (1991), [5]) Sea I un ideal. I es F_σ si, y solo si, existe una submedida semicontinua inferiormente ϕ tal que $I = \text{Fin}(\phi)$.

Teorema 5. (Solecki, (1999), [6]) Sea I un ideal. I es un P-ideal analítico si, y solo si, existe una submedida semicontinua inferiormente ϕ tal que $I = \text{Exh}(\phi)$.

Ejemplo 6. El P-ideal $\mathcal{Z}$ es analítico pero no F_σ , como se demuestra en [2]. Por 5, existe ϕ submedida semicontinua inferiormente tal que $\mathcal{Z} = \text{Exh}(\phi)$, y esta está dada por

$$\phi(A) = \sup_n \left\{ \frac{|A \cap \{0, \dots, n\}|}{n+1} \right\}.$$

3. Ideales representables en espacios de Banach

Sea $\sum x_n$ una serie en un espacio de Banach con norma $\|\cdot\|$. Entonces

- $\sum x_n$ es **incondicionalmente convergente** si, para toda $\pi \in S_\infty$, $\sum x_{\pi(n)}$ es convergente;
- $\sum x_n$ es **perfectamente acotada** si existe $K > 0$ tal que, para todo $F \in \text{Fin}(\mathbb{N})$,

$$\left\| \sum_{n \in F} x_n \right\| \leq K.$$

Sea X un espacio de Banach y $\bar{x} = (x_n)_n$ una sucesión en X . Se definen los ideales

$$C(\bar{x}) = \left\{ A \subseteq \mathbb{N} : \sum_{n \in A} x_n \text{ es incondicionalmente convergente} \right\} \text{ y}$$

$$\mathcal{B}(\bar{x}) = \left\{ A \subseteq \mathbb{N} : \sum_{n \in A} x_n \text{ es perfectamente acotada} \right\}.$$

Se dice que un ideal I es C -representable en un espacio de Banach X (respectivamente, $\mathcal{B}$ -representable) si existe $\bar{x} = (x_n)_n$ en X tal que $I = C(\bar{x})$ (respectivamente, $I = \mathcal{B}(\bar{x})$).

Los siguientes resultados caracterizan la representación de ideales en espacios de Banach.

Teorema 7. (Borodulin et al., 2015, [1]) Sea I un ideal en $\mathbb{N}$. I es C -representable en un espacio de Banach si, y solo si, es un P-ideal no patológico.

Por la universalidad de l_∞ , el resultado anterior se puede reescribir como: I es C -representable en l_∞ si, y solo si, es un P-ideal no patológico

Teorema 8. (Martínez et al., 2024, [4]) Sea I un ideal en $\mathbb{N}$. I es $\mathcal{B}$ -representable en un espacio de Banach si, y solo si, es F_σ no patológico.

Referencias

- [1] BORODULIN, P., FARKAS, B. AND PLEBANEK, G. *Representations of ideals in Polish groups and in Banach spaces*. The Journal of Symbolic Logic, **80**(4) (2015):1268–1289.
- [2] DREWNOWSKI, L., AND LABUDA, I. *Ideals of subseries convergence and copies of c_0 in Banach spaces*, Vector measures, integration and related topics, **201** (2010):199–204. doi:10.1007/978-3-0346-0211-2_18
- [3] FARAH, I. *Analytic Quotients: Theory of Liftings for Quotients over Analytic Ideals on the Integers*, Memoirs of the American Mathematical Society, **148**(702) (2000). doi:10.1090/memo/0702
- [4] MARTÍNEZ, J., MEZA-ALCÁNTARA, D. AND UZCÁTEGUI-AYLWIN, C. *Pathology of submeasures and F_σ -ideals*. Archive for Mathematical Logic, **63** (2024):941–967.
- [5] MAZUR, K. *F_σ -ideals and ω_1 ω_1^* -gaps in the Boolean algebras $P(\omega)/I$* , Fundamenta Mathematicae, **138**(2) (1991):103–111. doi:10.4064/fm-138-2-103-111
- [6] SOLECKI, S. *Analytic ideals and their applications*, Annals of Pure and Applied Logic, **99** (1999):51–72. doi:10.1016/S0168-0072(98)00051-7

6.21 Triangulación de Farey y 3-variedades de fibran sobre el círculo por toros ponchados

Leidy Johanna González Cely¹

Resumen

Dada una matriz en $SL_2(\mathbb{Z})$ con dos autovalores reales distintos, podemos construir una 3-variedad que fibra sobre el círculo con toros ponchados. En esta charla hablaremos de la construcción de esta 3-variedad a través de la triangulación de Farey del plano hiperbólico y la geodésica hiperbólica que une los puntos fijos de la transformación asociada a la matriz dada inicialmente; ésta geodésica intersecta una familia biinfinita de triángulos de Farey que engendran la 3-variedad foliada por toros ponchados y es teselada por tetraedros ideales.

Palabras & frases claves: Triangulación de 3-variedades no compactas, Triangulación de Farey, espacio hiperbólico..

1. Introducción

Triangular una 3-variedad es hacer una descomposición de la misma, de tal forma que ella se vea como el pegado de tetraedros donde cada cara de un tetraedro se identifica de manera única con la cara de otro tetraedro.

Elegida cualquier 3-variedad, contar con una triangulación de la misma puede facilitar el estudio de sus propiedades. Si la variedad seleccionada resulta ser no compacta, se aspira poder encontrar una triangulación por tetraedros ideales (tetraedros sin vértices), sin embargo no es algo que se pueda hacer de manera trivial.

Esta charla tiene como objetivo estudiar una triangulación de una 3-variedad que fibra sobre el círculo con toros ponchados (toros menos un punto). Esta triangulación es conocida como la triangulación de Farey.

Considerar las siguientes dos interpretaciones del grupo $SL_2(\mathbb{Z})$ aportará en gran manera a la elaboración de esta charla. Primero, el hecho de que $SL_2(\mathbb{Z})$ actúe en $\mathbb{R}^2$ preservando a $\mathbb{Z}^2$ permite considerar cada uno de sus elementos como difeomorfismo del toro ponchado $(\mathbb{R}^2 - \mathbb{Z}^2)/\mathbb{Z}^2$. Finalmente, $SL_2(\mathbb{Z})$ se interpreta como un grupo que actúa en el plano hiperbólico $\mathbb{H}^2$ preservando la triangulación de Farey.

2. De la Triangulación de Farey a 3-variedades que fibran sobre el círculo por toros ponchados

2.1. Triangulación de Farey

¹Universidad Autónoma de Bucaramanga, Bucaramanga, Colombia. Correo: lgonzalez673@unab.edu.co

Todo número racional será denotado de manera única por $\frac{p}{q}$ con $(p, q) = 1$ y $q > 0$. Se acuerda designar al cero como $\frac{0}{1}$ y al infinito como $\frac{1}{0}$. Cada vez que se seleccionen dos racionales $\frac{p}{q}, \frac{r}{s}$ en la frontera de $\mathbb{H}^2$ se trazará la geodésica hiperbólica que los une siempre que $|ps - qr| = 1$. Bajo estas indicaciones, se observa que los únicos racionales unidos con infinito son los números enteros.

Las aristas que se definen según esta condición se conocen como aristas de Farey. Dados dos racionales unidos, el único racional en medio de ellos dos que se une con cada uno respectivamente es $\frac{p+r}{q+s}$.

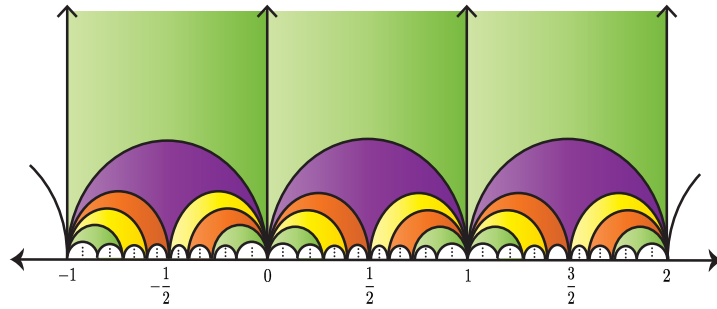


Figura 1: Teselación de Farey

Proposición 1. Las aristas de Farey determinan una triangulación del semi-plano superior.

El siguiente resultado nos permite determinar una 3-variedad a partir de un elemento de $SL_2(\mathbb{Z})$.

Teorema 2. Para A un elemento de $SL_2(\mathbb{Z})$ con dos autovalores distintos en $\mathbb{R}^*$, se tiene que la clase de conjugación de A en $SL_2(\mathbb{Z})$ contiene un elemento de la forma

$$BAB^{-1} = \pm \begin{pmatrix} 1 & a_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b_1 & 1 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} 1 & a_n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b_n & 1 \end{pmatrix},$$

donde $n > 0$ y los a_i y b_i son enteros positivos. Además el lado derecho es único hasta permutaciones cíclicas de los factores $\begin{pmatrix} 1 & a_i \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b_i & 1 \end{pmatrix}$.

3. Construcción de una 3-variedad a partir de un elemento de $SL_2(\mathbb{Z})$

Primero, se selecciona una matriz $A \in SL_2(\mathbb{Z})$ de tal forma que ϕ_A tiene dos autovalores distintos en $\mathbb{R}^*$. La transformación ϕ_A define los triángulos $\dots t_0, t_1, \dots$ que son interceptados por la geodésica $\mathcal{Q}$ que une los dos puntos fijos.

Ahora, se considera $T := (\mathbb{R}^2 - \mathbb{Z}^2)/\mathbb{Z}^2$ el toro punchado y por cada vértice de Farey $\frac{p}{q}$ se traza la recta en $\mathbb{R}^2 - \mathbb{Z}^2$ que tiene esa pendiente. En el cociente, dicha recta describe una curva con pendiente $\frac{p}{q}$.

Lema 3. *Los vértices de cada triángulo de Farey definen tres rectas en $\mathbb{R}^2 - \mathbb{Z}^2$ con esas pendientes. Al pasar al cociente se obtienen tres curvas en T correspondientes a una triangulación ideal.*

Cualquiera de estas triangulaciones determinadas por un triángulo de Farey tiene un vértice (la ponchadura), tres aristas (cada arista corresponde a cada uno de los vértices de Farey del triángulo de Farey señalado) y dos triángulos.

Cuando se cruza de un triángulo de $\mathfrak{F}$ a otro, exactamente un vértice es reemplazado. Estos dos triángulos de Farey adyacentes determinan dos triangulaciones de T . Estas triangulaciones están relacionadas de la siguiente manera: la triangulación inicial (la correspondiente al triángulo de Farey de donde se parte) es sometida a un intercambio de diagonal, es decir, se borra una arista e de tal forma que se obtiene un cuadrilátero, de donde e era una diagonal, entonces se inserta su otra diagonal.

Dada una arista e se define la triangulación superior (o inferior) τ_+e (τ_-e) del toro ponchado T como la asociada con el triángulo de Farey cruzado justo después (o antes) de la arista e . Un intercambio diagonal separa la triangulación τ_+e y τ_-e . El automorfismo de T definido por A envía la triangulación de T dada por t_0 en la triangulación dada por t_m (donde m es el período de la palabra). Por otro lado del teorema 1 se observa que la triangulación dada por t_m se puede obtener a partir de la dada por t_0 a través de cambios de diagonales.

Se origina un tetraedro $\Delta(e)$ por cada arista e de la triangulación de Farey de la siguiente manera: las aristas de $\Delta(e)$ tienen asociadas las pendientes de los vértices de Farey que la componen. Al identificar las aristas de la misma pendiente la frontera de $\Delta(e)$ se puede ver como dos toros ponchados (superior e inferior) triangulados según $\tau_+(e)$ y $\tau_-(e)$ respectivamente. Existen dos aristas especiales opuestas de $\Delta(e)$ que corresponden a las pendientes de los vértices reemplazados.

Si m es el período de ϕ_A , dicho período engendra m tetraedros, uno por cada arista que cruza $\mathfrak{Q}$ en la triangulación de Farey. Las caras de estos tetraedros se identifican si todas las pendientes asociadas a sus aristas coinciden, entonces $\Delta_i := \Delta(e_i)$ y Δ_{i+1} tiene exactamente dos caras identificadas correspondiente a un toro plegado. El hecho de que Ω (palabra definida por el período de ϕ_A) es periódica implica que un toro plegado de Δ_1 se identifica con un toro plegado de Δ_m .

Este pegado de m tetraedros genera una 3-variedad que denotaremos como V_A .

Referencias

- [1] W. FLOYD, A. HATCHER. *Incompressible surfaces in punctured- torus bundles*. Topology and its applications. **13** (1982):263–282.
- [2] F. GUÉRITAUD, D. FUTER. *On canonical triangulations of once-punctured torus bundles and two-bridge link complements*. Geometry and Topology. **10** (2006):1239–1284. arXiv:math.GT/0406242

- [3] L.V. AHLFORS. *Complex Analysis. An Introduction to the Theory of Analytic Functions of One Complex Variable*. Third edition. McGraw-Hill, 1979.
- [4] J.G. RATCLIFFE. *Foundations of Hyperbolic Manifolds*. Second Edition. Springer-Verlag, 1994.

6.22 Comportamiento de π en una cuadrícula

Breiner H. Barragan¹, Eliseo Gallo², Isnardo Arenas³

Resumen

Comúnmente π siempre ha sido estudiado, su comportamiento y propiedades son muy bien conocidas, pero resulta interesante estudiar un posible aproximado de π en un sistema discreto, en este caso una cuadrícula, y cómo este cambia según la métrica que estemos utilizando, lo cual nos llevará a una revisión de la métrica más famosa: “la métrica euclidiana” y cómo se comporta en una cuadrícula. Además, se estudia la relación entre el valor de π y la aproximación de una circunferencia.

Palabras & frases claves: Métrica, circunferencia, aproximación, cuadrícula.

1. Introducción

El número π tiene sus orígenes en la antigüedad, cuando civilizaciones como la egipcia y la babilónica ya intuían la relación constante entre la circunferencia y su diámetro, aproximándola con valores como 3.125 o 3.16. Fue Arquímedes de Siracusa (287-212 a. C.) quien desarrolló uno de los primeros métodos rigurosos de cálculo, utilizando polígonos inscritos y circunscritos para establecer cotas cada vez más precisas. En la historia moderna, el interés por π se trasladó a la aritmética y la geometría discreta, donde aparecen enfoques como el método de Monte Carlo, que emplea la aleatoriedad sobre un grid de puntos para estimar la razón área de un círculo inscrito en un cuadrado, o los conteos de puntos enteros (método de Gauss y posteriores desarrollos en teoría de números) que relacionan la geometría circular con estructuras discretas. Estos métodos muestran cómo π , surgido de la geometría clásica, sigue siendo un objeto central en el cruce entre el análisis continuo y los sistemas discretos. En este escrito, se pretende presentar cómo se comporta π en una cuadrícula primero debe entender cómo se comporta la relación que le da origen y cómo varía bajo diferentes métricas. La relación de la que surge π es la siguiente:

$$A(x, y) \in \mathfrak{R} \iff \sqrt{(x_a - x_c)^2 + (y_a - y_c)^2} = r$$

donde la dupla (x_c, y_c) hace referencia a un punto constante al cual llamaremos *centro*, y r corresponde a una constante llamada *radio*. Esta relación es comúnmente denominada como circunferencia, y π nace del cociente de la circunferencia (o todos los puntos que pertenezcan a la relación) entre dos veces r .

2. Desarrollo de la investigación

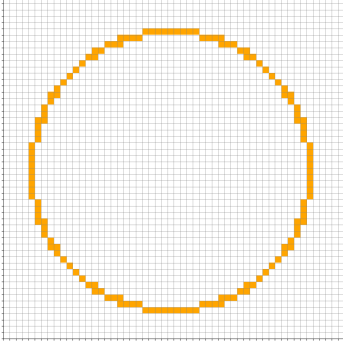
¹Estudiante Universidad Militar Nueva Granada, Semillero Turing. Correo: est.breiner.barragan@unimilitar.edu.co

²Docente Departamento de Matemáticas Universidad Nilitar Nueva Granada, Lider Semillero Turing. Correo: eliseo.gallo@unimilitar.edu.co

³Docente Departamento de Matemáticas Universidad Nilitar Nueva Granada. Correo: isnardo.arenas@unimilitar.edu.co

Para el estudio del comportamiento de π y un posible valor aproximado para el mismo en una cuadrícula debemos de tener en cuenta como se comporta la relación que le da origen en una cuadrícula.

2.1. Relación en una cuadrícula



Para empezar debemos de tener en claro como estamos definiendo la cuadrícula sobre la cual trabajamos, que cumple que cada cuadrado de la cuadrícula es de 1×1 y cada cuadrado tiene coordenadas (x, y) únicas.

Como se puede evidenciar, la relación efectivamente existe, pero no es lo que buscamos: lo que realmente queremos es una circunferencia lo más aproximada posible a la de un sistema continuo. Esto se debe a que los puntos de la cuadrícula no cumplen exactamente los requisitos de la relación, pero podemos agregar una tolerancia:

$$A(x, y) \in \mathcal{R} \iff \left| \sqrt{(x_a - x_c)^2 + (y_a - y_c)^2} - r \right| \leq 0,5$$

La cual tiene una forma imperfecta

2.2. Análisis mediante matrices

Para analizarlo, se implementan matrices que describen las distancias de los puntos a un centro, el cual se marca con un 1 la siguiente matriz nos permite ver el comportamiento de la relación en una matriz ya que las posiciones en la notación que tiene cada elemento de una matriz permite reflejar las coordenadas de una cuadrícula, la siguiente matriz refleja el comportamiento de la relación en una cuadrícula, donde todas las coordenadas marcadas con 1.0 son los puntos que cumplen con la relación

$$\begin{bmatrix} 1,4142135623731 & 1,0 & 1,4142135623731 \\ 1,0 & 1 & 1,0 \\ 1,4142135623731 & 1,0 & 1,4142135623731 \end{bmatrix}$$

Como se muestra, la relación con tolerancia incluiría puntos innecesarios, lo cual es problemático. Por ello, es preferible acudir a algoritmos que aproximen circunferencias de forma más precisa. Donde se deberán de tener en cuenta las propiedades que determinemos en la cuadrícula en la que se den los cálculos, por ejemplo, de que forma se identifican los cuadrados en la cuadrícula.

2.3. Algoritmo de aproximación desde el error

El algoritmo denominado “Algoritmo de aproximación desde el error” el cual esta basado en la siguiente relación:

$$X \in \mathcal{R} \leftrightarrow X \in \Lambda \left(A(x_1, y_1) \in \mathcal{R} \leftrightarrow \left| \sqrt{(x_0 - x_1)^2 + (y_0 - y_1)^2} - r \right| \leq 0,5 \right)$$

Donde $\Lambda(x)$ es el algoritmo de corrección

Nos permite obtener circunferencias compuestas por cuadrículas mas pulidas ya que la función $\Lambda(x)$ retira todos los cuadrados innecesarios tomados por la tolerancia de la relación

Referencias

- [1] BECKMANN, P., *A History of Pi*, St. Martin's Press, 1971.
- [2] STILLWELL, J., *Mathematics and Its History*, Springer, 2002.
- [3] BORWEIN, J. M., AND BORWEIN, P. B., *Pi and the AGM: A Study in Analytic Number Theory and Computational Complexity*, Wiley, 1987.
- [4] GALPERIN, G *Playing pool with π (the number π from a billiard point of view)*, Regular and Chaotic Dynamics, **8**(4) (2003):375–394,
- [5] MAURER, C. R. JR., QI, R., AND RAGHAVAN, V., *A Linear Time Algorithm for Computing Exact Euclidean Distance Transforms of Binary Images in Arbitrary Dimensions*, IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, **25**(2) (2003):265–270.

6.23 Del cálculo variacional a la física matemática, el péndulo esférico y la braquistócrona terrestre

Sergio A. Bautista M.¹, Duvan S. Ramos C.²

Resumen

El cálculo de variaciones ha sido una herramienta fundamental para el desarrollo de la física matemática, permitiendo formular y resolver problemas que van desde los más clásicos hasta sus generalizaciones modernas. En este trabajo se abordan dos casos paradigmáticos: el péndulo esférico y la braquistócrona terrestre. El primero constituye una extensión del péndulo simple al incorporar un grado adicional de libertad, lo que requiere deducir sus energías cinética y potencial, construir el lagrangiano y obtener las ecuaciones de movimiento mediante el principio de mínima acción. El segundo se inspira en el célebre problema de la braquistócrona planteado por Johann Bernoulli en 1696, cuya solución resultó ser la cicloide. En su versión terrestre, se busca la trayectoria de menor tiempo entre dos puntos de la superficie atravesando el interior de la Tierra, obteniéndose como solución una hipocicloide. Ambos problemas ilustran cómo el formalismo variacional permite no solo describir sistemas físicos complejos, sino también revelar trayectorias óptimas con aplicaciones que van desde el análisis de osciladores no lineales hasta concepciones ideales de transporte subterráneo de alta velocidad.

Palabras & frases claves: Péndulo esférico, Braquistócrona terrestre, Cálculo de variaciones.

1. Introducción

El problema de la braquistócrona, planteado por Johann Bernoulli en 1696, marcó un hito en el desarrollo del cálculo variacional. Su solución, contra la intuición, no fue la línea recta sino la cicloide, atrayendo así la atención de figuras como Newton, Leibniz y los Bernoulli. En su versión terrestre, se busca la trayectoria de menor tiempo entre dos puntos de la superficie atravesando el interior de la Tierra, cuya solución es una hipocicloide.

Un siglo y medio después, en 1851, Léon Foucault demostró la rotación terrestre con su péndulo en el Panteón de París, ejemplo particular del *péndulo esférico*, donde la masa oscila libremente sobre una esfera. Este sistema puede analizarse también mediante el principio de mínima acción, formulando las ecuaciones de movimiento a partir de su lagrangiano [1].

2. Modelado y formulación variacional

2.1. Péndulo esférico

El péndulo esférico consiste en una partícula de masa m unida a una cuerda inextensible de longitud l , que oscila sobre la superficie de una esfera. El formalismo lagrangiano permite deducir sus ecuaciones de movimiento en función de los parámetros angulares (θ, ϕ) y establecer la conexión con problemas más complejos de variaciones [2].

¹Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Correo: Sabautistam@udistrital.edu.co

²Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Correo: Dsramosc@udistrital.edu.co

2.2. Braquistócrona terrestre

Este problema considera un túnel que une dos puntos de la superficie terrestre atravesando su interior, bajo las hipótesis de simetría esférica y ausencia de fricción. El principio de conservación de la energía conduce a un problema variacional cuya solución es una *hipocicloide*, análoga a la cicloide clásica, pero adaptada al contexto gravitacional esférico [3].

3. Aplicaciones y perspectivas

La braquistócrona terrestre ilustra aplicaciones conceptuales en transporte subterráneo de alta velocidad: un trayecto recto entre Boston y Washington duraría 42 minutos, mientras que siguiendo la hipocicloide se reduciría a apenas 10.7 minutos, pese a recorrer mayor distancia. Este contraste evidencia cómo la geometría óptima supera la intuición.

De forma análoga, el péndulo esférico trasciende el interés teórico: explica el péndulo de Foucault y se aplica en dinámica de satélites, ingeniería de estabilización y análisis de osciladores no lineales. Ambos sistemas muestran la vigencia del cálculo variacional en la comprensión y diseño de trayectorias óptimas.

4. Conclusiones

El estudio conjunto de la braquistócrona terrestre y el péndulo esférico pone de manifiesto el carácter unificador del cálculo variacional en la modelación de sistemas físicos. Aunque sus contextos son distintos, ambos problemas destacan cómo la búsqueda de trayectorias óptimas revela estructuras geométricas profundas y soluciones que desafían la intuición.

Estas formulaciones muestran cómo el formalismo lagrangiano sigue siendo una herramienta esencial tanto para comprender fenómenos clásicos como para inspirar nuevas aplicaciones en dinámica, ingeniería y diseño de sistemas eficientes. En conjunto, refuerzan la idea de que las matemáticas continúan siendo un puente entre la teoría y la innovación tecnológica.

Referencias

- [1] SPIVAK, M., *Calculus on Manifolds: A Modern Approach to Classical Theorems of Advanced Calculus*. W. A. Benjamin, New York, 1965.
- [2] GELFAND, I. M., FOMIN, S. V., *Calculus of Variations*. Dover Publications, 2000.
- [3] KOT, M., *A First Course in the Calculus of Variations*. American Mathematical Society, 2014.
- [4] VENEZIAN, G., *On the brachistochrone in a central field of force*. American Journal of Physics, **34**(5) (1966):409–412,

6.24 El polinomio de Alexander-Conway para los nudos de pretzel $(1, 1, n)$

Andrés Felipe Cruz López¹

Resumen

El polinomio de Alexander-Conway se configura como un invariante polinomial bastante poderoso en la resolución del problema de reconocimiento de nudos y enlaces matemáticos. El cálculo de este polinomio para los nudos de pretzel $P(1, 1, n)$ puede generalizarse a partir de la paridad de la cantidad n de cruces en la tercera hebra del nudo.

Palabras & frases claves: Nudos de pretzel, Polinomio de Alexander-Conway, Invariantes de nudos.

1. Introducción

Un enlace es un encaje suave de n circunferencias disjuntas (llamadas componentes) en $\mathbb{R}^3$. Un enlace con una componente es conocido como un nudo. Los invariantes polinomiales (Alexander-Conway, Jones, HOMFLY, Kauffman, entre otros) son herramientas algebraicas que permiten clasificar enlaces y nudos salvo clases de isotopía [1]. En la presentación del póster se introduce el polinomio de Alexander-Conway para cierta familia de nudos de pretzel con tres hebras $P(1, 1, n)$ y el cálculo del caso particular del nudo de pretzel $P(1, 1, 5)$.

2. Enlaces de pretzel y polinomio de Alexander-Conway

Un enlace de pretzel $P(p_1, p_2, \dots, p_n)$ está definido por una n -upla de enteros no nulos $p_1, p_2, \dots, p_n$, donde p_i representa el número de cruces de la hebra i -ésima.

Definición 1. Dado un diagrama K de un enlace orientado, se le asigna un polinomio de Laurent mediante el uso de los siguientes axiomas:

1. $\nabla_{\bigcirc}(z) = 1$, con $\bigcirc$ cualquier diagrama del nudo trivial.
2. Dados L_+ , L_- y L_0 diagramas de enlaces que difieren solo en un cruce (Figura 1), los polinomios de los tres diagramas se relacionan mediante la ecuación

$$\nabla_{L_+}(z) = \nabla_{L_-}(z) + z\nabla_{L_0}(z),$$

conocida como relación de madeja (skein relation).

¹Universidad Industrial de Santander. Correo: andresfecrlo@gmail.com

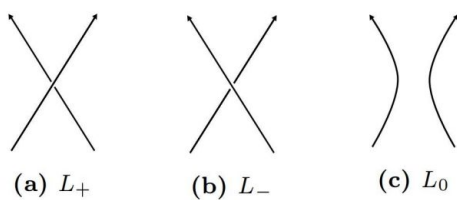


Figura 1: Tripleta de Conway

El siguiente teorema formulado por Hernández y Montoya en [2] caracteriza el polinomio de Alexander-Conway para los nudos de pretzel $P(1, 1, n)$ mediante la paridad del entero n .

Teorema 2. *El polinomio de Alexander-Conway para el enlace de pretzel $P(1, 1, n)$ con $n \in \mathbb{Z}^+$, está dado por*

$$\nabla P(1, 1, n)(z) = \begin{cases} 1 + \left(\frac{n+1}{2}\right)z^2, & \text{si } n \text{ es impar,} \\ 1 - \left(\frac{n}{2}\right)z^2, & \text{si } n \text{ es par.} \end{cases}$$

Referencias

- [1] ADAMS, C., *The knot book: An elementary introduction to the mathematical theory of knots*, W.H. Freeman and Company, 2004.
- [2] HERNÁNDEZ-FLORES, A. & MONTOYA-VEGA, G., *Alexander-Conway and bracket polynomials of a family of pretzel links*. arXiv:2412.20240 (2024).

6.25 Espacios de Fréchet-Urysohn y propiedades relacionadas

Pilar Bautista¹

Resumen

Exploraremos los espacios de Fréchet-Urysohn y conceptos relacionados, en particular la propiedad α_3 y la bisecuncialidad. También se abordarán algunas características cardinales combinatorias del continuo (también llamados: invariantes cardinales), tales como $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$, $\text{non}(\mathcal{M})$ y $\mathfrak{s}$.

En [2], Gruenhage formuló la pregunta: Toda familia almost disjoint $\mathcal{A}$ α_3 -FU (es decir, Fréchet y α_3) es bisecuncial?

La respuesta negativa (bajo la hipótesis $\mathfrak{c} \leq \aleph_2$) fue dada por Michael Hrusák y César Corral en [1] y constituye el resultado central en este póster.

Palabras & frases claves: Familias Almost Disjoint, Espacios de Fréchet.

1. Introducción

El concepto de espacio de Fréchet-Urysohn fue inicialmente propuesto por P. Urysohn en 1925, en su artículo póstumo *Sur un espace metrique universel*, basado en correspondencia previa con Fréchet en 1924. Fréchet, por su parte, continuó investigando este tema, y desde entonces, muchos investigadores se han dedicado al estudio de esta propiedad. Recuerde que un punto x de un espacio topológico X es un *punto de Fréchet* (o de *Fréchet-Urysohn*) si, siempre que $x \in \overline{A} \subseteq X$, existe una sucesión $\{x_n : n \in \omega\} \subseteq A$ tal que $x_n \rightarrow x$. Un espacio X es Fréchet si todo punto $x \in X$ es un punto de Fréchet. Se observó, sin embargo, que esta propiedad puede perderse fácilmente cuando se considera el producto de espacios. En este contexto, Arhangel'skii introdujo [3] las propiedades α_i con $i = 1, 2, 3, 4$ como herramientas para investigar las condiciones bajo las cuales el producto de espacios Fréchet permanece Fréchet. Un punto $x \in X$ se considera un *punto α_3* si, dada una familia $\{S_n : n \in \omega\}$ de sucesiones convergentes a x , existe una sucesión $S \rightarrow x$ tal que

$$|S \cap S_n| = \omega \text{ para infinitos valores de } n \in \omega.$$

Así, X es un espacio α_3 si todo punto $x \in X$ es un punto α_3 . Diremos que X es α_3 -FU si es Fréchet y α_3 .

Por otro lado, E. Michael introdujo la noción de bisecuncialidad. Dada una familia $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$, diremos que $x \in \overline{\mathcal{A}}$, si $x \in \overline{A}$ para todo $A \in \mathcal{A}$. Una base de filtro $\mathcal{G}$ converge a un punto $x \in X$ si, para toda vecindad U de x , existe un $G \in \mathcal{G}$ tal que $G \subseteq U$. Escribimos entonces $\mathcal{G} \rightarrow x$. Dado un filtro $\mathcal{F}$, denotaremos por $\mathcal{F}^+$ al conjunto de todos los subconjuntos de ω que intersectan cada elemento de $\mathcal{F}$ en un conjunto infinito, esto es,

$$\mathcal{F}^+ = \{S \subseteq \omega : |S \cap F| = \omega, \forall F \in \mathcal{F}\}.$$

¹Universidad de Sao Paulo. Correo: pilarbau@ime.usp.br

Definición 1. [4] Un espacio X es *bisecuencial* en $x \in X$ si, para todo filtro $\mathcal{F}$ en X tal que $x \in \overline{\mathcal{F}}$, existe una sucesión decreciente $\{G_n : n \in \omega\} \subset \mathcal{F}^+$ tal que $G_n \rightarrow x$. Un espacio X es *bisecuencial* si es *bisecuencial* en todo punto.

Una familia $\mathcal{A}$ de subconjuntos infinitos de ω es *almost disjoint* (ad), si $A \cap B$ es finito para todo $A, B \in \mathcal{A}$. A cada familia de este tipo podemos asociarle un espacio topológico llamado el espacio de *Mrówka-Isbell* $\Psi(\mathcal{A}) = \omega \cup \mathcal{A}$, donde ω es discreto y las vecindades abiertas básicas de un $A \in \mathcal{A}$ son de la forma $\{A\} \cup (A \setminus n)$.

Diremos que una familia ad $\mathcal{A}$ es *hereditariamente* α_3 si $\mathcal{B}$ es α_3 , para todo $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$. Como $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ es Fréchet para cualquier conjunto Fréchet $\mathcal{A}$, hereditariamente α_3 -FU es lo mismo que Fréchet y hereditariamente α_3 . Fue demostrado por Gruenhage [2] que si $\mathcal{A}$ es bisecuencial, entonces es hereditariamente α_3 -FU y, por lo tanto, α_3 -FU. Surge naturalmente la cuestión, formulada por G. Gruenhage, de saber si la implicación inversa es verdadera.

2. Resultados a presentar

A continuación listamos los resultados de los cuales se dará una idea de demostración cuya referencia es [1] y [6].

Teorema 2. [6] El cardinal $\text{non}(\mathcal{M})$ es el tamaño de la familia más pequeña $\mathcal{F} \subseteq \omega^\omega$ tal que

$$\forall g \in \omega^\omega \exists f \in \mathcal{F} \exists^\infty n \in \omega (f(n) = g(n)).$$

Teorema 3. [1] ($\text{non}(\mathcal{M}) = \mathfrak{c}$) Existe una familia ad α_3 -FU que no es hereditariamente α_3 -FU.

Teorema 4. [1] ($\mathfrak{s} \leq \mathfrak{b}$) Existe una familia ad α_3 -FU $\mathcal{A}$ que no es hereditariamente α_3 . En particular, no es bisecuencial.

Luego, combinando los Teoremas 3, 4 y el hecho de que $\mathfrak{s} \leq \text{non}(\mathcal{M})$ se obtiene:

Corolario 5. [1] ($\mathfrak{c} \leq \aleph_2$) Existe una familia ad α_3 -FU que no es bisecuencial.

Referencias

- [1] MICHAEL HRUSÁK, CÉSAR CORRAL, *Fréchet-like properties and almost disjoint families*. Topology and its Applications. **277** (2020):107 - 216.
- [2] GARY GRUENHAGE, *Products of Fréchet spaces*. Topology Proceedings. **30(2)** (2006):475 - 499.
- [3] A.V. ARHANGELSKII, *The frequency spectrum of a topological space and the product operation*. Trans. Moscow Math. Soc. **40(2)** (1981):163 - 200.
- [4] A. MICHAEL ERNEST, *A quintuple quotient quest*. General Topology and its applications. **2** (1972):91 - 138.
- [5] ANDREAS BLASS, *Combinatorial cardinal characteristics of the continuum*. Handbook of Set Theory. **2** (2010):395 - 490.

- [6] Tomek Bartoszynski, Haim Judah, *Set Theory: On the Structure of the Real Line*. AK Peters/CRC Press, 1995.
- [7] Kenneth Kunen, *Set theory: An introduction to independence proofs*. Elsevier. **102** (2006).

6.26 Grupo de trenzas: Un enredo matemático

Sara Valentina Muñoz Jaramillo¹, Julián David Vera Varela²

Resumen

En los años 30, Emil Artin definió las “trenzas” como objeto matemático en un **grupo no conmutativo** B_n llamado el *Grupo de Trenzas*, con la operación “producto de trenzas”. En este poster se presentará la estructura de grupo de este conjunto de trenzas, el como puede ser estudiado por medio de las **presentaciones de grupo**, y finalmente su relación con los nudos por medio del *Teorema de Alexander* y *Movimientos de Markov*. Con esto invitamos a explorar un universo donde **topología, álgebra** se entrelazan.

Palabras & frases claves: Grupos - Trenzas - Nudos

1. Introducción

Las trenzas han sido parte del ámbito cotidiano durante muchísimos años, ya sea como parte de una decoración, un estilo de peinado, e incluso algunas veces influyendo en el arte como lo puede ser la arquitectura. Sin embargo, en 1925 el matemático *Emil Artin* presentó el concepto de “trenza” dado por un conjunto que, dotado de la operación “producto de trenzas” tiene estructura de **grupo**, logrando así facilitar el trabajo de la clasificación de trenzas (problema similar al que poseía la teoría de nudos).

A partir de la definición dada por Artin es natural preguntarse el comportamiento de este grupo de trenzas, además de pensar sobre su relación con los nudos, pues geométricamente pareciera que estos dos conceptos son casi el mismo.

En el presente poster veremos como se cumple la estructura de grupo en este conjunto, también el como este puede ser definido por medio de las *presentaciones de grupo*, esto acompañado con ejemplos del mismo para su mejor entendimiento. Finalmente se tratará su relación con los nudos por medio del *Teorema de Alexander*, dando una idea intuitiva de la demostración con un ejemplo y se tratarán los *Movimientos de Markov*, elementos fundamentales para la clasificación de trenzas, y así, poder ver su importancia y belleza en las matemáticas.

Referencias

- [1] JOSÉ LUIS CISNEROS MOLINA, *Introducción a la Teoría de Nudos*. Topología Algebraica, 11-15 de Abril 2011, pp. 36–41, 47–55.
- [2] MIGUEL ÁNGEL NAVARRO PÉREZ, *Trenzas y Nudos*. Topología Algebraica, 2015.

¹Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Correo: vmontanom@udistrital.edu.co

²Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Correo: jdverav@udistrital.edu.co